

ARTUR BĂLĂUCĂ

ARITMETICĂ ALGEBRĂ GEOMETRIE

TEME PENTRU CENTRE DE EXCELENȚĂ

+

234

MODELE DE PROBLEME REZOLVATE

+

1307

DE PROBLEME SEMNIFICATIVE

PENTRU

OLIMPIADE, CONCURSURI

ȘI

CENTRE DE EXCELENȚĂ

CLASA A VI-A

EDIȚIA A IX-A

EDITURA TAIDA

IAȘI



Cuprins

	Breviar	Enunțuri	Soluții
Prefață		3	
Programa Olimpiadei de Matematică		5	
ALGEBRĂ			
Capitolul I. MULȚIMI			
Submulțimi. Cardinalul unei mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite.			
Mulțimea \mathbb{N} . Operații cu mulțimi. Principiul includerii și excluderii.			
Partiții. Principiul cutiei	7	19	257
Capitolul II. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE			
II.1. Proprietățile relației de divizibilitate în \mathbb{N}	28	35	260
II.2. Criterii de divizibilitate	41	44	264
II.3. Numere prime. Numere compuse	46	49	265
II.4. Numărul divizorilor. Teorema fundamentală a aritmeticii	55	58	269
II.5. C.m.m.d.c și c.m.m.m.c. $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$. Numere prime între ele ...	60	65	271
II.6. Sisteme de numerație (extinderi)	69	72	273
Capitolul III. RAPOARTE ȘI PROPORȚII			
Rapoarte. Proporții. Procente. Șir de rapoarte egale. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă. Elemente de organizare a datelor. Grafice. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice. Probabilități			
	75	83	274
Capitolul IV. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI			
IV. 1. Ordonarea numerelor întregi. Modulul unui număr întreg. Operații în \mathbb{Z} . Proprietăți. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri			
	99	103	283
IV. 2. Divizibilitatea în \mathbb{Z} . Proprietăți ale divizibilității în \mathbb{Z}			
	108	111	285
IV. 3. Ecuații și inecuații în \mathbb{N} și \mathbb{Z} . Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor			
	113	116	286
Capitolul V. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE			
V. 1. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor; compararea și ordonarea numerelor raționale. Modulul unui număr rațional. Operații cu numere raționale. Proprietăți. Puterea cu exponent întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri			
	121	131	292
V. 2. Ecuații și inecuații în \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor			
	148	155	304
Capitolul VI. PROBLEME DE NUMĂRARE ȘI DE COLORARE. PROBLEME DE PERSPICACITATE ȘI DISTRACTIVE. PROBLEME RECREATIVE (JOCURI)			
	163	170	312
GEOMETRIE			
Capitolul I. UNGHIURI. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri în jurul unui punct. Unghiuri suplimentare, complementare, adiacente. Bisectoarea unui unghi. Teorema directă și teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf (extinderi)			
	181	190	322
Capitolul II. PARALELISM ȘI PERPENDICULARITATE. Drepte paralele. Unghiuri formate de o dreaptă cu o secantă. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism. Aplicații practice la poligoane și corpuri geometrice. Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă. Aplicații practice			
	195	198	326

Capitolul III. CERCUL. Definiție, construcție, elemente în cerc. Unghi la centru. Măsuri. Poziția unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	201	202	327
Capitolul IV. TRIUNGHIUL			
IV. 1. Definiție, elemente. Suma unghiurilor unui triunghi, unghi exterior. Construcția triunghiurilor, inegalități între elementele triunghiului ...	203	203	328
IV. 2. Linii importante în triunghi: bisectoarele unghiurilor, mediatoarele laturilor, înălțimile, medianele unui triunghi. Proprietăți	205	209	330
IV. 3. Congruența triunghiurilor și cazul L.L.U. Congruența triunghiurilor dreptunghice (cazurile I.C., I.U., C.C. C.U.). Metoda triunghiurilor congruente	211	219	331
Capitolul V. TRIUNGHIUL ISOSCEL TRIUNGHIUL ECHILATERAL			
V. 1. Proprietățile triunghiului isoscel și echilateral	225	230	337
V. 2. Proprietățile triunghiurilor dreptunghice. Teorema unghiului de 30° (30°, 60°, 90°), teorema unghiului de 15°, teoreme referitoare la lungimea medianei corespunzătoare și reciprocele acestora. Teorema directă și teorema reciprocă a liniei mijlocii a unui triunghi	245	248	348
Capitolul VI. PROBLEME DE COLINIARITATE. PROBLEME DE CONCURENȚĂ. PROBLEME DE SINTEZĂ		254	353
SOLUȚII. INDICAȚII. RĂSPUNSURI			257
Bibliografie			355

Programa Olimpiadei de Matematică

- În programa de olimpiadă sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor de olimpiadă pentru disciplina matematică din clasele anterioare.
- În programa prevăzută pentru etapa națională sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor de olimpiadă de la etapele anterioare
- Conținuturile suplimentare față de programa școlară, marcate cu text înclinat în prezenta programă, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă

ALGEBRĂ

Etapa județeană

1. Mulțimi

- Submulțimi. Cardinalul unei mulțimi. Operații cu mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite. *Principiul includerii și excluderii. Partiții. Principiul cutiei.*
- Mulțimea \mathbb{N} . Teorema fundamentală a aritmeticii. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.. Proprietăți.
- $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$
- Dacă $(a, b) = d$ atunci există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x, y) = 1$ și $a = dx, b = dy$.
- Dacă $[a, b] = m$ atunci există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x, y) = 1$ și $m = ax, m = by$.

