Adriana Romanov Cristian Romanov Daniel Tocoian Flavius Milaş Florica Milaş
Liliana Batki Maria Both Ovidiu Batki Simona Tocoian Sofia Mladin
Iliana Dumitrescu Gabriel Vrînceanu

6 Lecția de MATEMATICĂ

- Teorie
- Aplicații

COLECȚIA ELEVUL DEȘTEPT

LITERA Educațional

Lecția de matematică. Clasa a VI-a
Teorie și aplicații

LITERA®
Editura Litera
O.P. 53; C.P. 212, sector 4, București, România
tel.: 021 319 63 90; 031 425 16 19; 0752 548 372
e-mail: comenzi@litera.ro

Ne puteți vizita pe

www.litera.ro

Editor: Vidrașcu și fiii
Redactor: Gabriela Niță
Corector: Carmen Bîtlan
Figuri geometrice și grafice: Banu Gheorghe
Copertă: Vlad Panfilov
Tehnoredactare: Banu Gheorghe
Coordonator departament educațional: Gabriela Niță

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Cuprins

Teste și aplicații

Reguli de calcul cu puteri

➢ **Deducerea** unor reguli de calcul cu puteri și a unor proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale, în exerciții și probleme.

Noțiuni-cheie: pătrate și cuburi de numere naturale, operații cu numere naturale, șiruri de numere, ridicarea la putere cu exponent număr natural, operații cu puteri, succesor, ecuație.

Acțiuni-cheie: operații cu puteri, identificarea unei reguli într-un șir de numere, compararea puterilor, citirea unui tabel, rezolvarea unei ecuații, analizarea unor situații practice cu ajutorul puterilor.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

Exemplu: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Breviar teoretic

Reguli de calcul cu puteri

Pentru regulile următoare, a și b cu puterile ^{m} și ^{n} nu pot fi simultan egale cu zero, pentru că 0^0 este operație fără sens.

	Exemple:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^4 \cdot 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11}$
$a^m : a^n = a^{m-n}, m \geq n$	$3^9 : 3^5 = 3^{9-5} = 3^4$
$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(5^3\right)^6 = 5^{3\times 6} = 5^{18}$
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$4^3 \cdot 7^3 = (4 \cdot 7)^3 = 28^3$
$a^m : b^m = (a : b)^m$	$12^5 : 4^5 = (12 : 4)^5 = 3^5$
$a^0 = 1$, dacă $a \neq 0$	$7^0 = 1$

Știați că...

➢ Ridicarea la putere este …

– o înmulțire repetată ***Exemplu:*** $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

– o operație de ordinul III

Într-un exercițiu cu mai multe operații, se efectuează întâi operațiile de ordinul III, apoi cele de ordinul II și I.

Exemplul 1: fără paranteze

$$2 + 3 \times \underbrace{5^2}_{\text{III}} = 2 + \underbrace{3 \times 25}_{\text{II}} = \underbrace{2 + 75}_{\text{I}} = 77$$

Exemplul 2: cu paranteze

$$7 \times 3 + \left(50 : 5 - \underbrace{3^2}_{\text{III}}\right) = 7 \times \left(\underbrace{50 : 5}_{\text{II}} - 9\right) = 7 \times \left(\underbrace{10 - 9}_{\text{I}}\right) = \underline{7 \times 1} = 7$$

➢ Pentru a calcula a^{m^n} – întâi se ridică m^n, apoi a la numărul obținut (m^n)

Exemplu: $5^{2^3} = 5^8$

➢ De când oamenii au învățat să utilizeze notarea puterilor cu exponenți, cel mai mare număr care se poate exprima cu trei cifre nu mai este 999 ci 9^{9^9}.

TEST – Reguli de calcul cu puteri

Subiectul I. Scrieți doar rezultatul final. (30 p.)

5p **1.** Calculați $2016^0 - 1^{2016} + 2^3 =$

5p **2.** Fie șirul de numere naturale 1, 2, 4, 8, 16, ... Numărul care urmează în șirul dat este ...

5p **3.** Pătratul numărului 7 este ... .

5p **4.** Calculați $2^5 \cdot 2^6 : 2^{10} = \dots$.

5p **5.** Cel mai mare dintre numerele 5^2 și 3^3 este ... .

5p **6.** În tabelul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute de elevi la un test.

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	2^0	2^1	2^2	2^3	2^3	2^2	2^1	2^0

Care este numărul de elevi care au obținut nota 7?

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (30 p.)

5p **1.** Calculați $2^6 : 4^3 + \left(3^5\right)^0 - 0^{2016} =$

2. Precizați care număr este mai mare:

5p **a)** 3^{40} sau 9^{20};

5p **b)** 3^{33} sau 5^{22}.

3. Aflați, în fiecare din următoarele cazuri, numărul natural care îndeplinește condiția dată:

5p **a)** care este pătratul numărului 17.

