PETRE NĂCHILĂ

GEOMETRIE
PENTRU TOȚI

CLASA a VIII-a

Editura NOMINA

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele şcolare în vigoare.

Editor: Alexandru Creangă
Imagine copertă: Mădălina Baracu

Pentru comenzi prin poştă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	Zona
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj şi Mehedinţi), Banat şi Transilvania (Alba şi Hunedoara);
0748.111.247	Crişana şi Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureş, Harghita şi Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea şi Olt), Transilvania (Braşov şi Sibiu) şi Muntenia (Argeş, Teleorman şi Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistriţa-Năsăud) şi zona Maramureş;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamţ, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iaşi, Botoşani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmboviţa, Prahova, Brăila, Ialomiţa şi Călăraşi), Dobrogea şi jud. Galaţi;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	Bucureşti

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeş
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro
www.librarianomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NĂCHILĂ, PETRE
Geometrie pentru toţi : clasa a VIII-a / Petre Năchilă. - Piteşti : Nomina, 2021
ISBN 978-606-535-854-6

51

CUPRINS

Capitolul 1
PUNCTE, DREPTE, PLANE

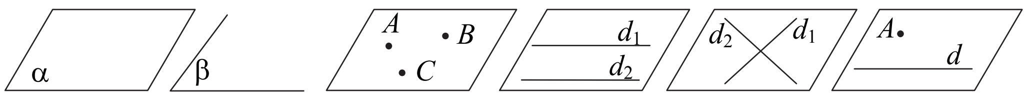
1.1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei. Determinarea planului

Noțiunile elementare ale geometriei în spațiu sunt: punctul, dreapta, planul, spațiul, distanța şi măsura unghiurilor. În geometria plană există un singur plan, iar în geometria în spațiu există mai multe plane. Spațiul se notează cu S.

Punctul este pus în evidență prin reprezentările şi/sau notațiile:

Dreapta este pusă în evidență prin reprezentările şi/sau notațiile:

Planul este pus în evidență prin reprezentările şi/sau notațiile:



planul α planul β planul (ABC) planul (d_1d_2) planul (d_1d_2) planul (dA)

AXIOMELE DE INCIDENȚĂ în geometria în spațiu sunt următoarele:

1. Spațiul este o mulțime de puncte.

2. Dreptele şi planele sunt submulțimi ale spațiului (notăm $d \subset S$, $\alpha \subset S$).

3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare. Există patru puncte care nu aparțin aceluiaşi plan.

4. Prin orice două puncte distincte (A şi B) trece o singură dreaptă (AB).

5. Orice trei puncte necoliniare (A, B, C) determină un plan unic (ABC).

6. Dacă două plane diferite au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă.

TEOREMA 1. Dacă o dreaptă are două puncte distincte situate într-un plan, atunci dreapta este conținută în plan.

TEOREMA 2. O dreaptă d şi un punct $A \notin d$ determină un singur plan (notat (dA) sau (Ad)).

TEOREMA 3. Două drepte distincte d şi d' cu un singur punct comun determină un plan unic (notat (dd')).

TEOREMA 4. Două drepte paralele d şi d' determină un plan unic (notat (dd')).

Observaţii. 1. Spațiul are o infinitate de puncte.

2. Printr-o dreaptă trec o infinitate de plane.

Problemă rezolvată

Se consideră o figură geometrică $\mathscr{F}$ cu proprietatea că dreapta care trece prin două puncte ale figurii este conținută în figură. Demonstrați că figura geometrică este o dreaptă sau este un plan sau este tot spațiul.

Soluție. Figura $\mathscr{F}$ conține cel puțin două puncte distincte A, B şi deci şi dreapta AB. Dacă $\mathscr{F} \subset AB$, problema este demonstrată. Fie atunci un punct $C \in \mathscr{F} - AB$. Atunci tot planul $(ABC) \subset \mathscr{F}$. Dacă $\mathscr{F} \subset (ABC)$, problema este demonstrată. Dacă există $D \in$ $\in \mathscr{F} - (ABC)$, fie un punct E situat în partea planului (ABC) care nu conține pe D. Avem $DE \cap (ABC) = \{N\}$ şi deci $DE \subset \mathscr{F}$. Analog $\mathscr{F}$ conține şi orice punct G situat de aceeaşi parte a planului (ABC) cu D şi deci figura conține orice punct al spațiului.

Probleme propuse

*

1. Justificați de ce medianele, bisectoarele, înălțimile şi mediatoarele triunghiului ABC se află conținute în planul (ABC).

2. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctul $N \notin (ABC) = \alpha$. Determinați:

a) $(ACN) \cap \alpha$; b) $(BCN) \cap \alpha$; c) $(ACN) \cap (BDN)$.

3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ inclus în planul α şi punctul $N \notin \alpha$. Câte plane distincte pot determina punctele A, B, C, D, N?

4. Fie punctele necoplanare A, B, C şi D.

a) Scrieți câte trei drepte determinate de câte două din cele patru puncte.

b) Scrieți câte trei drepte determinate de câte două din aceste puncte care conțin punctul A.

c) Scrieți trei plane care au punctul comun B.

d) Scrieți trei drepte coplanare.

e) Scrieți trei drepte coplanare doar două câte două.

5. Determinați numărul maxim de drepte determinate de n puncte din spațiu ($n \geq 2$).

6. Determinați numărul maxim de plane determinate de n puncte din spațiu ($n \geq 3$).

7. Fiind date 5 puncte în spațiu, determinați n minim, ştiind că dacă oricare n puncte sunt coliniare, atunci toate punctele sunt coliniare.

8. Fiind date 5 puncte în spaţiu, determinaţi n minim, ştiind că dacă oricare n puncte sunt coplanare, atunci toate punctele sunt coplanare.

9. Fie punctele necoplanare M, N, P, R şi punctele $A \in [MN]$, $B \in [PR]$. Determinaţi $(APR) \cap (BNM)$.

10. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $CDEF$ situate în plane diferite. Determinaţi $(AEF) \cap$ $\cap (BDE)$.

**

11. Determinaţi numărul planelor care trec prin punctele A, B, C, dacă:

a) $AB = 26$ cm, $BC = 24$ cm, $AC = 10$ cm;
b) $AB = 13$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 21$ cm;
c) $AB = 16$ cm, $BC = 9$ cm, $AC = 24$ cm;
d) $AB = 8$ cm, $BC = 11$ cm, $AC = 20$ cm.

12. Câte plane distincte se pot forma cu punctele A, B, C, D, dacă $A \notin \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in$ $\in AB$, $C \neq B$, $D \in \alpha$, $D \neq B$?

13. Fie triunghiul ABC şi bisectoarele (AD), (BE), (CF) şi punctul $M \notin (ABC)$. Determinaţi intersecţia planelor (MAD), (MBE), (MBC).

14. Într-un plan α sunt punctele distincte A, B, C, D şi fie punctul $M \notin \alpha$. Care este numărul minim de plane determinate de aceste puncte?

15. Demonstraţi că, în figura 1, punctele R, S, T sunt coliniare.

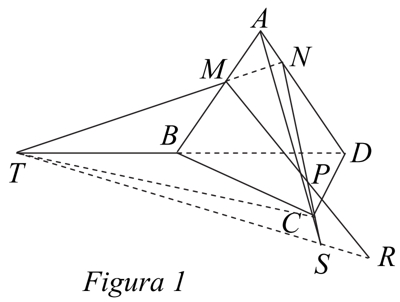


Figura 1

16. Fie punctele distincte A, B, C, D, iar E, F mijloacele segmentelor (AB) şi (CD). Demonstraţi că, dacă $BC + AD = 2EF$, atunci toate punctele sunt coplanare.

17. Fie punctele necoplanare A, B, C, D şi fie M, N, P, R mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD), (DA). Demonstraţi că planele (ABP), (BCR), (CDM), (DAM) au un punct comun.

18. Fie dreapta d care nu este conținută în planul α. Câte elemente are mulțimea $d \cap \alpha$?

19. Demonstrați că, pentru orice plan α, există cel puțin un punct nesituat în α.

20. Fie dreptele AB şi CD necoplanare. Demonstrați că AD şi BC nu sunt coplanare.

21. Demonstrați că există două drepte care nu au puncte comune.

22. Fie trei drepte din spațiu, dintre care oricare două sunt secante. Demonstrați că dreptele sunt concurente sau secante.

23. Dacă mai multe drepte care nu trec prin acelaşi punct sunt concurente două câte două, atunci sunt coplanare.

24. Demonstrați că există cel puțin două plane care conțin o dreaptă dată.

25. Fie planul (ABC) şi punctul $D \notin (ABC)$. Demonstrați că există trei triplete de puncte necoliniare şi determinați $(DAB) \cap (DAC) \cap (DBC)$.

