Dana HEUBERGER
Adrian ZANOSCHI
Gabriel POPA
Marius CICORTAȘ

Matematică
pentru excelență

Clasa a V-a

art educațional

Cuprins

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Cuvânt-înainte

Această culegere, prima dintr-o serie de cărți a *Clubului matematicienilor de excelență*, s-a născut din dorința autorilor de a oferi perspective noi și un real sprijin profesorilor și micilor iubitori ai matematicii.

Drumul către performanța în matematică este pasionant și plin de satisfacții și recompense, iar cea mai mare dintre acestea nu este premiul pe care drumețul îl poate primi la un anumit concurs, ci bucuria călătorului atunci când reușește să rezolve singur o problemă frumoasă. Iar aceasta se poate întâmpla după mai multe zile sau săptămâni de încercări, după abandonarea unor căi bătute de alții, când ai îndrăzneala să schimbi traseul și să o iei pe o potecă abruptă.

Pentru a face performanță, micii iubitori ai matematicii au nevoie de îndrumări atente. Astfel, își pot câștiga autonomia și pot depăși șabloanele de gândire. Ei trebuie ajutați să își dezvolte abilitățile și să își păstreze entuziasmul. Este ceea ce își propune culegerea de față.

Autorii și-au folosit experiența acumulată de-a lungul anilor pentru a stabili cu atenție structura acestei cărți, care conține peste o mie de probleme, alese cu grijă, în conformitate cu noua programă a clasei a V-a și cu cea pentru olimpiadă, grupate în 30 de teme și 36 de teste de evaluare. Temele prezentate au, acolo unde este necesară, o succintă parte teoretică și comentarii metodice, care subliniază unele noțiuni din programa școlară sau chiar adaugă cunoștințe noi. La începutul fiecăreia dintre teme se află câteva probleme semnificative cu soluții complete, menite să ușureze rezolvarea setului de probleme propuse, a testelor de etapă și a celor finale. În fiecare set, problemele sunt prezentate gradat, pe niveluri de dificultate, de la enunțuri care pot fi rezolvate la clasă la enunțuri preluate (sau adaptate) de la concursuri naționale sau internaționale. Problemele alese sunt foarte variate și sunt prezentate coerent, într-o succesiune logică, în funcție de tipul de abordare indicat. Acestea nu pun accentul pe dificultăți de calcul (care pot fi depășite la clasă), ci pe ingeniozitatea și atractivitatea ideilor necesare pentru a le putea rezolva. Testele de evaluare au structura celor de la concursurile școlare; timpul de lucru recomandat pentru fiecare dintre acestea este de cel mult trei ore.

Pentru parcurgerea unora dintre temele din carte este nevoie de puține cunoștințe teoretice, iar acestea le sunt accesibile și copiilor mai mici, așadar temele respective (cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24 și 25) pot fi folosite cu succes și de elevii de clasa a IV-a pasionați de matematică.

Elevii de clasa a V-a trebuie să se obișnuiască nu doar cu o altă abordare, ci și cu un stil de redactare diferit de cel din ciclul primar; de aceea, toate soluțiile problemelor sunt detaliate. Este bine ca elevii să apeleze la acestea doar după mai multe încercări sau pentru a-și verifica propriul raționament și propria modalitate de redactare.

Unele dintre problemele din carte sunt mici bijuterii matematice, în altele este nevoie de informații noi, pe care elevii le asimilează parcurgându-le. În unele cazuri prezentăm, în detaliu, soluții alternative, căci credem că este bine ca micii pasionați de matematică să învețe să aprecieze faptul că pot exista idei diferite care să conducă, la fel de riguros, la același rezultat.

Ca orice demers, și acesta este perfectibil, iar edițiile următoare ale cărții vor fi mai valoroase – cu ajutorul sugestiilor dumneavoastră, dragi cititori!

Ne dorim ca această culegere să contribuie la mărirea și consolidarea frumoasei familii a iubitorilor matematicii.

Autorii

1. Numere naturale

Probleme rezolvate

1.R.1 Fie a, b, c trei cifre pare nenule. Ordonați crescător numerele $\overline{bac}$, $\overline{9ab}$, $\overline{b9c}$, $\overline{1bc}$, $\overline{b1a}$, $\overline{99c}$ și $\overline{91a}$.

Soluție. Toate cele trei cifre sunt mai mari decât 1 și mai mici decât 9, prin urmare $\overline{1bc} < \overline{b1a} < \overline{bac} < \overline{b9c} < \overline{91a} < \overline{9ab} < \overline{99c}$.

1.R.2 Eliminați cât mai puține cifre din numărul 56767754, astfel încât numărul rămas să coincidă cu răsturnatul său.

Soluție. Evident, trebuie eliminată cifra 4, obținând 5676775. Din acest număr trebuie eliminate măcar încă două cifre. În concluzie, vom elimina, în total, trei cifre, numărul rămas fiind 56765, 57775 sau 57675.

1.R.3 Dispunem de cele trei cartonașe din imaginea alăturată. Stabiliți câte numere diferite de trei cifre se pot forma cu aceste cartonașe. $\boxed{9}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$

Soluție. Cartonașele cu 9 se pot întoarce, obținând cifra 6. Numerele ce se pot forma sunt 998, 989, 899, 698, 689, 869, 896, 986, 968, 668, 686, 866, în total 12 numere.

1.R.4 Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, …, 100. Cristi și Irina șterg, pe rând, numerele de pe tablă, după următoarea regulă: întâi, Cristi șterge numerele de pe locurile impare, apoi Irina șterge numerele de pe locurile pare din șirul rămas. În continuare, Cristi șterge numerele de pe locurile impare din noul șir ș.a.m.d. Care este ultimul număr rămas pe tablă?

Soluție. După ce Cristi șterge numerele de pe locurile impare, rămân 50 de numere: 2, 4, 6,…100. Irina șterge numerele de pe locurile pare și rămân 25 de numere: 2, 6, 10, …, 98. Cristi șterge numerele de pe locurile impare; rămân 12 numere: 6, 14, 22, …, 94. Irina șterge numerele de pe locurile pare și rămân 6 numere: 6, 22, 38, …, 86. Cristi șterge numerele de pe locurile impare și rămân numerele 22, 54, 86, Irina îl șterge pe 54 și rămân 22, 86 și, în sfârșit, Cristi îl șterge pe 22. Ultimul număr rămas este 86.