5p **b)** succesorul său are cubul 27.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $5^{x+1} = 125$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (30 p.)

1. Se dă tabla din figura alăturată. Pe toate cele 9 pătrate numerotate de la 1 la 9 trebuie să așezăm un număr de cartonașe respectând următoarea regulă: un cartonaș pe primul pătrat, 2 cartonașe pe al II-lea pătrat, ș.a.m.d. astfel încât pe fiecare pătrat să existe dublul numărului de cartonașe de pe pătratul anterior.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5p **a)** Arătați că pe pătratul 4 sunt 16 cartonașe.

5p **b)** Aflați câte cartonașe sunt pe pătratul cu numărul 8.

5p **c)** Aflați câte cartonașe sunt în total pe tablă.

2. Maria și Mihai joacă un joc cu pătrate folosind următoarea regulă: Maria așază un pătrat pe masă, Mihai așază un număr de pătrate identice cu cel inițial în jurul pătratului Mariei astfel încât să obțină un pătrat cu latura de 2 ori mai mare decât pătratul inițial, apoi Maria așază pătrate identice cu cel inițial în jurul pătratului format de Mihai astfel încât pătratul obținut să aibă latura de 3 ori mai mare decât pătratul inițial ș.a.m.d.

Știind că jocul are 100 de pătrate, aflați:

5p **a)** Câte pătrate așază Mihai la primul pas?

5p **b)** Cine a așezat ultimul, dacă pe masă sunt 25 de pătrate?

5p **c)** Câte runde s-au jucat, dacă s-au așezat toate cartonașele? Cine încheie jocul?

Criterii de divizibilitate

➢ **Identificarea** în exemple, în exerciții sau în probleme a noțiunilor: divizor, multiplu, numere prime, numere compuse, c.m.m.d.c., c.m.m.m.c.

➢ **Exprimarea** unor caracteristici ale relației de divizibilitate în mulțimea numerelor naturale, în exerciții şi probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea.

➢ **Transpunerea** unei situații-problemă în limbajul divizibilității în mulțimea numerelor naturale, rezolvarea problemei obținute şi interpretarea rezultatului.

Noțiuni-cheie: divizor, multiplu, criterii de divizibilitate, număr scris în baza zece, fracții.

Acțiuni-cheie: utilizarea criteriilor de divizibilitate, identificarea divizorilor şi multiplilor unui număr, interpretarea unui tabel, analizarea unor situații practice cu ajutorul divizibilității, scrierea unui număr în baza 10, verificarea unor proprietăți.

Breviar teoretic

Definiție: Un număr natural a este divizibil cu un număr natural nenul b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Notație: $a \vdots b$ se citeşte: „a se divide cu b" sau „a divizibil cu b"

$b \mid a$ se citeşte: „b divide pe a"

Exemplu: 12 este divizibil cu 3 pentru că există numărul natural 4 astfel încât $12 = 3 \cdot 4$.

Observație: Dacă a este divizibil cu b, atunci spunem că b este un divizor al lui a sau că a este un multiplu al lui b.

Exemplu: Dacă 12 este divizibil cu 3, atunci spunem că 3 este un divizor al lui 12 sau că 12 este un multiplu al lui 3.

Mulțimea divizorilor naturali ai unui număr natural nenul n se notează cu D_n şi este o mulțime finită.

Mulțimea multiplilor naturali ai unui număr natural nenul n se notează cu M_n şi este o mulțime infinită.

Știați că...

➢ Dacă un număr este par (ultima cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8), atunci el este divizibil cu 2.

➢ Un număr natural este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale se divide cu 3.

Exemplu: $12345 \vdots 3$ deoarece $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, iar 3 divide 15.

➢ Un număr natural este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale se divide cu 9: 9/135; $1 + 3 + 5 = 9$.

➢ Un număr natural este divizibil cu 5 dacă cifra unităților este 0 sau 5. Exemple: 2890; 135.

➢ Un număr natural este divizibil cu 10 dacă cifra unintăților este 0. Exemple: 140; 109 200.

➢ Un număr natural este divizibil cu 4 dacă numărul format din ultimele două cifre ale numărului este divizibil cu 4.

➢ Anii bisecți sunt divizibili cu 4.

➢ Sistemul zecimal de numerație, numit şi sistem pozițional zecimal, a fost inventat de indieni (hindu, India) şi preluat de europeni datorită arabilor. Introducerea cifrei zero reprezintă una din marile descoperiri ale indienilor (hindu, India, 800 î.Hr.).

➢ Soarele există de aproximativ 10 000 000 000 000 de ani (10^{12} = 10 bilioane).

TEST – Criterii de divizibilitate

Subiectul I. Scrieţi doar rezultatul final. (30 p.)

5p **1.** Dintre numerele 551 şi 270, divizibil cu 5 este ... .

5p **2.** Precizaţi valoarea lui x ştiind că numărul $\overline{35x}$ este cel mai mare număr divizibil cu 2.

