

ARTUR BĂLĂUCĂ

ALEXANDRU NEGRESCU

CEZAR CHIRILĂ

EMANUEL ȘTIULER

Au mai colaborat:

Gându Gheorghe

Gloambeș Lucian

Ivan Adrian

Ivan Neculai

Mîrșanu Gabriel

Nițescu Mirela

Sas Monica

Sandu Nicolae

MATEMATICĂ

pentru

ACTIVITĂȚI OPȚIONALE



Gimnaziu

Ediția a III-a

Editura TAIDA

IAȘI, 2021

CUPRINS

	pag.
Prefață	3
Argument	4
Tema 1 Ce știm despre numere?	5
Tema 2 Reconstituiri de operații	18
Tema 3 Metoda reducerii la absurd	32
Tema 4 Principiul cutiei (Dirichlet)	38
Tema 5 Principiul parității	43
Tema 6 Atenție la lectură!	47
Tema 7 Labirinturi matematice	51
Tema 8 Ce număr se potrivește?	55
Tema 9 Dovediți-vă istețimea!	60
Tema 10 Aritmetica chibriturilor	66
Tema 11 Geometria chibriturilor	68
Tema 12 Probleme cu arii, volume și perimetre	72
Tema 13 Figuri geometrice magice	80
Tema 14 Configurații geometrice simetrice	94
Tema 15 Șirurile lui Fibonacci. Numărul de aur	99
Tema 16 Acoperiri. Pavaje	106
Tema 17 Rebus matematic	112
Tema 18 Probleme de colorare	115
Tema 19 Metoda invariantilor	121
Tema 20 Paradoxuri	124
Tema 21 Alte probleme care vă solicită istețimea și vă recrează	127
Tema 22 Din legile lui Murphy	156
Tema 23 Anecdote matematice	160
Tema 24 Probleme din concursuri	164
Tema 25 Să ne amuzăm cu Gigel	171
Tema 26 Cugetări ale unor matematicieni celebri	177
Tema 27 Test de inteligență. Estimare	183
Izvoare	192

TEMA 1. CE ȘTIM DESPRE NUMERE?

„Matematica este calea de înțelegere a Universului.
Numărul este măsura tuturor lucrurilor.”
(Pitagora)

Numerele din șirul natural: 1, 2, 3, 4, ... se numesc *cardinale* și arată din câte unități se compune fiecare (*cardinalis = principal*). Numărul unu este compus dintr-o unitate, doi din două unități.... Astfel șirul numerelor s-a format pornind de la unitate și adăugând pe rând câte o unitate numărului anterior. Se observă că fiecărui element îi corespunde un unic element din șir și totodată că poziția lui în șir, adică numărul lui de ordine (*numărul ordinal*), corespunde cu numărul cardinal considerat.

Istoria evoluției sistemelor de scriere a numerelor. Baze de numerație

Cele zece caractere: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cu ajutorul cărora putem scrie astăzi orice număr, se numesc *cifre*.

Pentru a ajunge la cifrele utilizate de noi cotidian, omenirii i-au trebuit milenii. Cele dintâi tentative de a scrie cifrele utilizând primele zece litere ale alfabetului au fost făcute în secolul al VI-lea înainte de Hristos, de către celebrul matematician **Pitagora**.

De abia în anul 610 după Hristos, un savant indian, pe numele său **Aryabhata** a inventat cele nouă cifre pe care le utilizăm în prezent: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și un punct (.) pentru zero.

După moartea profetului lor, Mahomed, în anul 632, triburile arabe se unifică și cuceresc imense teritorii din India până în Spania. Combinând operele matematicienilor greci cu ale celor indieni, ei vor pune la punct sistemul de numerație zecimal.

Pentru prima dată apare zero, nume venit din latinescul „*zephyrum*“, la rândul său derivat din limba arabă.

În scrierea zecimală a numerelor naturale 10 unități formează o grupă numită zece, 10 zeci formează o nouă grupă numită sută, ș.a.m.d.

Învățarea numărării a apărut ca necesară omului din trecutul foarte îndepărtat. De-a lungul timpului, diferite popoare au inventat și au dezvoltat mai multe sisteme de numerație.

Mesopotamienii foloseau următoarele cifre:

▼ = 1 ; ◀ = 10 ; ▼ = 60. Exemplu: 45 = ◀◀◀◀◀▼▼▼▼▼

Acesta este un sistem pozițional și s-a dezvoltat între anii 3000 și 2000 î.Hr.

