88. Să se demonstreze că:

a) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$;

b) $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}<\frac{19}{20}$;

c) $\sqrt{x^2-8x+25}+\sqrt{4x^2+12x+25}>7$, $x \in \mathbb{R}$.

Etapa locală, Galați, 2013, prof. Romeo Zamfir (prelucrare)

89. Fie a, b > 0. Demonstrați că:

a) $(a^3 + 1)(b^3 + 1) \ge (a^2b + 1)(b^2a + 1)$;

b) $a^3b^3 + 1 \ge ab(a + b)$ pentru a, b ≥ 1 sau a, b ≤ 1.

Etapa locală, Galați, 2013, prof. Vasile Popa

90. a) Calculați $S=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că $\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+...+\sqrt{n(n+1)}<n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Etapa locală, Caraş-Severin, 2013, RMCS 39/2012, prof. Laurențiu Panaitopol

91. a) Demonstrați inegalitatea: $\sqrt{x^2+xy+y^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$, pentru orice numere reale pozitive x, y.

b) Deduceți că $\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{zx} \ge \sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z.

Etapa locală, Suceava, 2013

92. Numerele reale strict pozitive x şi y verifică inegalitatea $2\sqrt{x}+\sqrt{y} \ge \sqrt{(x+1)(y+4)}$. Calculați media geometrică a numerelor x şi y.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2013

93. a) Fie a şi b două numere reale pozitive. Arătați că $a\sqrt{a}+b\sqrt{b} \ge a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

b) Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Etapa locală, Botoşani, 2013

IV. ECUAȚII ȘI INECUAȚII

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$y^2 + y - 10 = (x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x + 1).$$

Etapa locală, Brăila, 2008, prof. Liliana Stoian

2. Să se determine x, y, z $\in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$2x + 3y + 4z + 26 = 2\sqrt{2x-1} + 6\sqrt{3y-3} + 8\sqrt{4z-4}.$$

Etapa locală, Buzău, 2008

3. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\left[\frac{x+2}{3}\right] + \left[\frac{x+3}{4}\right] = 4$, unde [a] este partea întreagă a numărului real a.

Etapa locală, Ialomița, 2008

4. a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât are loc egalitatea: $x = \frac{x^2+1}{x^4+1}$.

b) Rezolvați sistemul format din ecuațiile: $\sqrt{x^2 - 6y + 15} = 1$ şi $\sqrt{y^2 + 4x + 3} = 2$.

Etapa locală, Sălaj, 2008

5. Determinați numerele distincte a şi b, ştiind că $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \{a, b\}$, iar $4b^2 + 9a^2 - 12b + 6a - 7 = 0$.

Etapa locală, Bacău, 2009

6. Să se rezolve ecuația $\left|\frac{6x}{3x+1}\right| + \left|\frac{3x+1}{6x}\right| = 2 - |3x-1|$.

Etapa locală, Bucureşti, 2009, prof. Vasilica Dilimoț-Niță

7. Să se determine numerele întregi nenule a şi b, pentru care:

$$\frac{a+1}{b} = \frac{b-1}{a} \text{ şi } \frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 2.$$

Etapa locală, Caraş-Severin, 2009, prof.Ovidiu Bădescu

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} + \ldots + \frac{x+n}{n+1} = n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat.

Etapa locală, Giurgiu, 2009, G.M. 9/2007, *prof. Luca Tuță*

9. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\{x\}^2 + 2x \cdot \min(x, [x]) = (x + 3)(x - 5) + 2x + 24$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x, iar [x] este partea întreagă a lui x.

b) Numerele naturale a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, a > b > c. Demonstrați că $\frac{2bc}{a+b+c}$ este număr natural.

Etapa locală, Ialomița, 2009

10. a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $2x + xy - y^2 = 13$.

b) Reprezentați graficul funcției $f: (-\infty, 0] \cup \{2, 3\}$, $f(x) = -x + 3$ și rezolvați inecuația $\frac{f(x)}{x+2} \le 2$.

Etapa locală, Ialomița, 2009

11. Determinați numerele naturale n, pentru care $\sqrt{n^2 + 8n + 37} \in \mathbb{Q}$.

Etapa locală, Iaşi, 2009

12. a) Arătați că nu există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x - \sqrt{3}| + \left|x - \frac{3}{2}\right| = x - 2$.

b) Dacă $x \in [-1, 3]$ și $y \in [-2, 7]$, atunci $x^2 + 2x + y^2 - 4y$ aparține intervalului $[-5, 36]$.