1.R.5 a Câte numere de forma $\overline{xyz}$ au proprietatea $\overline{xyz} > \overline{zxy}$?

b Determinați numerele $\overline{xyz}$, știind că $\overline{xyz} > \overline{yxz}$ și că între cele două numere sunt exact 89 de numere naturale.

Soluție. a Pentru $x = 1$, trebuie să avem $z = 1, y \geq 2$; există 8 numere cu proprietatea dorită. Dacă $x = 2$, atunci $z = 1$ și y este oarecare, sau $z = 2$ și $y \geq 3$; există $10 + 7 = 17$ numere cu proprietatea dată. Pentru $x = 3$, avem $z = 1$ și y este oarecare, sau $z = 2$ și y este oarecare, sau $z = 3$ și $y \geq 4$; găsim $2 \cdot 10 + 6 = 26$ de numere cu proprietatea din enunț.

Continuând, găsim:
$8+(10+7)+(2\cdot 10+6)+(3\cdot 10+5)+(4\cdot 10+4)+(5\cdot 10+3)+(6\cdot 10+2)+(7\cdot 10+1)+$
$+8\cdot 10=396$ de numere.

b Impunem condiția $\overline{xyz}-\overline{yxz}=90$, adică $\overline{xy}-\overline{yx}=9$, prin urmare $x=y+1$. Numerele căutate sunt $\overline{21z}, \overline{32z}, \overline{43z}, \overline{54z}, \overline{65z}, \overline{76z}, \overline{87z}, \overline{98z}$, unde z este o cifră arbitrară.

Probleme propuse

1.P.1 Un vecin al unui vecin al numărului 1001 este vecin al unui vecin al numărului 997. Despre ce număr este vorba?

1.P.2 Dacă $49549<\overline{495xy}<49743<\overline{49z4t}$, arătați că $x+y+z+t\geq 13$.

1.P.3 Diferența dintre rotunjirea numărului $\overline{374a39}$ la ordinul sutelor și rotunjirea numărului $\overline{3535b7}$ la ordinul zecilor este 21150. Determinați cifrele a și b.

1.P.4 Notăm cu $\max(a,b)$ pe cel mai mare dintre numerele a și b și cu $\min(a,b)$ pe cel mai mic dintre numerele a și b. Calculați $\max(4,\max(3,5))-\min(\max(2,3),\min(5,6))$.

1.P.5 Anul 1790 are proprietatea că suma cifrelor sale este 17.
a Din ce secol face parte acest an?
b Câți ani din secolul respectiv, scriși cu cifre arabe, au suma cifrelor 17?

1.P.6 Determinați cel mai mare număr natural cu proprietatea că oricare două cifre consecutive formează un număr care se împarte exact la 23.

1.P.7 Determinați cifrele x, y, z, a și b, știind că $(x+1)\cdot(y+2)\cdot(z+3)=\overline{13ab}$.

1.P.8 Un număr de cel puțin trei cifre distincte se numește *ondulat* dacă printre cifrele sale există trei cifre alăturate a, b, c astfel încât fie $a<b>c$, fie $a>b<c$. Calculați suma dintre cel mai mic și cel mai mare dintre numerele ondulate de patru cifre.

1.P.9 Se numește *palindrom* un număr care coincide cu răsturnatul său.
Mergând cu mașina, cu viteză constantă, Adrian observă la ora 9:10 că pe kilometrajul de la bord apare numărul 12921. La ora 11:00, pe kilometraj apare următorul număr palindrom. La ce oră va observa Adrian a treia oară un astfel de număr?

1.P.10 Determinați numerele $\overline{abcd}$ pentru care $a<b<c<d$ și $a\cdot b=c+d$.

1.P.11 Determinați toate numerele de cinci cifre cu proprietatea că fiecare cifră, începând cu cea a zecilor, este strict mai mare decât suma cifrelor scrise la dreapta sa.

ONM 2008

1.P.12 Tăiem zece cifre din numărul 3021302130213021, astfel încât numărul rămas să fie cel mai mic posibil. Care este numărul rămas?

1.P.13 Se consideră numărul obținut prin scrierea, unul după altul, a tuturor numerelor de la 1 la 100. Aflați cel mai mare număr care se poate obține ștergând o sută de cifre.

1.P.14 Determinați cel mai mic număr natural care are produsul cifrelor egal cu 240.

1.P.15 Determinați cel mai mic și cel mai mare dintre numerele de trei cifre pentru care cifra din mijloc este produsul celorlalte două cifre. Câte astfel de numere există?

1.P.16 Numărul $\overline{abcba}$ reprezintă codul unui seif pe care Maria dorește să îl deschidă. Fata știe că suma cifrelor de pe locurile pare ale numărului este egală cu suma cifrelor de pe locurile impare. Care este cel mai mare număr de încercări pe care trebuie să le facă Maria dacă are ghinion și nimerește mai întâi toate combinațiile greșite?

1.P.17 Determinați cel mai mic și cel mai mare dintre numerele de 200 de cifre în a căror scriere apare de exact o sută de ori cifra 1.

1.P.18 Fie x, y și z trei numere naturale nenule astfel încât $x \geq 3y-2$, $z \leq y+2$ și $3z \geq x+8$. Stabiliți ordinea numerelor x, y și z.

1.P.19 Câte inegalități de forma $\overline{a1b} < \overline{8c2}$ putem scrie?

1.P.20 Se scriu, unul după altul, primele 100 de numere pare nenule, apoi următoarele 100 de numere impare: $24681012\ldots200201203\ldots399$. Care este cifra de pe locul 399 în numărul astfel format?

1.P.21 Se consideră numărul $N = 102003000\ldots99\underbrace{00\ldots0}_{99 \text{ de } 0}$. Stabiliți pe a câta poziție a numărului N se află cel de-al 100-lea zerou al numărului.