2. Rapoarte și proporții

- Rapoarte. Proporții. Procente. Șir de rapoarte egale. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă.
- Elemente de organizare a datelor. Grafice. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice. Probabilități.

Submulțimi. Cardinalul unei mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimea \mathbb{N} . Operații cu mulțimi. Principiul includerii și excluderii. Partiții. Principiul cutiei

Rețineți!

Noțiunile de mulțime și de element al unei mulțimi fac parte din categoria acelor noțiuni matematice care nu pot fi definite, dar sunt impuse de numeroase exemple:

- 1) mulțimea cuvintelor din limba română;
- 2) mulțimea numerelor naturale: $0, 1, 2, 3, \dots$ etc;

3) mulțimea băncilor din clasă. Așa cum arăta **Cantor**, creatorul teoriei mulțimilor, o mulțime este „o colecție de obiecte (numite elementele mulțimii) de natură oarecare, bine determinate și bine distincte”.

Există două moduri de determinare a unei mulțimi.

- a) enumerând individual elementele sale.
- b) specificând o proprietate pe care o au elementele sale și nu le au alte elemente. Mulțimile definite în acest mod se vor nota prin $A = \{x/\mathcal{P}(x)\}$, adică mulțimea acelor obiecte x , pentru care are loc proprietatea $\mathcal{P}(x)$.

O mulțime definită după primul mod se zice că este dată sintetic, iar o mulțime definită în al doilea mod este dată analitic.

Rețineți!

1. O mulțime care are un număr finit de elemente se zice *finită*. În caz contrar se numește *infinită*.

2. În teoria mulțimilor se admite existența unei mulțimi care nu are nici un element; aceasta se numește mulțime *vidă* și se notează cu simbolul Φ .

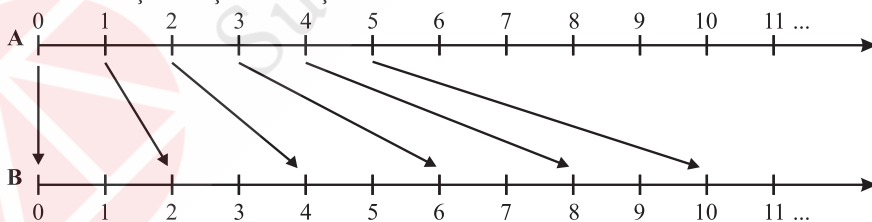


Diagrama de mai sus sugerează faptul că mulțimea numerelor naturale cât și mulțimea numerelor naturale pare este infinită.

Mulțimi egale**Rețineți!**

Se spune că mulțimea A este egală cu o mulțime B dacă orice element al mulțimii A aparține și mulțimii B și reciproc.

Avem $76^{63} + 66^{53} = (76^{63} - 5^{63}) + (66^{53} + 5^{53}) + (5^{63} - 5^{53}) = (76 - 5)(76^{62} + 76^{61} \cdot 5 + \dots + \dots + 76 \cdot 5^{61} + 5^{62}) + (66 + 5)(66^{52} - 66^{51} \cdot 5 + \dots - 66 \cdot 5^{51} + 5^{52}) + 5^{53}(5^{10} - 1) =$
 $= M_{71} + 5^{53}(5^{10} - 1)$. Însă $5^{10} - 1 = (5^5 - 1)(5^5 + 1) = (5 - 1)(5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1) \cdot (5^5 + 1) =$
 $= 4 \cdot 781 \cdot (5^5 + 1) = 4 \cdot 71 \cdot 11 \cdot (5^5 + 1) = M_{71}$.

2. Se știe că numărul $A = \overline{abbccccc}$ este pătrat perfect cu $a \neq b \neq c \neq a$.

a) Arătați că $121 \mid A$.

b) Determinați toate numerele A cu proprietatea de mai sus.

(Concursul „Florica T.Câmpan, etapa județeană, Iași, 2012, Cristian Lazăr)

Rezolvare:

a) Cazul $c \neq 0$.

$A = \overline{aa} \cdot 10^6 + \overline{bb} \cdot 10^4 + \overline{cc} \cdot 10^2 + \overline{cc} = 11(a \cdot 10^6 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^2 + c)$, de unde $11 \mid A$.