26. Fie două plane α şi β. Demonstrați că există cel puțin o dreaptă care nu este situată în niciunul din cele două plane.

27. Demonstrați că spațiul coincide cu reuniunea tuturor dreptelor sale.

28. Demonstrați că spațiul coincide cu reuniunea tuturor planelor sale.

29. Se dau două drepte oarecare în spațiu şi un punct nesituat pe ele. Demonstrați că există o dreaptă unică ce trece prin punctul dat şi intersectează două drepte.

30. Se dau trei drepte oarecare în spațiu. Demonstrați că există o infinitate de drepte care intersectează simultan cele trei drepte.

31. Fie punctele necoliniare A, B, C şi dreapta d care nu conține aceste puncte. Demonstrați că planele (Ad), (Bd), (Cd) taie planul (ABC) după trei drepte concurente.

32. Fie punctele necoplanare A, B, C, D, iar E, F mijloacele segmentelor (AB) şi (CD). Demonstrați că $AC + BD > 2EF$.

33. Fie punctele necoliniare A, B, C şi punctul $O \notin (ABC)$. Fie punctele $A' \in OA$, $B' \in$ $\in OB$, $C' \in OC$ diferite de O, A, B, C şi fie $BC \cap B'C' = \{A_1\}$, $AC \cap A'C' = \{B_1\}$, $AB \cap A'B' = \{C_1\}$. Demonstrați că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare (**teorema lui Deasargues**).

1.2. Piramida

Definiţie. Dacă $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 3$) este un poligon convex inclus în planul α, iar punctul $V \notin \alpha$, atunci reuniunea tuturor segmentelor $[VM]$, unde M aparține suprafeței poligonale $S = [A_1A_2\ldots A_n]$ se numeşte **piramidă** de vârf V şi baza S.

Denumiri:

- segmentele $[VA_i]$, $i = \overline{1, n}$, se numesc **muchiile laterale** ale piramidei;
- punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se numesc **vârfurile bazei** piramidei;
- $[VA_1A_2]$, $[VA_2A_3]$, …, $[VA_nA_1]$ se numesc **fețele laterale**;
- distanța de la V la planul α se numeşte **înălțimea** piramidei.

Aria laterală: $A_l = A_{VA_1A_2} + A_{VA_2A_3} + \ldots + A_{VA_nA_1}$

Aria totală: $A_t = A_l + A_{A_1A_2\ldots A_n}$

În funcție de numărul muchiilor bazei, piramida se numeşte: triunghiulară ($n = 3$) (fig. 2), patrulateră ($n = 4$) (fig. 3), pentagonală ($n = 5$) (fig. 4), hexagonală ($n = 6$) (fig. 5) etc.

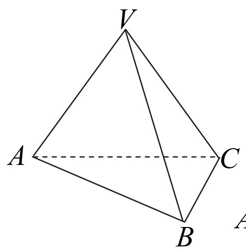


Fig. 2

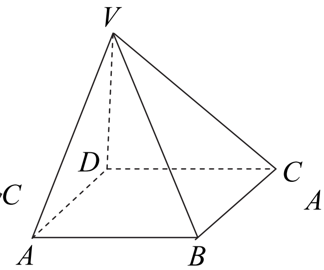


Fig. 3

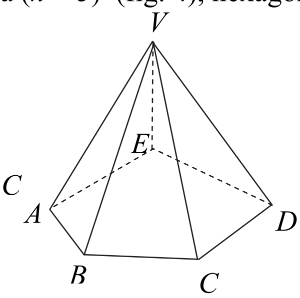


Fig. 4

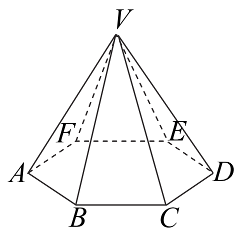


Fig. 5

Tetraedrul ($VABC$) este determinat de patru puncte necoplanare numite vârfuri. Are patru vârfuri şi patru fețe (care sunt triunghiuri). Fața pe care este aşezat se numeşte **bază**. Oricare față poate fi bază.

În figura 6 avem desfăşurarea piramidei $VABC$ (se secționează piramida după muchiile VA, VB, VC şi rabatăm fețele (VAB), (VAC), (VBC) până devin coplanare cu baza ABC). În figura 7 avem desfăşurarea tetraedrului regulat (tetraedru cu toate muchiile congruente $(AB) \equiv (BC) \equiv (CA) \equiv (VA) \equiv (VB) \equiv (CV)$, adică toate fețele sunt triunghiuri echilaterale.