1.P.22 Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, …, 100. Lucian și Dana șterg, pe rând, numerele de pe tablă, după următoarea regulă: întâi, Lucian șterge numerele de pe locurile impare, apoi Dana șterge numerele de pe locurile pare din șirul rămas. În continuare, Lucian șterge numerele de pe locurile pare din noul șir ș.a.m.d. Care este ultimul număr rămas pe tablă?

1.P.23 Pe ecranul unui calculator sunt scrise toate numerele de la 1 la 1000. Ana utilizează un program care șterge de pe ecran numerele care conțin cifra 3. Câte cifre de 0 rămân scrise pe ecran?

1.P.24 Pe o tablă este scris numărul 123. La fiecare pas, putem înlocui numărul de pe tablă cu numărul care se obține schimbând între ele locurile a două cifre ale numărului existent pe tablă în acel moment (de exemplu, din 123 putem obține 132, după un pas, dar nu și 312). Arătați că după 123 de pași nu se poate obține numărul inițial.

1.P.25 Pe o tablă este scris numărul 7654321. Avem voie să efectuăm următoarea transformare a numărului scris pe tablă la un moment dat: alegem două cifre alăturate, scădem 1 din fiecare și le schimbăm locurile. Care este cel mai mic număr ce se poate obține după efectuarea unor astfel de transformări?

2. Operații cu numere naturale

Probleme rezolvate

2.R.1 Determinați numerele ale căror sumă și produs sunt, ambele, egale cu 20.

Soluție. Deoarece $20 = 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$, soluțiile probemei sunt: 2, 10, $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{8 \text{ de } 1}$ sau 4, 5, $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{11 \text{ de } 1}$ sau 2, 2, 5, $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{11 \text{ de } 1}$.

2.R.2 Aflați cifra unităților numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$.

Soluție. Descăzutul conține factorul 5 și cel puțin un factor par, deci are cifra unităților 0. Scăzătorul conține factorul 5 și toți ceilalți factori sunt numere impare, deci are cifra unităților 5. Rezultă că ultima cifră a numărului A este 5.

2.R.3 În dreapta unui număr natural de două cifre scriem de încă două ori acest număr. De câte ori este mai mare numărul astfel obținut decât cel inițial?

Soluție. Fie $\overline{ab}$ numărul inițial. Numărul nou obținut este $\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 10101$, care este de 10101 ori mai mare decât cel inițial.

Altfel: folosind algoritmul de împărțire, avem $\overline{ababab} : \overline{ab} = 10101$, rest 0.

2.R.4 Spunem că un număr este *complet* dacă este suma a doi termeni, unul de cinci cifre, celălalt de patru cifre, iar scrierile celor doi termeni cuprind, împreună, toate cifrele nenule. Dacă M și N sunt două numere complete, arătați că $M - N \leq 90126$.

Soluție. Cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul M este 106173 (de exemplu, pentru $97531 + 8642$), iar cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul N este 16047 (de exemplu, pentru $13579 + 2468$). Rezultă că $M - N \leq 90126$.

2.R.5 Câte numere de forma $\overline{abc}$ au proprietatea că $4 \cdot \overline{bc} = 7 \cdot \overline{cb}$?

Soluție. Din $4(10b + c) = 7(10c + b)$ obținem $b = 2c$. Cum b și c sunt nenule (apar ca prime cifre ale unor numere), avem patru modalități de alegere a perechii (b, c). Pentru fiecare astfel de pereche, cifra a poate fi aleasă în câte nouă moduri, deci obținem $4 \cdot 9 = 36$ de numere.

2.R.6 Prima cifră a unui număr natural de șase cifre este 6. Dacă se mută această cifră la sfârșit, se obține un număr de patru ori mai mic. Aflați numărul.

Soluția 1. Avem $\overline{6abcde} : 4 = \overline{abcde6}$. Efectuăm împărțirea, folosind algoritmul uzual: cum $6 : 4 = 1$ (rest 2), înseamnă că $a = 1$. Din $61 : 4 = 15$ (rest 1), rezultă $b = 5$. Apoi, $615 : 4 = 153$ (rest 3), așadar $c = 3$.
Deoarece $6153 : 4 = 1538$ (rest 1), deducem că $d = 8$. În sfârșit, din $61538 : 4 = 15384$ (rest 2), găsim $e = 4$, iar $615384 : 4 = 153846$. Numărul căutat este 615384.

Soluția 2. Numărul dorit este $\overline{6abcde} = 600000 + N$, cu $N = \overline{abcde}$. Din datele problemei, $600000 + N = 4 \cdot (10N + 6)$. Rezultă că $N = 599976 : 39 = 15384$, deci numărul căutat este 615384.

2.R.7 Fie a, b, c, d, x, y, z, t cifre astfel încât $0 < a < b \le c < d$ și $\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}$. Determinați toate valorile posibile ale sumei $S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}$.

ONM 2013

Soluție. Din $\overline{dcba} - \overline{abcd} = \overline{xyzt}$, cu $a < d$, obținem $t = 10 + a - d$.
Dacă $b = c$, atunci $z = y = 9$ și $x = d - 1 - a$, așadar $x + t = 9$, $y + z = 18$ și obținem $S = 1001(x + t) + 110(y + x) = 10989$. Dacă $b < c$, atunci $z = 9 + b - c$, $y = c - b - 1$ și $x = d - a$, prin urmare $x + t = 10$, $y + z = 8$, iar $S = 10890$.

Probleme propuse

2.P.1 Un melc urcă pe un stâlp cu înălțimea de 4 m, pornind de la baza acestuia. Cât timp soarele e pe cer, melcul urcă 70 cm, dar noaptea adoarme și alunecă 40 cm. În a câta zi ajunge melcul în vârful stâlpului?

2.P.2 Cosmin și Paul sunt doi curieri care trebuie să distribuie niște materiale publicitare locuitorilor de pe Strada Lungă. Ei pleacă de la biroul lor, aflat pe Strada Lungă, la numărul *n*: Cosmin către stânga, până la numărul 26 al străzii, iar Paul către dreapta, până la numărul 556 al străzii. Cei doi curieri lasă câte un pliant la fiecare număr al străzii, numărul total de pliante distribuite de fiecare dintre ei fiind același. Aflați numărul *n*.