Cum 11 este număr prim rezultă $11^2 \mid A$. Dacă $c = 0$, atunci $A = 10^4 \cdot (\overline{aa} \cdot 10^2 + \overline{bb}) =$
 $= 10^4 \cdot 11 \cdot (a \cdot 10^2 + b)$ etc.

b) A pătrat perfect implică $c \in \{0; 1; 5; 6; 9\}$. Dacă $c \in \{1; 5; 6; 9\}$, atunci A este de forma $4k + 3$ sau $4k + 2$, deci A nu este pătrat perfect.

Să analizăm cazul $c \in \{0; 4\}$.

Dacă $c = 4$, atunci $A = 4 \cdot \left(\overline{aa} \cdot \frac{10^6}{4} + \overline{bb} \cdot \frac{10^4}{4} + 1111 \right) = 4(\overline{aa} \cdot 5^6 \cdot 2^4 + \overline{bb} \cdot 5^4 \cdot 2^2 + 1111) =$
 $= 2^2 \cdot (M_4 + 3)$, deci A nu este pătrat perfect.

A mai rămas că analizăm cazul $c = 0$.

Dacă $c = 0$, atunci $A = \overline{aabb} \cdot 10^4$. Deci este necesar ca numărul \overline{aabb} să fie pătrat perfect.

Dacă $b = 0$, atunci $\overline{aa00} = 100 \cdot \overline{aa}$. Dar \overline{aa} nu este pătrat perfect, oricare ar fi cifra a .

$b = 1$ implică $\overline{aa11} = M_4 + 3$, nu convine.

$b = 4$ implică $\overline{aa44} = \overline{aa} \cdot 100 + 44 = 11(100a + 4) = 11[99a + a + 4]$, de unde $11 \mid a + 4$.
 Deci $a = 7$ soluție.

$b \in \{5; 6; 9\}$, conduce la \overline{aabb} este de forma $M_4 + 3$ sau $M_4 + 2$, nu convine.

Prin urmare, $A = 77440000$ soluție unică.

3. Se știe că numerele \overline{abc} și \overline{cba} scrise în baza zece sunt divizibile cu 7.

Arătați că numărul $n = 6a + 12b + 6c$ este divizibil cu 7.

Rezolvare:

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = (98a + 7b) + (2a + 3b + c)$, (1).

$\overline{cba} = 100c + 10b + a = (98c + 7c) + (2c + 3b + a)$, (2).

Din (1) și (2) rezultă că $7 \mid 2a + 3b + c$ și $7 \mid 2c + 3b + a$, de unde $7 \mid (2a + 3b + c) +$
 $+ (2c + 3b + a)$, adică $7 \mid 3a + 6b + 3c$ și $7 \mid 2(3a + 6b + 3c)$.

4. Arătați că suma și produsul oricăror cinci numere naturale consecutive, se divide cu 5.

Rezolvare:

Resturile împărțirii a cinci numere naturale consecutive la 5 sunt 0, 1, 2, 3 și 4, nu neapărat în această ordine, adică ele sunt de forma $M_5, M_5 + 1, M_5 + 2, M_5 + 3, M_5 + 4$ nu neapărat în această ordine.

II.4. Numărul divizorilor.

Teorema fundamentală a aritmeticii

Rețineți!

Teorema fundamentală a aritmeticii: Oricare ar fi un număr natural N , cu $N \geq 2$, există o descompunere a sa în produs de numere prime, adică există un număr finit de numere prime p_1, p_2, \dots, p_n , nu neapărat distincte, astfel încât $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$. În plus, această descompunere este unică în sensul că oricare altă descompunere în produs de factori primi diferă de ea doar prin ordinea factorilor.

Reprezentarea $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ și p_1, p_2, \dots, p_n sunt numere prime, cu $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n$ se numește **descompunerea canonică** a numărului N .

➤ Numărul divizorilor unui număr natural N , ($N \neq 0$) scris sub forma canonică

$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$, este egal cu $\tau(N) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_n + 1)$.

➤ Suma divizorilor unui număr natural N , ($N \neq 0$) scris sub forma canonică

$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$, este egală cu $\sigma(N) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n^{a_n+1} - 1}{p_n - 1}$.

Rețineți!

Formula lui Legendre

Exponentul numărului natural prim p din descompunerea canonică a numărului natural N , unde $N = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ cu $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 2$ este egal cu

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right] \quad (p^k \leq n < p^{k+1}).$$

$\left(\left[\frac{n}{p^i} \right] \right)$ reprezintă partea întregă a numărului rațional $\frac{n}{p^i}$ și este de fapt câtul împărțirii

lui n la p^i , $i = \overline{1, k_p}$.

Probleme rezolvate

1. Fie numărul $n = 100!$, adică $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$. Aflați:

- Exponentul lui 2 din descompunerea în factori a lui n .
- Exponentul lui 5 din descompunerea în factori a lui n .
- Exponentul lui 3 din descompunerea în factori a lui n .
- Arătați că $30^{24} \mid 100!$.
- Arătați că $30^{25} \nmid 100!$.