Egiptenii foloseau un sistem cu simboluri scrise numite hieroglife:

| = 1 (o liniuță); ∩ = 10 (un val); ☉ = 100 (o funie); ⚓ = 1000 (o floare de lotus) ;
| = 100000 (deget arătător) ; ⚓ = 1000000 (om).

Dovediți-vă iscusința!

1. Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} / 20 \leq 2x + 3 \leq 97 \text{ și } x \text{ este număr prim}\}$.
2. Aflați numerele prime x, y, z știind că: $100x + 200y + 600z = 3800$.
3. Determinați toate tripletele de numere prime care verifică toate relația:

$$2a + 5b + c = 35.$$
4. Determinați numerele prime a, b, c știind că $\frac{a}{b} = \frac{32,5}{c}$.
5. Determinați toate numerele naturale m și n care au proprietatea că $2^m + n, 2^n + m$ și $m + n$ sunt simultan prime.
6. Determinați tripletele de numere prime, de forma $(\overline{ab}; \overline{ac}; \overline{ad})$, în baza zece.
7. Determinați cvartetele de numere prime de forma $(\overline{ab}; \overline{ac}; \overline{ad}; \overline{ae})$, în baza zece.
8. Să se determine numărul natural n știind că vecinii săi sunt numere prime iar suma divizorilor lui n este $2n$.
9. Fie numărul natural $\overline{abcdefghi}$ cu suma cifrelor egală cu 19. Scrieți al 9-lea termen din șir în ordine crescătoare, apoi în ordine descrescătoare.
10. Fie suma $S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots999}_{1000 \text{ de } 9} + 2012$.
 - a) Calculați suma S .
 - b) Dacă renunțăm la 2012 care ar fi noul rezultat? Calculați în două moduri.
11. Cinci numere reale pozitive au proprietatea că, dacă din suma oricăror trei se scade suma celor două rămase, diferența obținută este pozitivă. Demonstrați că produsul tuturor celor zece astfel de diferențe nu este mai mare decât pătratul produsului celor cinci numere inițiale.
12. Unele numere se numesc *numere triunghiulare*. Primele numere triunghiulare sunt: 3, 6, 10, 15, 21, 28. În desenul de mai jos sunt reprezentate primele numere triunghiulare. Desenați-le pe următoarele două numere.
13. Un număr se numește *5-balansat* dacă scris în baza 5 are 4 cifre și suma primelor două cifre este egală cu suma ultimelor 2 cifre. Aflați numărul numerelor *5-balansate*.
14. Arătați că există o infinitate de numere naturale prime de forma $4n - 1$ și de forma $6n - 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.

TEMA 3. METODA REDUCERII LA ABSURD

„Viața este bună doar pentru două lucruri:
a studia matematica și a o profesa.”

(S.D. Poisson)

Matematica este una din cele mai vechi științe care a cunoscut o puternică dezvoltare în perioada antichității.

Ea a izvorât din necesitatea de a rezolva anumite probleme practice (cum ar fi măsurarea pământului) și, la început, în Egipt, Mesopotamia, China, India, Grecia etc, au fost obținute rezultate matematice remarcabile, totuși ele aveau un caracter empiric și, deși se ajunsese la ideea de demonstrație a unui rezultat matematic, aceste demonstrații nu s-au păstrat în mare parte.

În Grecia antică, matematica capătă o dezvoltare superioară, constituindu-se ca știință deductivă, apar demonstrații matematice sistematice, apar „Elementele” lui **Euclid** care au reprezentat un salt calitativ în dezvoltarea matematicii, ele constituie o primă încercare de a fundamenta logic o disciplină matematică (geometria elementară), astfel încât axiomatica lui **Euclid** a satisfăcut multă vreme cerințele rigorii logice, constituind obiectul a două milenii de cercetări și căutări.

Tot în Grecia antică se dezvoltă și logica, care apărea deja ca o știință în lucrările lui **Aristotel**.

În dezvoltarea matematicii instrumentul folosit l-a constituit diverse operații logice, dar logica însăși, ca știință, are un conținut obiectiv, ea izvorând prin abstractizarea unor procese ale lumii materiale. Între cele două științe a existat o profundă interdependență. Matematica s-a dezvoltat și s-a formalizat pe baza logicii, dar mai apoi logica însăși s-a formalizat, folosind instrumente matematice.

Pentru a înțelege în ce constă metoda reducerii la absurd să trecem în revistă câteva elemente ale logicii matematice.

Logica matematică studiază propozițiile în alt context față de gramatică. Astfel, din punct de vedere al logicii matematice, o propoziție este un enunț, care într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

Conceptul de adevăr îi este datorat lui **Aristotel**, care considera o propoziție adevărată dacă afirmația exprimată de ea corespundea unui fapt.