2.P.3 În adunarea $\mathrm{UNU} + \mathrm{UNU} = \mathrm{DOI}$, literele diferite reprezintă cifre diferite. Calculați suma numerelor UNU care verifică egalitatea.

2.P.4 Suma a 17 numere naturale distincte este 152.
a Aflați produsul numerelor.
b Determinați cele 17 numere.

2.P.5 Determinați cea mai mică și cea mai mare dintre valoarile posibile ale numărului $A = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$, unde *a*, *b* și *c* sunt cifre nenule distincte.

2.P.6 **a** Arătați că $\overline{abcabc}$ se împarte exact la 1001.
b Aflați câtul și restul împărțirii lui $\overline{ababa}$ la 101.

2.P.7 Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} = 90 \cdot a + 25 \cdot b$.

2.P.8 Găsiți numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 3000$.

2.P.9 Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $\overline{aaaa} - \overline{bbb} + \overline{cc} - d = 1234$.

2.P.10 Suma a două numere naturale M și N este 160. Dacă ștergem una dintre cifrele lui M, se obține numărul N. Aflați numerele M și N.

2.P.11 Determinați numerele naturale care, adunate cu suma cifrelor lor, dau rezultatul 78912.

2.P.12 Determinați numerele naturale care se micșorează cu 2017 atunci când le ștergem ultimele două cifre.

OJM 2017

2.P.13 Aflați numerele naturale de două cifre care se măresc de șapte ori atunci când li se adaugă o cifră (ordinea cifrelor inițiale nu se schimbă).

2.P.14 Pe un raft sunt 11 pungi cu câte 5 bomboane. 10 dintre pungi conțin bomboane care cântăresc 10 g fiecare, iar bomboanele din cea de a unsprezecea pungă sunt mai ușoare cu 1 g. Folosind un cântar cu afișaj, dorim să determinăm, din cel mult două cântăriri, care este punga cu bomboane mai ușoare. Cum putem proceda?

2.P.15 La un turneu de fotbal în sală participă patru echipe. Se acordă 2 puncte pentru o victorie, 1 punct pentru un meci egal și 0 puncte pentru o înfrângere. Oricare două echipe joacă între ele un singur meci. În clasamentul final nu există echipe cu același număr de puncte. Care este numărul minim de puncte pe care îl poate avea echipa câștigătoare?

2.P.16 Pe o masă sunt 31 de cartonașe, pe care sunt scrise numerele 1, 2, 3, …, 31. Alex și Bogdan își aleg câte 15 cartonașe și observă că suma numerelor de pe cartonașele lui Alex este triplul sumei numerelor de pe cartonașele lui Bogdan. Aflați numărul scris pe cartonașul rămas pe masă.

OJM 2016

2.P.17 Împărțiți numerele naturale de la 1 la 32 în două grupe, ambele având același număr de numere și aceeași sumă a numerelor.

2.P.18 Șapte numere naturale cu suma 18 sunt așezate pe un cerc. Arătați că există două numere vecine pe cerc cu suma cel puțin egală cu 6.

2.P.19 Constantin are 144 de bile, pe care le distribuie în patru cutii, respectând următoarele reguli:
i numărul bilelor din prima cutie diferă cu 4 de numărul bilelor din a doua cutie;
ii numărul bilelor din a doua cutie diferă cu 3 de numărul bilelor din a treia cutie;
iii numărul bilelor din a treia cutie diferă cu 2 de numărul bilelor din a patra cutie;
iv în prima cutie se află cele mai multe bile.
Care este numărul maxim de bile pe care Constantin le poate pune în a doua cutie?

2.P.20 Adunând două câte două patru numere diferite, cinci dintre cele șase sume care se obțin sunt 5, 7, 8, 9 și 11, iar a șasea este egală tot cu una dintre aceste valori. Aflați numerele.

2.P.21 Determinați cifrele distincte nenule x, y, z, t, u și v, dacă $\overline{xyz} = 8 \cdot \overline{tuv}$.

2.P.22 Koallo este un copil care locuiește în frumosul orășel Oloko din Nigeria. Fiind pasionat de matematică, el observă că, dacă înlocuiește cu cifre distincte literele K, O, A, L și înmulțește numărul de cinci cifre corespunzător numelui orașului cu 11, obține numărul ce corespunde numelui său. Cu ce cifre trebuie înlocuite cele patru litere?

Concurs Canada

2.P.23 Reconstituiți înmulțirea alăturată, știind că literele distincte nu reprezintă, obligatoriu, cifre distincte.

$$\begin{array}{cccc|c} & a & 3 & b & \times \\ & & c & d & \\ \hline e & f & 3 & g & \\ h & i & k & & \\ \hline 2 & x & y & 3 & \end{array}$$

2.P.24 Determinați cifrele *a*, *b*, *c* și *d*, știind că $\overline{cbba}\cdot\overline{abc}=\overline{abcdba}$.

2.P.25 Reconstituiți împărțirea:

$$\begin{array}{l} * * * * * * * : * * 1 = 8 * * * * \\ * * * \\ \hline = = = * * * * \\ \quad\quad\ \ * * * * \\ \quad\quad\ \ \overline{= = = =} \end{array}$$

2.P.26 Numerele naturale *n* și 5*n* au, fiecare, număr par de cifre. Demonstrați că în scrierea lui *n* apare cifra 1.

2.P.27 Demonstrați că suma numerelor $\overline{abcde}$ și $\overline{edcba}$ are cel puțin o cifră pară.

2.P.28 Spunem că un an este *foarte par* dacă scrierea sa este de patru cifre, toate pare.
a Determinați cea mai mare distanță posibilă între doi ani foarte pari succesivi.
b Este ușor de observat că distanța minimă între doi ani foarte pari succesivi este 2. Care este a doua cea mai mică distanță posibilă între doi ani foarte pari succesivi?