Etapa locală, Maramureş, 2009, G.M. 4/2008, *prof. Alexandru Vele*

13. Determinați a, b, c $\in \mathbb{N}$ care satisfac relația:

$$a + 2b + 3c + 41 = 4\sqrt{a+1} + 6\sqrt{2b+1} + 10\sqrt{3c+1}.$$

Etapa locală, Neamț, 2009, prof. Ion Ivan şi Ioan Mihuț

14. Determinați x, a, b care satisfac egalitățile: $453_{(x-1)} + 231_{(x)} = \overline{4ab}$.

Etapa locală, Olt, 2009, prof. Ioana Nițu şi Victoria Negrilă

15. a) Demonstrați că ecuația $(x + 1)(x + 2) = y(y + 2)$ nu are soluții în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Demonstrați că ecuația $(x + 1)(x + 2) = (y + 2)(y + 3)$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Etapa locală, Vâlcea, 2009, prof. Damian Marinescu, G.M.

16. Determinați soluțiile naturale ale ecuației:

$$6\sqrt{x-2} + 8\sqrt{y-3} + 10\sqrt{z-4} = x + y + z + 41.$$

Etapa locală, Braşov, 2010, G.M. 2/2009

17. Determinați numerele reale x, y, z, dacă $x + y + z = 6$ şi $xy + xz + yz = 12$.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2010, Brăila, 2010
Prof. Gheorghe Parancea, G.M. 6/2009

18. Determinați cel mai mic număr real k, ştiind că ecuația:

$\frac{x+y-k}{2} = \sqrt{x-2009} + \sqrt{y+2010}$ are soluții reale.

Etapa locală, Covasna, 2010

19. Fie a, b $\in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că ecuația $(n + 23)^a = (n + 5)^b$ are soluții $n \in \mathbb{N}^*$ dacă şi numai dacă $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

Etapa locală, Dâmbovița, 2010, prof. Călin Burduşel

20. Să se rezolve ecuația $x + \frac{x+1}{2} + \frac{x+3}{4} + \frac{x+5}{6} + ... + \frac{x+2009}{2010} = 1006$.

Etapa locală, Mehedinți, 2010

21. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\sqrt{x^2-20}+\sqrt{45-x^2}=|2x+5|$.

Etapa locală, Sibiu, 2010, G.M.

22. Determinați perechile de numere naturale (a, b) care verifică egalitatea:

$$a+2b-b^2=\sqrt{2a+a^2+|2a+1-2b|}.$$

Etapa județeană, 2010, prof. Adriana şi Lucian Dragomir

23. Determinați numărul natural n, pentru care:

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+...+\frac{1}{\sqrt{(2n+1)+2\sqrt{n(n+1)}}}=10.$$

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2011, E: 1013 Sup. G.M./2010

24. Să se determine numerele naturale n, pentru care există numerele întregi a, b, c, astfel încât $n^2 = a + b + c$ şi $n^3 = a^2 + b^2 + c^2$.

Etapa locală, Galați, 2011, prof. Visilina Guița

25. Determinați numerele întregi a şi b, pentru care: $\left(\frac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+a}+\frac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b}\right)\in\mathbb{Z}$.

Etapa locală, Caraş-Severin, 2011, RMCS 28/2009

26. Dacă $x \in (-3, 5)$ şi $y \in (-1, 6)$, arătați că numărul:

$$a=\sqrt{x^2+y^2+2xy-22x-22y+121}+\sqrt{x^2+y^2+2xy+8x+8y+16}$$

este număr natural.

Etapa locală, Caraş-Severin, 2011, prof. Vasile Chiş

27. Să se determine $x \in [13, \infty)$ pentru care: $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=1$.

Etapa locală, Mehedinți, 2011

28. Aflați numerele reale x, y, z şi a, astfel încât:

$$x + y + z = 1 - a;\ xy + xz + yz = \frac{2+a^2}{2}.$$

Etapa locală, Mehedinți, 2011

29. a) Calculați: $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

b) Rezolvați în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ecuația $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{27}}$.

Etapa locală, Suceava, 2011, prof. Laura Schroder

30. Aflați numerele reale a, b, c, ştiind că $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \{a, b, c\}$ şi că $a^2 + b^2 - 2b - a = 3$.