Logica matematică studiază propozițiile numai din punct de vedere al valorii lor de adevăr.

Până în anul 1992, celebra *Teoremă a lui Fermat*: „Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, nu există numere întregi nenule x , y , z astfel încât $x^n + y^n = z^n$ ” nu s-a putut afirma multe secole, dar nici infirma. Un asemenea enunț se numește *conjectură*. Abia în anul 1992, matematicianul american **Andrew Wiles** a reușit să demonstreze această teoremă, enunțul respectiv devenind o propoziție adevărată, nemaifiind astfel o conjectură.

Legile fundamentale ale logicii clasice

- ① **Legea identității.** În același timp și în același raport, orice obiect este identic cu el însuși.
- ② **Legea dublei negații.** Negația negației unei propoziții este propoziția dată.
- ③ **Legea contradicției.** Două propoziții contradictorii nu pot fi ambele adevărate: pot fi ambele false sau una adevărată și alta falsă.
- ④ **Legea terțului exclus.** Dintre două propoziții contradictorii cel puțin una este adevărată.

Observație: Din ③ și ④ rezultă că două propoziții contradictorii nu pot fi simultan adevărate, nici false (una este falsă și cealaltă adevărată).

- ⑤ **Legea transpoziției sau contrapoziției.** Dacă într-o implicație înlocuim ipoteza cu negația concluziei și concluzia cu negația ipotezei obținem o propoziție echivalentă. $((p \rightarrow q) \equiv (\text{non } q \rightarrow \text{non } p))$.

Observații:

1. În unele situații demonstrația unei teoreme directe prezintă dificultăți, în timp ce demonstrația contrarei reciproce este una simplă.
2. Metoda prin care în loc să demonstrăm teorema directă, demonstrăm contrara reciproce se numește *metoda reducerii la absurd*.
3. Pentru a utiliza această metodă în demonstrație procedăm astfel: Presupunem că nu este adevărată concluzia și, printr-un șir de raționamente, ajungem la o propoziție contrară ipotezei, sau a unei părți din ipoteză sau unei informații dinainte cunoscută ca fiind adevărată. Ajungem, deci la o propoziție falsă, absurdă. Înseamnă că premisa de la care am pornit este falsă. Deci, concluzia este adevărată.

Exemplificăm utilizarea metodei reducerii la absurd prin câteva exemple:

1. Arătați că nu există un număr care împărțit la 2 să dea restul 1 și împărțit la 4 să dea restul 2.

Demonstrație: Presupunem prin absurd, că există numărul natural n care împărțit la 2 să dea câtul a și restul 1 și împărțit la 4 să dea câtul b și restul 2. Conform **teoremei împărțirii cu rest** avem: $n = 2a + 1$ și $n = 4b + 2$, de unde $2a + 1 = 4b + 2$, sau $2a - 4b = 1$. Deci $2(a - 2b) = 1$, din aceasta deducându-se că 2 îl divide pe 1, absurd. Deducem că presupunerea făcută este falsă.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive sistemul:
$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 6 \\ y - \sqrt{z} = 6 \\ z - \sqrt{x} = 6. \end{cases}$$

Se observă că $x_0 = y_0 = z_0 = 9$ este o soluție a sistemului. Arătăm prin reducere la absurd că soluția este unică. Prin absurd, să presupunem că sistemul ar mai avea soluția (x_1, y_1, z_1) cu $x_1 < y_1$.

Din primele două ecuații ale sistemului rezultă că: $x_1 - y_1 = \sqrt{y_1} - \sqrt{z_1} < 0$, de unde $y_1 < z_1$. **(1)**

Dar, scăzând ultimele două ecuații ale sistemului, rezultă că: $y_1 - z_1 = \sqrt{z_1} - \sqrt{x_1} < 0$, de unde $z_1 < x_1$. **(2)** Din **(1)** și **(2)** rezultă $y_1 < z_1 < x_1$ în contradicție cu $x_1 < y_1$. Analog, se analizează cazul $x_1 > y_1$. Din $x_1 = y_1 = z_1$, și din prima ecuație rezultă $x_1 = 9$.

3. Să se arate că $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Deci există $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ astfel $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ și $(m, n) = 1$. Din $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ rezultă $5n^2 = m^2$ **(1)**, de unde $5/m^2$, 5 fiind prim implică $5/m$, adică $m = 5m_1$ ($m \in \mathbb{Z}$). Înlocuind în relația **(1)** se obține $5n^2 = 25m_1^2$, de unde $5/n$. Deci $5/m$ și $5/n$, ceea ce contrazice faptul că $(m, n) = 1$. Contradicția provine din faptul că am presupus că $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.