Concursul Traian Lalescu, 2016

2.P.29 Numim *olimpic* un număr natural care poate fi scris ca sumă de două numere naturale distincte având aceeași sumă a cifrelor. Demonstrați că printre numerele de forma $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ de } 9}$, $n\in\mathbb{N}^*$, există o infinitate de numere olimpice și o infinitate de numere care nu sunt olimpice.

ONM 2012

2.P.30 Un număr natural *A* este scris cu *n* cifre nenule, $n\geq 1$. Numărul *B* se obține din numărul *A* prin rearanjarea cifrelor acestuia. Se știe că $A+B=1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ de } 0}$.

a Pentru $n=3$, dați exemplu de numere *A* și *B* având proprietățile din enunț.
b Arătați că *n* este număr natural impar.
c Demonstrați că în scrierea lui *A* există cel puțin o cifră egală cu 5.

OJM 2013

3. Ordinea efectuării operațiilor

Probleme rezolvate

3.R.1 Adugați paranteze astfel încât rezultatul calculului $7\cdot 3+5-3\cdot 2+8-2$ să fie, pe rând, 24, 103, respectiv 528.

Soluție. Avem: $7\cdot(3+5)-3\cdot(2+8)-2=24$, $7\cdot[3+(5-3)\cdot 2+8]-2=103$, respectiv $[7\cdot(3+5)-3]\cdot(2+8)-2=528$.

3.R.2 Stabiliți paritatea numărului $(2a+3b+5)\cdot(1+5+9+13+\cdots+101)$, unde a și b sunt două numere naturale.

Soluție. Suma din ce-a de-a doua paranteză are 26 de termeni impari, deci este un număr par. Prin urmare, produsul celor două paranteze este par, indiferent de valorile numerelor a și b.

3.R.3 Elevii unei școli au mers într-o excursie. Fiecare copil are un anumit număr (nenul) de bancnote de 10 lei: 453 de elevi au cel puțin 10 lei, 320 au cel puțin 20 de lei, 290, cel puțin 30 de lei, 164, cel puțin 40 de lei, 137, cel puțin 50 de lei, 115, cel puțin 60 de lei, 99, cel puțin 70 de lei, 81, cel puțin 80 de lei, 40, cel puțin 90 de lei, iar 25 au exact 100 de lei. Aflați ce sumă au, în total, elevii participanți la excursie.

Soluție. Numărul elevilor care au avut exact 10 lei este $453-320=133$, numărul elevilor care au avut exact 20 de lei este $320-290=30$ ș.a.m.d. Suma totală este

$$10\cdot(453-320)+20\cdot(320-290)+30\cdot(290-164)+40\cdot(164-137)+50\cdot(137-115)+$$
$$+60\cdot(115-99)+70\cdot(99-81)+80\cdot(81-40)+90\cdot(40-25)+100\cdot 25=17240 \text{ lei}.$$

3.R.4 Spunem că unui număr n i se aplică o *transformare interesantă* dacă n se înmulțește cu 2, apoi rezultatul se mărește cu 4; spunem că lui n i se aplică o *transformare deosebită* dacă n se înmulțește cu 3, apoi rezultatul se mărește cu 9; spunem că lui n i se aplică o *transformare minunată* dacă n se înmulțește cu 4, apoi rezultatul se mărește cu 16.

a Arătați că există un singur număr natural care, prin trei transformări succesive, una interesantă, una deosebită și una minunată, aplicate în această ordine, devine 2020.

b Determinați numerele naturale care, în urma a două transformări succesive diferite dintre cele trei, devin 2014.

ONM 2014

Soluție. a Trebuie determinate numerele n pentru care $4[3(2n+4)+9]+16=2020$. Obținem $n=80$.

b O transformare deosebită are drept rezultat un număr care se împarte exact la 3, iar una minunată are drept rezultat un număr care se împarte exact la 4. Numărul 2014 nu se împarte exact nici la 3, nici la 4, prin urmare ultima transformare aplicată nu poate fi decât una interesantă, aplicată numărului 1005, care se obține în urma primei transformări. Cum 1005 este impar, prima transformare nu poate fi decât una deosebită, iar numărul inițial este 332.

3.R.5 Determinați numerele naturale a și b pentru care $ab+3a+2b=15$.

Soluție. Avem $a(b+3)+2b=15$, de unde $a(b+3)+2(b+3)=15+6=21$, așadar $(a+2)(b+3)=21$. Deoarece $a+2\geq 2$ și $b+3\geq 3$, obținem cazurile:

I. $a+2=3$ și $b+3=7$, de unde rezultă că $a=1$ și $b=4$;
II. $a+2=7$ și $b+3=3$, de unde obținem soluția $a=5$ și $b=0$.

Probleme propuse

3.P.1 Știm că $a\heartsuit b=2a+3b+1$ (de exemplu, $2\heartsuit 3=2\cdot 2+3\cdot 3+1=14$).
Calculați $(5\heartsuit 4)\heartsuit 3$.

3.P.2 Determinați numerele naturale x și y pentru care

$$(1+2\cdot x\cdot y+7\cdot 5):(123-99)\cdot 5+13=23.$$

3.P.3 Adăugați paranteze în relația $1+2\cdot 3+x-4\cdot 5:6\cdot 7=8$, astfel încât egalitatea să fie adevărată pentru $x=4$.

3.P.4 Adăugați paranteze, astfel încât egalitatea $1+2:3+4:5+6:7+8:9+10=11$ să fie adevărată.

3.P.5 Folosind patru cifre de 2, operațiile aritmetice și paranteze, obțineți (pe rând) rezultatele 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6.

3.P.6 Folosind 2001 cifre de 3, operațiile aritmetice și paranteze, obțineți rezultatul 37 în cel puțin două moduri.

3.P.7 Adăugați paranteze în expresia $3\cdot 17+32:4+3$, astfel încât să obțineți:
a cel mai mic număr posibil;
b cel mai mare număr posibil.

3.P.8 Printre numerele 7353, 9674, 1942, 8741, 6496, 6431, 7896, 8286, 3764 și 5553 există un intrus: acesta nu respectă relația dintre cifre existentă pentru celelalte nouă numere. Determinați acest intrus.