Rezolvare:

$$\text{a) } \left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{2^2} \right] + \left[\frac{100}{2^3} \right] + \left[\frac{100}{2^4} \right] + \left[\frac{100}{2^5} \right] + \left[\frac{100}{2^6} \right] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$$

(am folosit formula lui Legendre)

$$\text{b) } \left[\frac{100}{5} \right] + \left[\frac{100}{5^2} \right] = 20 + 4 = 24.$$

Rapoarte. Proporții. Procente. Șir de rapoarte egale. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă. Elemente de organizare a datelor. Grafice.

Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice. Probabilități

Procente

Rețineți!

➤ Aflarea a $p\%$ dintr-un număr: $p\%$ din $a = \frac{p}{100} \cdot a$.

➤ Aflarea unui număr când cunoaștem $p\%$ din el: $\frac{p}{100}$ din $x = a$ implică $x = a : \frac{p}{100}$,
de unde $x = \frac{a \cdot 100}{p}$.

➤ Aflarea raportului procentual: $\frac{p}{100}$ din $a = b$ implică $p = \frac{100 \cdot b}{a}$.

➤ Concentrația unei soluții = $\frac{\text{masa dizolvantului}}{\text{masa soluției}}$.

Probleme rezolvate

1. Se dizolvă 170 g de zahăr în 80 g de apă. Care este concentrația soluției?

Rezolvare:

$$\text{concentrația} = \frac{\text{masa zahărului}}{\text{masa soluției}} = \frac{170}{170 + 80} = \frac{170}{250} = \frac{17}{25} = \frac{68}{100} = 68\%.$$

➤ Titlul unui aliaj = $\frac{\text{masa metalului prețios}}{\text{masa aliajului}}$.

2. Titlul unui aliaj care conține argint este egal cu 0,785. Ce cantitate de argint intră într-un obiect care cântărește 200 de grame?

Rezolvare:

$$\text{Avem: } 0,785 = \frac{a}{200}, \text{ de unde } a = 0,785 \cdot 200 = 157 \text{ de grame.}$$

➤ Dacă rapoartele de numere raționale $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \frac{a_3}{b_3}; \dots; \frac{a_n}{b_n}$ au aceeași valoare spunem că ele formează un șir de rapoarte egale.

3. Un obiect care are prețul de 1200 lei se scumpește cu 25%. Cu cât la sută ar trebui să se ieftinească pentru a ajunge la prețul inițial? Generalizare.

(Gazeta Matematică, I. Fota, Izbiceni, 2017)

Rezolvare:

a) După scumpire obiectul costă $1200 \text{ lei} + \frac{25}{100} \cdot 1200 \text{ lei} = 1500 \text{ lei}$.

$$\frac{p}{100} \text{ din } 1500 \text{ lei} = 1200 \text{ lei} \Rightarrow p = \frac{1200 \cdot 100}{1500} = 80\%.$$

Obiectul trebuie să se ieftinească cu 20%.

b) Generalizare

Un obiect care are prețul de a lei se scumpește cu $p_1\%$. Cu cât la sută ar trebui să se ieftinească obiectul pentru a ajunge la prețul inițial?

Rezolvare:

După scumpire cu $p_1\%$ obiectul costă $\frac{p_1 + 100}{100} \cdot a$.

După ieftinire avem: $\frac{p}{100} \cdot \left(\frac{p_1 + 100}{100} \right) \cdot a = a$, de unde $p = \frac{100^2}{p_1 + 100}$.

Obiectul trebuie să se ieftinească cu $100 - \frac{100^2}{p_1 + 100} = \frac{p_1 \cdot 100}{p_1 + 100}$.

Cazul particular: $p_1 = 25\%$, obiectul se ieftinește cu: $\frac{25 \cdot 100}{125} = 20\%$.

(Soluție dată de Victor-Gabriel Tcaciuc)

Proprietatea fundamentală a unui șir de rapoarte egale

Dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, atunci $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$.

⇒ Spunem că numerele raționale nenule a_1, a_2, \dots, a_n sunt direct proporționale, respectiv, cu numerele raționale nenule b_1, b_2, \dots, b_n dacă putem scrie șirul de rapoarte egale:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

⇒ Spunem că numerele raționale nenule a_1, a_2, \dots, a_n sunt invers proporționale, respectiv, cu numerele raționale nenule b_1, b_2, \dots, b_n dacă putem scrie șirul de rapoarte egale:

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \dots = \frac{a_n}{1} \text{ sau } a_1 \cdot b_2 = \dots = a_n \cdot b_n.$$

139. Numerele raționale pozitive $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ satisfac condițiile:

(1) $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{19}$ sunt direct proporționale cu numerele 1, 3, 5, ..., 19;

(2) $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}$ sunt invers proporționale cu numerele 19, 17, 15, ..., 5, 3, 1.