Dovediți-vă iscusința!

- Suma a 100 de numere naturale impare este 9998. Să se arate că cel puțin două dintre ele sunt egale.
- Există un număr natural care împărțit la 38 dă restul 19 și împărțit la 57 dă restul 17?
- Fie numărul natural $n = \overline{abcde7}$ scris în baza zece. Demonstrați că dacă n este divizibil cu produsul cifrelor sale atunci cel puțin două dintre cifrele a, b, c, d, e sunt egale. (*Concursul interjudețean „Dintre Pompeiu”, Botoșani, 2012, Cătălin Budeanu*)
- Să se arate că din 17 numere naturale nenule în baza zece a căror sumă nu depășește 497, întotdeauna se pot alege două numere ce au suma egală cu 17.
- Demonstrați că fracția $\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
- Demonstrați că există un singur triplet de numere prime impare consecutive.
- Să se arate că dacă un număr natural de patru cifre distincte este divizibil cu 21, atunci una din cifrele sale este 5.
- Dacă două unghiuri, diferite de unghiul nul, sunt complementare, atunci ambele unghiuri sunt ascuțite.
- Dacă în triunghiul ABC bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ nu este și înălțime, atunci unghiul $\sphericalangle BAC$ nu este congruent cu unghiul $\sphericalangle ACB$.
- Să se arate că în orice triunghi centrul cercului înscris nu este situat pe nici una din liniile mijlocii ale triunghiului.
- Într-o sală a Olimpiadei Internaționale de matematică sunt 9 elevi. Ei descoperă că printre fiecare trei dintre ei, cel puțin doi vorbesc aceeași limbă. Dacă fiecare participant poate vorbi cel mult 3 limbi străine, să se demonstreze că există cel puțin 3 elevi care vorbesc aceeași limbă.

TEMA 17. REBUS MATEMATIC

1. Completați careurile de mai jos cu numere din câte trei cifre, respectând condițiile de mai jos.

- a) 1. Suma cifrelor de pe fiecare linie și coloană este aceeași.
 2. Numerele de pe toate liniile și coloanele sunt divizibile cu 3.
 3. Toate numerele de trei cifre utilizate au cifre distincte.

	1	2	3
1	□	□	□
2	□	□	□
3	□	□	□

- b) 1. Numerele de pe liniile 1, 2 și 3 sunt pătratele unor numere prime cuprinse între 10 și 20.
 2. Nu se folosește cifra 0.
 3. Numărul de pe coloana 1 este par.
 4. Numărul de pe diagonala principală este pătrat perfect.

	1	2	3
1	□	□	□
2	□	□	□
3	□	□	□

2. Completați careul de mai jos, cu numere din câte 5 cifre, respectând condițiile de mai jos.

1. 1 vertical = $19 \cdot 3900$;
2. 2 vertical = $37 \cdot 1086$;
3. 3 vertical = $13 \cdot 0,624$;
4. 4 vertical = $11 \cdot 8,43$;
5. 5 vertical = $27 \cdot 16,9$;
6. 2 orizontal = $3,5 \cdot 11,5$;
7. 3 orizontal = $9,3 \cdot 12$.

	1	2	3	4	5
1	□	□	□	□	□
2	□	□	□	□	□
3	□	□	□	□	□
4	□	□	□	□	□
5	□	□	□	□	□

3. Completând pe orizontală cu denumirile corecte, veți obține pe verticala **AB**, numele unui instrument folosit în construcția dreptelor paralele.

1. Propoziție matematică.
2. Trei puncte situate pe același segment.
3. Mare matematician din Alexandria.
4. Simbolurile sunt continute în matematice.
5. Paralelogramul cu două laturi consecutive

	A									
1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
4	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
5	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
	B									

4. Completați pe orizontală cu denumirile corecte, conform definițiilor date, obținând, astfel, pe verticala **AB**, denumirea „reginei științelor”, dată de **K.F. Gauss**.

1. Dreapta care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.
2. Poziția punctului $P(x, y)$ este determinată de... și de ordonată.
3. ... este determinat de trei puncte necoliniare.
4. Un ansamblu de semne, căruiua i s-a dat un sens se numește....
5. este o noțiune primară.
6. Una din proprietățile înmulțirii.

	A									
1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
4	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
5	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
6	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
7	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
8	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
9	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
10	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
	B									

IDEI DE ABORDARE



1. De exemplu:

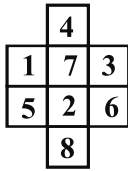


Fig. 12

2.