3.P.9 Determinați valorile numărului natural $n\geq 3$, știind că ultima cifră a sumei $1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ este 2.

3.P.10 Calculați: $101+97+93+\ldots+5-(99+95+91+\ldots+3)$.

3.P.11 Calculați: $(1+2-3+4+5-6+7+8-9+\cdots+100+101-102):17$.

3.P.12 Calculați: $1000\cdot 998-998\cdot 996+996\cdot 994-994\cdot 992+\ldots+8\cdot 6-6\cdot 4$.

3.P.13 Considerăm egalitatea $1\square 2\square 3\square\ldots\square 101=x$, unde căsuțele pot fi completate cu unul dintre semnele „$+$“ sau „$-$“. În plus, putem folosi paranteze pentru asocierea termenilor. Decideți dacă există vreo modalitate prin care să oținem rezultatul:

a $x=2$; **b** $x=1$.

3.P.14 Calculați:

a $A=9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{100\text{ de }9}$ **b** $B=2+22+222+\ldots+\underbrace{22\ldots2}_{100\text{ de }2}$.

3.P.15 Numărul *A* are 30 de cifre, toate egale cu 3, iar numărul *B* are 90 de cifre, toate egale cu 9. Câte cifre are produsul numerelor *A* și *B*?

3.P.16 Arătați că $\left(\overline{abcd}-\overline{bcd}\right):1000+\left(\overline{bcd}-\overline{cd}\right):100+\left(\overline{cd}-d\right):10+d\geq a+b+c$, oricare ar fi cifrele *a*, *b*, *c* nenule și d cifră oarecare. Când are loc egalitatea?

3.P.17 Produsul a două numere este 432. Dacă primul dintre ele se mărește cu 18, iar al doilea se micșorează de două ori, atunci produsul rămâne neschimbat. Aflați numerele.

3.P.18 Se dau numerele *a*, *b*, *c*, astfel încât $a(b+c)=180$, $c(b+c)=720$ și $c-a=9$. Aflați $a+c$.

3.P.19 Se consideră numerele naturale *a*, *b* și *c*, astfel încât $a+2b+3c=146$ și $3a+2b+c=106$. Calculați $(2a+b)\cdot(b+2c)$.

3.P.20 Se consideră numerele naturale *a*, *b*, *c* și *d*, astfel încât $a+b=11$, $b+c=22$, iar $c+d=33$. Calculați $(2a+5b+7c+4d):(a+d)$.

3.P.21 Determinați numerele naturale *a* și *b* pentru care $ab+5a+2b=20$.

3.P.22 Aflați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$, cu proprietatea că $b\cdot\overline{ac}=c\cdot\overline{ab}+10$.

OJM 2014

3.P.23 Aflați numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab}=(a-b)\cdot\left(\overline{ba}-3\right)$.

3.P.24 Se consideră produsul $P=\overline{ab}\cdot\overline{cd}\cdot e$. Înlocuiți cele cinci litere cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, folosind fiecare cifră o singură dată, astfel încât produsul *P* să fie maxim.

3.P.25 Fie $n\geq 2$ un număr natural. Spunem că numărul natural $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ are proprietatea (P) dacă $\overline{a_1a_2\ldots a_n}=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n+a_1+a_2+\ldots+a_n$. Determinați toate numerele naturale care au proprietatea (P).

ONM 2017

4. Teorema împărțirii cu rest

- **Teorema împărțirii cu rest**

Dacă a și b sunt două numere naturale, cu $b \neq 0$, atunci *există* și sunt *unice* numerele naturale q și r, astfel încât:

$$a = b \cdot q + r \text{ și } r < b. \qquad (*)$$

Observații

1 În $(*)$, a este *deîmpărțitul*, b este *împărțitorul*, q este *câtul* împărțirii lui a la b, iar r este *restul* acestei împărțiri.

Exemplu: În egalitatea $278 = 13 \cdot 21 + 5$, câtul împărțirii lui 278 la 13 este 21, iar restul acestei împărțiri este 5. De asemenea, câtul împărțirii lui 278 la 21 este numărul 13, restul acestei împărțiri fiind tot 5.

2 În $(*)$ este foarte importantă inegalitatea $r < b$, care spune că *restul unei împărțiri este întotdeauna strict mai mic decât împărțitorul*. Cu alte cuvinte, restul r din $(*)$ poate fi unul dintre numerele naturale 0, 1, …, $b-1$.

3 Uneori putem folosi în probleme faptul că restul și câtul unei împărțiri sunt unice. De exemplu, în egalitatea $x = 17y + 6$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$, deoarece $6 < 17$, rezultă că restul împărțirii lui x la 17 este egal cu 6, iar câtul împărțirii este y.
Nu putem spune că restul împărțirii lui x la y este egal cu 6, fiindcă nu știm dacă avem $6 < y$ sau $6 \geq y$.

Probleme rezolvate

4.R.1 Aflați numărul natural n cu proprietatea că suma cifrelor sale este egală cu 6, iar câtul împărțirii sale la 8 este 252.

Soluție. Folosind teorema împărțirii cu rest, obținem $n = 8 \cdot 252 + r$, cu $r \in \mathbb{N}$, $r \leq 7$. Înlocuind r cu cifrele de la 0 la 7, deducem că singura valoare convenabilă este $r = 6$, pentru care $n = 2022$.

4.R.2 Aflați numărul $\overline{abc}$ care îndeplinește simultan condițiile:
i numărul împărțit la suma cifrelor sale dă câtul 52 și restul 3;
ii cifra sutelor este suma celorlalte cifre;
iii dacă schimbăm între ele cifra sutelor cu cifra zecilor, obținem un număr cu 450 mai mic decât numărul inițial.

Soluție. Folosind teorema împărțirii cu rest, deducem că $\overline{abc} = (a+b+c) \cdot 52 + 3$.
Înlocuind $b + c$ cu a în egalitatea precedentă, rezultă $100a + 10b + c = 104a + 3$, deci $10b + c = 4a + 3$.
Apoi, $10b + c = 4(b+c) + 3$, de unde deducem că $6b = 3c + 3$, așadar $c = 2b - 1$.