Se consideră numerele $m = \frac{1}{a_1} \cdot (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19})$ și $n = a_{20} \cdot \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} + \dots + \frac{1}{a_{20}} \right)$.

a) Arătați că m este număr natural pătrat perfect. b) Comparați numerele m și n .

c) Determinați numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ știind că:

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) \cdot \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} + \dots + \frac{1}{a_{20}} \right) = a_1 \cdot a_{20} = 1.$$

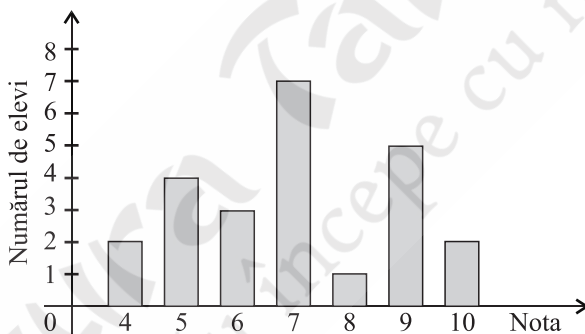
(Concursul „Dimitrie Pompeiu“, Botoșani, 2012, Ioan Țicalo, Adriana Maxiniuc)

140. În diagrama alăturată sunt prezentate notele la teza de matematică pe semestrul I.

a) Numărul elevilor care au luat la teză cel puțin nota 7 este egal cu ...

b) Media clasei este egală cu ...

c) Ce procent din efectivul clasei au obținut nota 9 sau 10 la teză?



141. Numărul elevilor dintr-o școală care participă la olimpiada de matematică și vârstele lor sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Număr elevi	7	6	8	9
Vârsta (ani)	9	11	12	13

a) Ce procent din numărul elevilor au vârsta peste 11 ani?

b) Utilizând datele din tabel alcătuiți o diagramă:

a) circulară;

b) cu bare verticale.

142. În tabelul de mai jos sunt reprezentate mărimile direct proporționale a și b .

a	2	5		11		10
b	4		7		18	

a) Completați căsuțele goale ale tabelului.

b) Reprezentați printr-un grafic datele din tabelul completat la a).

2. Cazurile de congruență I.U. și C.U. sunt criteriile de congruență de tip L.U.U.
Să urmărim, în continuare, modul în care putem aplica acest caz în rezolvarea a două probleme.

Probleme rezolvate

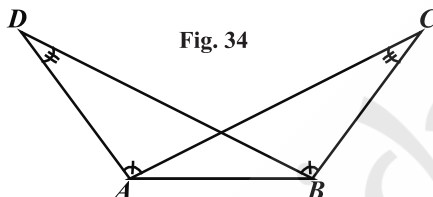
1. În figura 34 știm că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle BCA$. Să se arate că: $(AD) \equiv (BC)$ și $(AC) \equiv (BD)$.

Ipoteza: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$

$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle BCA$

Concluzia: $(AD) \equiv (BC)$

$(AC) \equiv (BD)$



Rezolvare:

Mai întâi, să punem în evidență elementele congruente ale triunghiurilor ABC și BAD , care conțin congruențele din ipoteză, dar și pe cele din concluzie. Important este să observăm că latura $[AB]$ este comună celor două triunghiuri.

Așadar, $(AB) \equiv (AB)$ (latură comună), $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$ (ipoteză), $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB$ (ipoteză), de unde, conform cazului L.U.U., rezultă că $\triangle BAC \equiv \triangle ABD$, și atunci $(AD) \equiv (BC)$ și $(AC) \equiv (BD)$.

2. În figura 35, se știe că $(AC) \equiv (BC)$, $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ și $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$. Arătați că $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BDE$.

Ipoteza: $(AC) \equiv (BC)$

$\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$

$\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$

Concluzia: $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BDE$

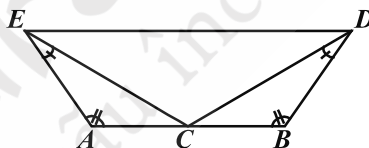


Fig. 35

Rezolvare:

Fiindcă $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ (ipoteză), este necesar să arătăm că $\sphericalangle CED \equiv \sphericalangle CDE$, adică triunghiul DCE este isoscel cu $(CE) \equiv (CD)$.

Ce triunghiuri congruente să utilizăm? Observând figura de mai sus, datele din ipoteză și concluzia, nu putem avea decât $\triangle ACE \equiv \triangle BCD$.

Într-adevăr, $(AC) \equiv (BC)$ (ipoteză), $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ (ipoteză) și $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$ (ipoteză), de unde, conform cazului L.U.U., avem că $\triangle ACE \equiv \triangle BCD$ și atunci $(CE) \equiv (CD)$. Acum se finalizează cu ușurință problema.

Congruența de tip L.L.U. (latură-latură-unghi)



Să observăm!

Triunghiurile din figura 36 au câte două laturi (cele însemnate cu liniuțe) și câte un unghi (diferite de cele formate de cele două laturi), respectiv congruente.