5p **3.** Divizorii naturali ai lui 18 sunt ... .

5p **4.** Cel mai mic multiplu de ordinul zecilor al lui 3 este ... .

5p **5.** Multiplii nenuli ai lui 4, mai mici decât 21, sunt ... .

5p **6.** În tabelul de mai jos sunt date numerele 2, 3, 5, 9 şi 10 şi numărul de multipli nenuli cel mult egali cu 100 ai fiecăruia.

Numărul	2	3	5	9	10
Nr. de multipli	50	33	20	11	10

Câţi multipli cel mult egali cu 100 are 3?

Subiectul al II-lea. Scrieţi rezolvările complete. (30 p.)

5p **1.** Dintre numerele 531, 412 şi 414, divizibil cu 2 şi cu 3 este numărul ... .

5p **2.** Determinaţi valorile naturale ale lui x, pentru care $2x - 3$ este un divizor natural al lui 24.

5p **3.** Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{2x7}$ divizibile cu 3.

5p **4.** Determinaţi valorile naturale ale lui x astfel încât fracţia $\frac{\overline{1x8}}{9}$ să fie ireductibilă.

5p **5.** Ionuţ are 25 de mere, 15 pere şi 30 de portocale. Poate să le împartă în mod egal la cinci prieteni, astfel încât fiecare să aibă un număr egal din fiecare fruct. Justificaţi răspunsul dat precizând câte fructe din fiecare fel primeşte fiecare copil.

5p **6.** Determinaţi toate numerele naturale de trei cifre divizibile cu 2, care se pot forma cu cifrele 7, 0 şi 4.

Subiectul al III-lea. Scrieţi rezolvările complete. (30 p.)

1. Fie un număr de forma $A = \overline{x(x+2)(x+4)}$, unde x, $(x + 2)$, $(x + 4)$ sunt cifre.

5p **a)** Verificaţi dacă numărul 357 este un număr de forma numărului A.

5p **b)** Determinaţi valoarea maximă a lui x pentru care $x + 4$ poate fi o cifră.

5p **c)** Determinaţi toate numerele de forma A divizibile cu 3.

2. Fie numerele naturale de forma $\overline{abba} \vdots 9$, astfel încât $\overline{ba} \vdots 2$.

5p **a)** Verificaţi dacă numărul 2772 verifică condiţiile problemei.

5p **b)** Precizaţi dacă un număr natural care verifică condiţiile problemei poate fi divizibil cu 5, argumentând răspunsul.

5p **c)** Determinaţi toate numerele care îndeplinesc condiţiile din enunţ.

Numere prime. Numere compuse

➢ **Identificarea** în exemple, în exerciții sau în probleme a noțiunilor: divizor, multiplu, numere prime, numere compuse, c.m.m.d.c., c.m.m.m.c.

➢ **Exprimarea** unor caracteristici ale relației de divizibilitate în mulțimea numerelor naturale, în exerciții și probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea.

➢ **Transpunerea** unei situații-problemă în limbajul divizibilității în mulțimea numerelor naturale, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului.

Noțiuni-cheie: divizor, divizor propriu, divizor impropriu, număr prim, număr compus.

Acțiuni-cheie: scrierea divizorilor unui număr natural, recunoașterea divizorilor proprii și improprii, recunoașterea numerelor prime și a numerelor compuse.

Breviar teoretic

Observație: Orice număr natural nenul are ca divizori naturali pe 1 și pe el însuși. Acești divizori se numesc divizori improprii, iar toți ceilalți divizori ai numărului se numesc divizori proprii.

Exemplu: Divizorii naturali ai lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 12

1 și **12** sunt divizori improprii

2, **3**, **4**, **6** sunt divizori proprii

Definiție: Un număr natural diferit de 1, care are doar divizori improprii, se numește **număr prim**.

Exemplu: Numere prime: 2, 3, 5, 7, 11, 13, …

Definiție: Un număr natural nenul care are divizori proprii se numește **număr compus**.

Observație: Singurul număr par și prim este 2.

Știați că…

➢ Pentru a afla dacă un număr este prim, împărțim numărul, pe rând, la toate numerele prime, în ordine crescătoare, începând cu 2, până când obținem un cât mai mic sau egal cu împărțitorul. Dacă numărul se divide cu unul dintre aceste numere prime, este evident că el nu este prim. Dacă numărul considerat nu se divide cu niciunul dintre aceste numere prime, atunci el este număr prim.

➢ Cel mai mic număr prim este 2. În afară de 2, toate numerele prime sunt numere impare (3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...).

➢ Unul dintre cele mai mari numere prime descoperite până acum este $2^{74\,207\,281} - 1$ și a fost descoperit în ianuarie 2016, de un computer de la o universitate din Missouri. Acest număr prim are cu 5 milioane de cifre mai mult decât precedentul număr prim.

➢ Încă din anul 300 î.Hr., Euclid a demonstrat că există o infinitate de numere prime.