Din condiția a treia rezultă $\overline{abc}-\overline{bac}=450$, deci $\overline{ab}-\overline{ba}=45$, adică $9(a-b)=45$. Așadar $a-b=5$, deci $c=5$. Apoi, $b=(c+1):2=3$, iar $a=b+c=8$.
Numărul căutat este 835.

4.R.3 Cele două cifre care alcătuiesc vârsta bunicului reprezintă vârstele celor doi nepoți ai acestuia. Dacă împărțim vârsta bunicului la diferența dintre vârstele nepoților săi, obținem câtul 14 și restul 2. Aflați vârsta bunicului și vârstele nepoților.

Soluție. Fie $\overline{ab}$ vârsta bunicului și *a*, *b*, vârstele celor doi nepoți. Avem situațiile:
I. $\overline{ab}=(a-b)\cdot 14+2$. Obținem $10a+b=14a-14b+2$ și apoi $15b=4a+2$.
Cum membrul drept al ultimei egalități este un număr par, rezultă că *b* este par. Dar $a\le 9$, deci $15b=4a+2\le 38$, așadar $b\le 2$. Dându-i valori lui *b* în ultima egalitate, deducem că singura soluție este $b=2$ și $a=7$.
II. $\overline{ab}=(b-a)\cdot 14+2$. Obținem $10a+b=14b-14a+2$ și apoi $24a-2=13b$.
Cum membrul stâng al ultimei egalități este un număr par, rezultă că *b* este par. Înlocuindu-l pe *b* cu 0, 2, 4, 6 sau 8 în ultima egalitate, nu obținem nicio soluție.
Bunicul are 72 de ani, iar nepoții au 7 și, respectiv 2 ani.

4.R.4 Fie $n\in\mathbb{N}$ și șirul de numere naturale $n+1, n+2, \ldots, n+3001$.
a Arătați că, pentru $n=1500$, suma numerelor din șir este pătratul unui număr natural.
b Determinați valorile posibile ale sumei resturilor obținute prin împărțirea la 3 a tuturor numerelor din șirul dat.

Soluție. a Suma numerelor din șir este egală cu $3001n+3001\cdot 1501=3001(n+1501)$.
Pentru $n=1500$, suma acestor numere este egală cu 3001^2.
b Dacă $n=3k$, cu $k\in\mathbb{N}$, atunci suma resturilor obținute prin împărțirea la 3 a numerelor din șir este:

$$S=\underbrace{(1+2+0)+(1+2+0)+\ldots+(1+2+0)}_{1000\text{ grupe}}+1=3001.$$

Dacă $n=3k+1$, cu $k\in\mathbb{N}$, atunci suma resturilor obținute prin împărțirea la 3 a numerelor din șir este:

$$S=\underbrace{(2+0+1)+(2+0+1)+\ldots+(2+0+1)}_{1000\text{ grupe}}+2=3002.$$

Dacă $n=3k+2$, cu $k\in\mathbb{N}$, atunci suma resturilor obținute prin împărțirea la 3 a numerelor din șir este:

$$S=\underbrace{(0+1+2)+(0+1+2)+\ldots+(0+1+2)}_{1000\text{ grupe}}+0=3000.$$

4.R.5 Fie numerele 1, 2, …, 2030. Cu ajutorul acestor numere, formăm toate tripletele de numere consecutive posibile. Pentru un astfel de triplet, $T=(a, a+1, a+2)$, notăm cu $r(T)$ produsul resturilor obținute prin împărțirea la 4 a numerelor $a, a+1, a+2$.

a Care este valoarea maximă a lui $r(T)$? Dar cea minimă?

b Se pot forma 508 triplete de numere consecutive, $T_1, T_2, \ldots, T_{508}$, astfel încât toate numerele alese în aceste triplete să fie diferite și $r(T_1)+r(T_2)+\ldots+r(T_{508})=3048$?

Soluție. a Valoarea maximă a lui $r(T)$ este egală cu 6 și se obține, de exemplu, pentru numerele 1, 2 și 3. Valoarea minimă a lui $r(T)$ este egală cu 0 și se obține, de exemplu pentru numerele 2, 3 și 4.

b Pentru orice triplet T de numere ca în enunț, avem $r(T) \leq 6$, iar $3048 = 6 \cdot 508$, deci pentru ca egalitatea $r(T_1)+r(T_2)+\ldots+r(T_{508})=3048$ să aibă loc, trebuie să avem $r(T_1)=r(T_2)=\ldots=r(T_{508})=6$.

Pentru tripletul $T=(a, a+1, a+2)$, obținem $r(T)=6$ dacă și numai dacă $a+2=4k+3$, cu $k \in \mathbb{N}$. Așadar, ar trebui ca printre numerele 1, 2, …, 2030 să avem 508 numere care să dea restul 3 prin împărțirea la 4. Dar $2027 = 4 \cdot 506 + 3$ este cel mai mare număr de acest tip, dintre cele din enunț. În consecință, printre numerele 1, 2, …, 2030 există doar 507 numere care dau restul 3 prin împărțirea la 4.

În concluzie, răspunsul la întrebare este negativ.

Probleme propuse

4.P.1 Câte numere de trei cifre dau restul 5 prin împărțirea la 17?

4.P.2 Aflați suma resturilor care se obțin prin împărțirea la 5 a patru numere naturale consecutive. Câte rezultate diferite există?

4.P.3 Împărțind un număr la 84 obținem restul 33. Ce rest obținem atunci când împărțim numărul la 21?

4.P.4 Câte numere naturale pare dau, prin împărțirea la 1024, câtul egal cu restul? Aflați restul împărțirii sumei tuturor acestor numere la 5110.

4.P.5 a Aflați restul împărțirii numărului $1+2+\ldots+100$ la 4.

b Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că numărul $1+2+\ldots+n$ se împarte exact la 4 dacă și numai dacă restul împărțirii lui n la 8 este egal cu 0 sau 7.

4.P.6 Determinați toate numerele de forma $\overline{ab}$ astfel încât $\overline{ab}+\overline{ba}$ este un număr de trei cifre care dă restul 1 prin împărțirea la 5.