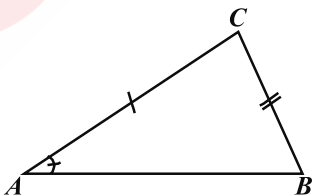
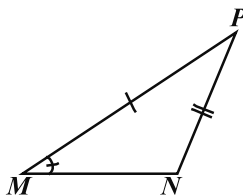


Fig. 36



Cele două triunghiuri sunt congruente?

V. 1. Proprietățile triunghiului isoscel și echilateral

Probleme rezolvate

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$. punctul D se află în interiorul unghiului $\sphericalangle ACB$, astfel încât $m(\sphericalangle DCB) = 15^\circ$ și $m(\sphericalangle DBA) = 75^\circ$. Demonstrați că are loc egalitatea $AC = AD$.

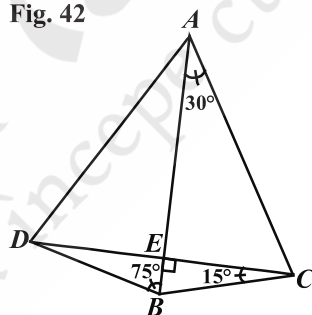
(Concursul „Recreații matematice“, Muncel, 2012)

Rezolvare:

Fie $CD \cap AB = \{E\}$, fig. 42. Din $(AB) \equiv (AC)$ rezultă că $\triangle ABC$ este isoscel, de unde $m(\sphericalangle ABC) = \frac{180^\circ - m(\sphericalangle BAC)}{2} = 75^\circ$. Cum $m(\sphericalangle DCB) = 15^\circ$, rezultă că $m(\sphericalangle BEC) = 90^\circ$. În $\triangle DBC$, (BE este bisectoare și înălțime, deci acesta este triunghi isoscel, de unde $(BD) \equiv (BC)$.

$\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ (L.U.L.), de unde concluzia.

Fig. 42



2. În triunghiul ABC , $AC < BC$ și $m(\sphericalangle ACB) = 60^\circ$. Pe latura (BC) se consideră punctul D astfel încât $(BD) \equiv (AC)$ și fie punctul E simetricul punctului A față de punctul C . Să se demonstreze că $[DE] \equiv [AB]$.

(Concursul „Recreații Matematice“, Muncel, Iași, 2012)

Rezolvare:

Să efectuăm o construcție auxiliară! Cum? Având $m(\sphericalangle ACB) = 60^\circ$, să construim un triunghi echilateral.

Fie $F \in (BC)$ astfel încât $(AC) \equiv (CF)$ (fig. 43). Astfel avem triunghiul ACF echilateral, de unde $(CF) \equiv (AC) \equiv (CE) \equiv (AF)$, (1).

$m(\sphericalangle ECD) = m(\sphericalangle AFD) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, (2).

Din $(CF) \equiv (DB)$ rezultă că $(CD) \equiv (FD)$, (3).

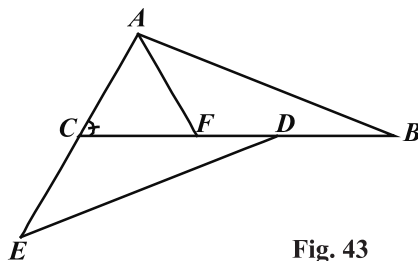


Fig. 43



Observație

Putem avea și ordinea $C - D - F$, însă congruențele sunt aceleași. Din (1), (2) și (3) rezultă $\triangle ECD \equiv \triangle AFB$ (L.U.L.), de unde $(AB) \equiv (DE)$.

32. Se dă un triunghi oarecare $\triangle XOY$ astfel încât $m(\sphericalangle XOY) < 180^\circ$. Pe latura (OX se construiesc segmentele $[OA]$ și $[OB]$ iar pe latura (OY segmentele $[OC] \equiv [OA]$ și $[OD] \equiv [OB]$, iar $OC < OB$. Dreptele AD și BC se intersectează în M .

a) Să se arate că: (OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$); **b)** Enumerați triunghiurile isoscele care apar în figură. (Etapa locală, Botoșani, 1990)

33. Fie $\sphericalangle XOY$ un unghi ascuțit, $A \in (OX)$ și $AB \perp OY$, $B \in (OY)$. **a)** Arătați că există un punct $P \in (OY)$ astfel încât $[AP] \equiv [AO]$. **b)** Pe semidreapta opusă semidreptei (OX se ia punctul C astfel încât O este mijlocul segmentului $[AC]$, iar pe semi-dreapta opusă semidreptei (OY se ia punctul D , astfel încât $\sphericalangle OCD \equiv \sphericalangle OPA$.

Cercetați dacă $[CD] \equiv [AP]$. (Etapa județeană, Botoșani, 1994)

34. Fie triunghiul $\triangle ABC$ isoscel cu $m(\sphericalangle BAC) = 108^\circ$. Construim înălțimea (AD) și bisectoarea (BF , ($F \in (AC)$)). Demonstrați că $BF = 2 \cdot AD$. (Constantin Guriță)

35. Se dă triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $[AB] \equiv [AC]$. Perpendicularele în B și C pe BA respectiv CA se întâlnesc în D . Se prelungește $[BD]$ cu un segment (DE), $[DE] \equiv [BD]$. Perpendiculara în E pe BE întâlnește dreapta AC în F . Arătați că:

a) $[EF] \equiv [CF]$; **b)** $AD \perp DF$.