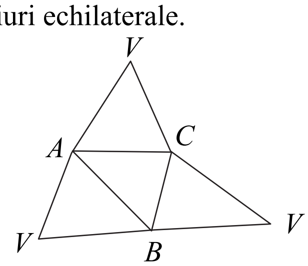


Fig. 6

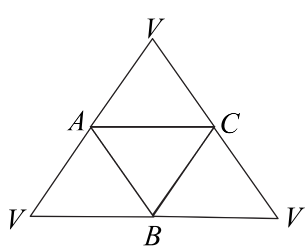


Fig. 7

Piramida regulată este piramida cu toate muchiile laterale congruente şi baza poligon regulat (fețele laterale sunt triunghiuri isoscele). Piciorul înălțimii coincide cu centrul cercului circumscris bazei. Înălțimea unei fețe laterale a unei piramide regulate se numeşte **apotema** piramidei ((VM) în figura 8.

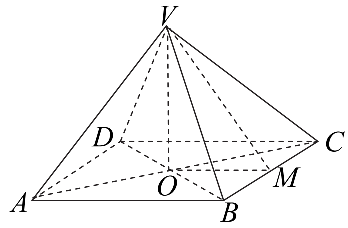


Fig. 8

În piramida regulată avem:

$$AB = AC = BC \neq VA = VB = VC.$$

În piramida regulată avem $A_l = \dfrac{n \cdot l \cdot a_p}{2}$, unde $VA = m$, $AB = l$, $VM = a_p$. Aici „lucrăm” cu următoarele triunghiuri dreptunghice: ΔVOA, ΔVOM, ΔVMB.

Pentru orice poliedru convex (în particular şi pentru orice piramidă) avem **relația lui Euler: $v + f = m + 2$**, unde v, f, m reprezintă numărul de vârfuri, fețe, respectiv muchii.

Probleme rezolvate

1. Se numeşte **bimediană** într-un tetraedru segmentul de dreaptă care uneşte mijloacele a două muchii opuse. Se numeşte **mediană** într-un tetraedru segmentul de dreaptă care uneşte un vârf cu centrul de greutate al feței opuse. Demonstrați că:

a) în orice tetraedru, bimedianele sunt concurente (în punctul G);

b) în orice tetraedru, medianele sunt concurente (în punctul G');

c) în orice tetraedru, avem $G = G'$.

Soluție. Fie tetraedrul $ABCD$ şi M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), (DA), (BD), respectiv (AC) (figura 9). Segmentele (MP), (NQ), (RS) sunt bimediane. Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor (BCD), (ABC), (ACD), respectiv (ABD). Segmentele AG_1, DG_2, BG_3, CG_4 sunt mediane.

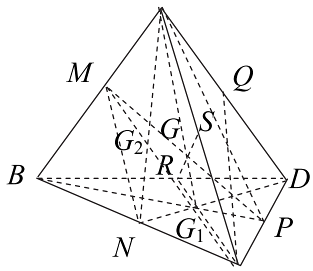


Fig. 9

a) Cum (NP) şi (MQ) sunt linii mijlocii în ΔBCD, respectiv ABD, avem $NP \parallel BD \parallel MQ$, $NP = MQ = \dfrac{1}{2}BD$.

Deci, $MNPQ$ este paralelogram şi atunci MP şi NQ se intersectează în punctul G (mijlocul lor). Analog $NRQS$ este paralelogram şi atunci $G \in RS$ este mijlocul lui (RS).

b) Avem $MP \cap NQ = \{G\}$ în planul (MNP) şi $AG \cap BP \neq \varnothing$ în planul (ABP). Deci, dreptele MP, NQ, AG_1 se intersectează două câte două şi nu sunt coplanare. Cum $P \in$ $\in (MNP) \cap (ABP)$, cele două plane au o dreaptă comună şi $G \in AG_1$. Analog $G \in$ $\in DG_2$, $G \in BG_3$, $G \in CG_4$.

DEFINIŢIE. Punctul G este centrul de greutate al tetraedrului.

2. Fie punctul A şi dreapta d cu $A \notin d$. Demonstrați că toate dreptele d' care conțin punctul A şi intersectează dreapta d sunt coplanare.

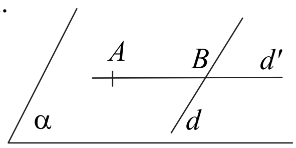


Fig. 10