4.P.7 Aflați numerele de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 6 și restul $\overline{bc}-2$.

4.P.8 Fie numerele naturale nenule a, b și c. Împărțindu-l pe a la b obținem câtul 5 și restul 3, iar împărțindu-l pe b la c obținem câtul 7 și restul 5.

a Arătați că $a \geq 238$.

b Determinați numerele, știind că $a+b+c=506$.

4.P.9 Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim numărul $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (se citește „*n* factorial“).
a Calculați $1!$, $2!$, $3!$ și $4!$.
b Aflați câtul și restul împărțirii numărului $101! - 1$ la 2020.

4.P.10 a Arătați că numărul 11111111 se împarte exact la 73.
b Aflați restul împărțirii numărului $\underbrace{55\ldots5}_{100 \text{ de } 5}$ la 73.

4.P.11 Găsiți 12 numere care dau restul 1 prin împărțirea la 6 și a căror sumă este 520.

4.P.12 Maria scrie pe un rând 7 numere naturale consecutive. Sub fiecare dintre aceste numere, fata scrie restul împărțirii respectivului număr la 6. Pe rândul al treilea, Maria scrie toate tripletele formate din resturile de pe rândul al doilea, aflate pe locuri consecutive. Apoi, pe al patrulea rând, ea adună resturile din fiecare triplet. Astfel, obține numerele 9, 6, 3, 6 și 9. Aflați restul împărțirii sumei numerelor inițiale la 6.

4.P.13 Fie numerele naturale nenule a și b. Arătați că dacă restul împărțirii lui a la b este câtul împărțirii lui b la a, iar restul împărțirii lui b la a este câtul împărțirii lui a la b, atunci unul dintre numere este pătratul celuilalt.

4.P.14 Fie numerele naturale x, y și z, astfel încât $3x + 1 = 5y + 4z$. Aflați restul împărțirii la 5 a numerelor $3x + z$ și $x + 2z$.

4.P.15 Fie n un număr natural. Aflați restul împărțirii lui $n + 13$ la 23, dacă suma resturilor împărțirii lui n și $n + 3$ la 23 este egală cu 22.

4.P.16 Numărul natural a dă restul 2 la împărțirea cu 7 și restul 1 la împărțirea cu 3. Ce rest dă prin împărțirea la 21?

4.P.17 Aflați numerele de 3 cifre care împărțite la 7 dau restul 6 și împărțite la 15 dau restul 3.

4.P.18 Numărul $n = \overline{abcd}$ se numește *năzdrăvan*, dacă $\overline{cd} = \overline{ab} + 4$. Aflați toate numerele năzdrăvane cu proprietatea că suma cifrelor fiecăruia se împarte exact la 5.

4.P.19 Numerele naturale $d, d + 1$ și $d + 2$ se împart pe rând la numărul natural de două cifre a. Dacă suma celor trei resturi obținute este 101, aflați restul împărțirii lui d la 52.

Concursul Jose Marti, 2011

4.P.20 Suma a 10 numere naturale diferite este 246. Împărțind fiecare dintre cele 10 numere la numărul natural nenul n, se obțin resturi egale cu 2 sau cu 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 24.
a Câte resturi sunt egale cu 2?
b Aflați cel mai mic număr n care are proprietățile din enunț.

4.P.21 Numărul natural x este cuprins între 25 și 120 și dă resturi nenule prin împărțirea la 10, 11, 12, respectiv 13, cel puțin două dintre resturi fiind egale. Dacă suma acestor patru resturi este un număr mai mic sau egal cu 15, aflați numărul x.

4.P.22 La ora de matematică, fiecare dintre cei 25 de elevi ai clasei a V-a primește câte un cartonaș pe care este scris un număr natural nenul. Fiecare elev împarte numărul de pe cartonaș la 24 și comunică profesorului restul obținut la împărțire. Suma resturilor obținute este 288. Daniel constată că resturile obținute de colegii săi sunt diferite două câte două, iar câtul și restul obținute de el sunt egale.
a Ce număr este scris pe cartonașul lui Daniel?
b Aflați suma numerelor scrise pe cele 25 de cartonașe, știind că fiecare elev, în afara lui Daniel, a obținut câtul cu 1 mai mare decât restul.

OJM 2019

4.P.23 Avem la dispoziție un număr nelimitat de bile. Pe fiecare dintre ele este scris unul dintre numerele 5, 11 sau 13, astfel încât oricare dintre aceste numere să apară pe o infinitate de bile. Spunem că un număr natural n este *util* dacă există câteva dintre aceste bile, astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egală cu n. Arătați că:
a numărul 19 nu este util
b numerele 21, 22, 23, 24 și 25 sunt utile
c orice număr natural mai mare sau egal cu 21 este util.

4.P.24 Toate numerele de la 1 la 100 se scriu pe un singur rând orizontal. Pe rândul următor se scriu, sub fiecare număr, începând cu al doilea, resturile împărțirii la 3 ale sumei dintre numărul respectiv și cel din stânga lui, ca în exemplul de mai jos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	......
	0	2	1	0	2	1	0	2	1	......
		2	0	1	2	0	1	2	0	......
			2	1	0	2	1	0	2	......

....

(De exemplu, primul 1 din stânga, de pe rândul al doilea, este restul împărțirii numărului $3+4=7$ la 3.)
Se continuă procedeul, până când, pe rândul 100, rămâne un singur număr.
a Calculați suma numerelor de pe rândul al doilea.
b Calculați suma numerelor de rândul cu numărul 51.
c Ce număr rămâne pe rândul 100?

4.P.25 Maria aruncă de 6 ori o pereche de zaruri și face suma tuturor numerelor apărute în cele 6 aruncări. La fiecare aruncare, Gabi scrie pe hârtie restul împărțirii la 6 a sumei numerelor apărute pe zaruri, iar la final adună aceste resturi. Aflați ce sumă poate obține Maria, în fiecare dintre situațiile:
a Gabi a obținut suma 1;
b niciunul dintre resturile scrise pe hârtie de Gabi nu este egal cu 0, iar suma obținută de el este egală cu 8.