36. Perpendicularele din C și, respectiv, B pe bisectoarele interioare (BB' și (CC' ale unui triunghi ABC se intersectează într-un punct P . Demonstrați că dacă P aparține mediatoarei laturii $[BC]$, atunci triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel. (Ioan Țicalo)

37. Se dă triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $AB = AC$. Pe latura (AB) se iau punctele M, N, P astfel încât $AM = MN = NP = PB$ și pe latura (AC) punctele E, F, G astfel încât $AE = EF = FG = GC$. Fie $PE \cap BC = \{S\}$, $MG \cap BC = \{T\}$ și $EP \cap MG = \{H\}$. Arătați că: **a)** $MG = PE$; **b)** $MT = SE$; **c)** $AH \perp BC$; **d)** $\triangle HMP \equiv \triangle HEG$.

(G.M. 5 – 6/1993, Romeo Ilie)

38. Se consideră triunghiul isoscel $\triangle ABC$ ($[AB] \equiv [AC]$), măsura unghiului $\sphericalangle A$ este de 40° . Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$, în exterior, se construiesc triunghiurile echilaterale $\triangle ABD$ și $\triangle ACE$. Dacă $AF \perp BC$ ($F \in BC$) și $M \in AF$, să se arate că: **a)** $[DM] \equiv [EM]$; **b)** $DE \perp AF$; **c)** bisectoarele interioare ale unghiurilor $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle E$ se întâlnesc într-un punct situat pe AF . (Etapa județeană, Timiș, 1989)

39. Se dă triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $(AB) \equiv (AC)$ și $m(\sphericalangle BAC) = 36^\circ$. Fie $M \in (AB)$ astfel încât $(AM) \equiv (BC)$ și N simetricul punctului M față de AC . Să se determine: **a)** măsura unghiului $\sphericalangle BMC$; **b)** poziția unui punct $P \in AB$ astfel încât $NP + PC$ să fie minimă. (Niculai Solomon)

40. Pe laturile unui triunghi $\triangle ABC$ se consideră punctele distincte $A_1 \in (BC)$, $A_2 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $B_2 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$, $C_2 \in (AB)$, astfel încât $A_1 \in (BA_2)$, $B_1 \in (CB_2)$ și $C_1 \in (AC_2)$, iar unghiurile $\sphericalangle A_1AB$, $\sphericalangle A_2AC$, $\sphericalangle B_1BC$, $\sphericalangle B_2BA$, $\sphericalangle C_1CA$, $\sphericalangle C_2CB$ sunt congruente. Fie $AA_1 \cap CC_2 = \{E\}$, $BB_1 \cap AA_2 = \{D\}$, $CC_1 \cap BB_2 = \{N\}$. Punctele

SOLUȚII. INDICAȚII. RĂSPUNSURI

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. Capitolul I. MULȚIMI

Submulțimi. Cardinalul unei mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimea \mathbb{N} .

Operații cu mulțimi. Principiul includerii și excluderii. Partiții. Principiul cutiei