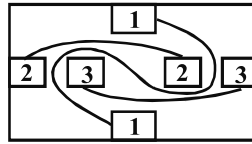


Fig. 13

3. Soluția este așa numita „cruce elvețiană”.

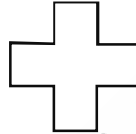


Fig. 14

4.

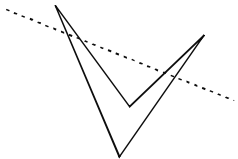


Fig. 15

5.

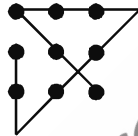


Fig. 16

6.



Fig. 17

7. 31 pătrate, 124 triunghiuri, 87 dreptunghiuri.

8. 35 triunghiuri.

9. 78 triunghiuri, 11 hexagoane regulate, 66 romburi.

10. 54 dreptunghiuri.

11. 100 triunghiuri.

12.

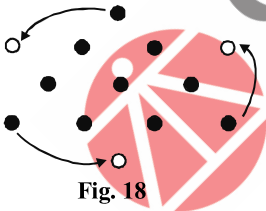


Fig. 18

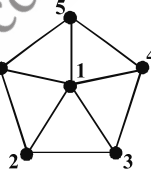


Fig. 19

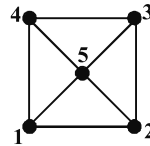


Fig. 20

13. Vârfurile și centrul unui hexagon regulat (figura 19).

14. Vârfurile și centrul unui pătrat (figura 20).

15.

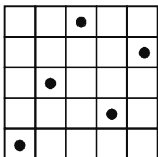


Fig. 21

16.

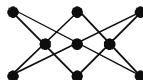


Fig. 22

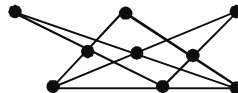


Fig. 23

19. Un calculator afișează un șir de numere astfel că oricare trei termeni consecutivi ai șirului au suma 37. Se știe că al treilea termen al șirului este 11, iar al zecelea termen al șirului este 9. Aflați ce număr va fi al 2002-lea termen al șirului.

(Arhimede, 2002)

20. La ceasul din **figura 8**, minutarul a căzut.

a) Așază minutarul astfel încât cele două limbi să fie perpendiculare.

b) Precizează momentul pe care îl arată ceasul reparat de tine.

(La școala cu ceas, 2002)

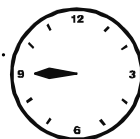


Fig. 8

21. Am ales două numere impare consecutive. Produsul lor l-am mărit cu 1 și am găsit suma 784. Spune-mi ce numere am ales?

(La școala cu ceas, 2002)

22. Secționăm un paralelogram, cu lungimile laturilor $AD = a$, $AB = 2a$ și $\sphericalangle A = 60^\circ$, o singură dată, apoi cu cele două poligoane obținute formați:

a) un triunghi echilateral;

b) un dreptunghi.

(La școala cu ceas, 2002)

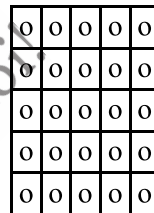


Fig. 9

23. Pe fiecare din cele 5 rânduri orizontale, verticale și diagonale din **figura 9** se pot număra 5 cerușe. Eliminați câte 5 cerușe astfel încât pe fiecare rând, coloană, respectiv, diagonală să poată fi numărate numai câte 4 cerușe.

(Arhimede, 2001)

REȚINEȚI!

Principiul includerii și excluderii

Fiind date mulțimile finite A și B, avem relația:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B).$$

Fiind date mulțimile finite A, B și C avem:

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) = & \text{card } A + \text{card } B + \text{card } C - \text{card}(A \cap B) - \\ & - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

24. Într-o clasă sunt 25 de elevi. 12 joacă handbal și 16 joacă baschet. Câți elevi din clasă joacă handbal și baschet?

25. Câte numere naturale, nenule, cel mult egale cu 2017, sunt divizibile cu 3 sau cu 5 sau cu 7?

26. Se consideră mulțimea $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; 39; 40\}$.

a) Arătați că există o submulțime B a mulțimii A astfel încât $B \subset A$, $\text{card } B = 8$ și oricare ar fi patru elemente distincte două câte două din mulțimea B, suma a două dintre aceste numere nu este egală cu suma celorlalte două elemente.

b) Considerăm mulțimea $C = B \cup \{a\}$, unde $a \in A$ și $a \notin B$. Demonstrați că în mulțimea C există patru elemente distincte două câte două încât suma a două dintre ele este egală cu suma celorlalte elemente.

(Artur Bălăucă)