1. $M = \{12, 24, 36, 48\}$; 2. $(a, b) \in \{(5, 4); (17, 2)\}$. 3. $A = B = \{(1, 5); (4, 5); (7, 5)\}$.
 4. $n = 10; m = 5; p = 5$; 5. **a)** $a = 2, b = 0$ sau $a = b = 2$. **b)** $2^{x+5} \neq 2^{7x-1}, 4^{x+2} \neq 2^{7x-1}, 8^{x+1} \neq 2^{7x-1}$,
 deci $x \neq 1$. Mulțimea este $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. 6. $a, b, c \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2a + 1, 2b + 1, a + b, b + c, c + a$ sunt
 mai mari decât $1 \Rightarrow 2c - 5 = 1 \Rightarrow c = 3; 2a + 1; 2b + 1$ impare $\Rightarrow 2a + 1 = 3, 2b + 1 = 5$ sau
 $2a + 1 = 5, 2b + 1 = 3 \Rightarrow a = 1, b = 2$ sau $a = 2, b = 1$. 7. **a)** $A_{10} = \{92, 94, \dots, 108, 110\}$;
 $A_{11} = \{112, 114, \dots, 132\}$; **b)** $S = 9902 + 9904 + 9906 + \dots + 10100 = (9902 + 10100) +$
 $+ (9904 + 10098) + \dots + (10000 + 10002) = 20002 \cdot 50 = 1000100$. 8. $\{25, 17, 9\}$ sau
 $\{41, 29, 17\}$ sau $\{41, 65, 89\}$. 9. Niciun element, unul, două, trei, sau patru elemente.
 10. $\text{Card } A = 8, \text{Card } B = 10$. 11. $\text{Card } (A \cap B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cup B) = 3$;
 12. $A \cap B = \emptyset$ (mulțimile A și B sunt disjuncte). 13. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{0, 1, 2\}$.
 14. $n = 1 \Rightarrow \{2003\} \subset A \cap B$, deci P_1 este falsă. $n = 0 \Rightarrow 1 \in A$, însă $n^{2002} + 2002 > 1$, oricare
 ar fi $n \in \mathbb{N}$, deci P_2 este adevărată. 15. Cel mai mare număr din D_a este a , iar cel mai mare
 număr din D_b este b și cum $D_a = D_b \Rightarrow a = b$. Se observă că cel mai mic număr nenul din
 M_a este a , ș.a.m.d. 16. Putem presupune că $a \leq b$. Avem: $a \in D_a \Rightarrow a \in D_a \cup M_a \Rightarrow a \in D_b \cup M_b$;
 dar $a \leq b, a \neq 0 \Rightarrow a \in D_b \Rightarrow (1) a / b \Rightarrow a / a + b \Rightarrow (a + b) \in M_a \Rightarrow (a + b) \in D_a \cup M_a \Rightarrow$
 $\Rightarrow (a + b) \in D_b \cup M_b$; dar $a + b > b \Rightarrow a + b \in M_b \Rightarrow b / a + b \Rightarrow (2) b / a$. Din relațiile (1) și
 (2) $\Rightarrow a = b$. 17. $M \cup N = \{(9, 0, 0); (2, 2, 5); (4, 5, 0); (6, 7, 5)\}$. $\text{Card } M \setminus N = \text{Card } M \Rightarrow$
 $\Rightarrow M \cap N = \emptyset$. 18. $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{3, 9, 27, 81\}$. 19. $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$.
 20. $A \setminus B = \{1, 5, 15, 60\}; A \cap B = \{2, 7, 17, 22, 57, 92\}$. 21. **a)** \emptyset ; **b)** 6. 22. $A \cup B \cup C =$
 $= \{0, 1, 3, 6, 9, 24, 36, 27, 576\}; C \setminus (A \cap B) = \{0, 36, 576\}$. 23. $A = \{0, 1, 2, 3\};$
 $B = \{1, 3, 7, 9\}; C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 24. $A = \{1, 2, 3\}; B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 25. $A \cap B \neq \emptyset$.
 26. **a)** 8; **b)** 12. 27. **a)** 2; **b)** 3. 28. $\frac{x+y+6}{x+y} \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + \frac{6}{x+y} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{6}{x+y} \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y \in$
 $\in \{1, 2, 3, 6\}$. $x+y = 1$ și $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ nu dă soluție. $x+y = 2$ și $x \geq y \Rightarrow x = 1, y = 1$.
 $x+y = 3$ și $x \geq y \Rightarrow x = 2, y = 1$. $x+y = 6$ și $x \geq y \Rightarrow x = 3, y = 3, x = 4, y = 2; x = 5, y = 1$. Deci
 $A = \{(1, 1); (2, 1); (3, 3); (4, 2); (5, 1)\}$. $\frac{x+6}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + \frac{6}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{6}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow x / 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 6\}$. $\frac{x^2+y^2}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + \frac{x^2}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} \in \mathbb{N}$. Din $x = 1$ și $\frac{1}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow y = 1$.
 Din $x = 2$ și $\frac{4}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{1, 2\}$. Din $x = 3$ și $\frac{9}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{1, 3\}$. Din $x = 6$ și $\frac{36}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 $\Rightarrow y \in \{1, 2, 3, 6\}$. Deci $B = \{(1, 1); (2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 3); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 6)\}$.
 1) $A \cap B = \{(1, 1); (2, 1); (3, 3)\}$. 2) $A \setminus B = \{(4, 2); (5, 1)\}$. 3) $B \setminus A = \{(2, 2); (3, 1); (6, 1);$
 $(6, 2); (6, 3); (6, 6)\}$. 29. $\text{Card } (A \cup B) = 17$ și $\text{Card } (A \cap B) = 0$. 30. $A = \{3, 4, 5, 6\};$
 $B = \{4, 5, 6, 7\}$. 31. $B = \{4, 5, 6\}$. $\text{Card } A \cup B = \text{Card } B \Rightarrow A \subseteq B$ etc. 32. $A = \{1, 2, 3, 6\};$
 $B = \{2, 4, 14\}$. 33. **a)** Se consideră cazurile: $n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3$, unde
 $k \in \mathbb{N}$. **b)** $n = 0$. 34. $X = \{51, 52, \dots, 100\} \cup Y$, unde $Y \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 50\}$. 35. $A \subseteq \{12, 13, 14, 15, 16\}$
 etc. 36. $A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ etc. 37. $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}; B = \{1, 3, 6, 12, 24\}$. 38. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\};$
 $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. 39. $A = \{1, 4\}; B = \{2, 3, 4\}$. 40. Din (1) și (2) rezultă $A \cup B \subseteq X$, însă