Etapa locală, Bihor, 2011

31. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $4044121\{x\}^2 - 2011x - 2011\{x\} + 2011 = 4038090 \cdot [x] + 2010$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x, iar $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Etapa locală, Olt, 2011, prof. Iuliana Traşcă

32. Fie a şi b două numere raţionale diferite, $a \geq 0$. Considerăm mulţimea $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, unde $x_1 = a$, $x_2 = b$ şi $x_{n+1} = \dfrac{(n+2)x_n + n \cdot x_{n+2}}{(n+2)+n}$, oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3\}$.

a) Exprimaţi în funcţie de a şi b elementele mulţimii A.

b) Dacă $A - \{a, b\} \subset \mathbb{N}$ şi $b < 1$, determinaţi numărul a.

Etapa locală, Bucureşti, 2011, prof. Mircea Fianu

33. Determinaţi numerele reale strict pozitive a, b, c, ştiind că:

$$\sqrt{a+12-\sqrt{12a}} + \sqrt{b+6-\sqrt{20b}} + \sqrt{c+10-\sqrt{24c}} \leq 6 .$$

Etapa locală, Botoşani, 2011

34. Aflaţi numărul natural n, pentru care: $\sqrt{\sqrt{n}+1} - \sqrt{\sqrt{n}-1} = \sqrt{22} - \sqrt{20}$.

Etapa locală, Argeş, 2011, prof. Ionel Tudor, G.M. 11/2010

35. Aflaţi numerele x şi y, pentru care expresia $E(x, y) = 5x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 6y + 33$ are valoare minimă şi precizaţi această valoare.

Etapa locală, Sălaj, 2011

36. a) Demonstraţi că $3a^2 - 2a + 3 \geq \dfrac{8}{3}$, pentru orice număr real a.

b) Determinaţi numerele reale x şi y cu proprietatea că:

$$(x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) - 2 = 0.$$

Etapa judeţeană,, 2011

37. a) Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$x^2 \cdot y + x \cdot y^2 = 2x^2 + 2y^2 - 32.$$

b) Aflaţi numerele x, y, z ştiind că: $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2xy-2x-z^2=9 \end{cases}$.

Etapa locală, Buzău, 2012

38. Rezolvaţi ecuaţia: $1 + [x] = [px]$, unde p este un număr natural, iar [a] reprezintă partea întreagă a lui a.

Etapa locală, Dolj, 2012, G.M. 7-8-9/2010

39. Dacă [x] reprezintă partea întreagă a lui x, să se rezolve ecuaţia:

$$\left[\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right] = \frac{x-1}{3}.$$

Etapa locală, Gorj, 2012

40. Fie $x^2 + xy + x = 14$ şi $y^2 + xy + y = 28$, unde $x, y \in \mathbb{N}$. Determinaţi suma numerelor x şi y.

Etapa locală, Covasna, 2012

41. Fie ecuaţia $2^{[x] + [y] + 1} - 9 \cdot 2^{[x]} = 2012$, cu $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, unde prin [a] s-a notat partea întreagă a numărului real a.

a) Dovediţi că perechea $\left(2\sqrt{2};\ 8{,}3\right)$ este soluţie a ecuaţiei.

b) Rezolvaţi ecuaţia pentru $x > 0$, $y > 0$.

c) Arătați că pentru $x < 0$, $y < 0$ ecuația nu are soluții.

Etapa locală, Suceava, 2012, prof. Ecaterina Huluță

42. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$5(2x^2 + y^2) + 6y \cdot (2x + 1) = 4x - 13.$$

Etapa locală, Timiş, 2012, G.M.

43. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ şi $x = 2005^{a+b-2c}$, $y = 2005^{b+c-2a}$, $z = 2005^{c+a-2b}$. Demonstrați că:

$$\sqrt{\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}} = 1.$$

„Argeşgim", Piteşti, 2008, prof. Angela Ion

44. Determinați perechile de numere întregi nenule (x, y) care satisfac relația:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2\cdot\left(\frac{1}{xy}-1\right).$$

Etapa locală, Maramureş, 2012 (S.E. 11323 adaptare)

45. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $|||x| - a| - 5| = 4$ să aibă exact cinci soluții.

Etapa locală, Ilfov, 2012

46. Determinați numărul de perechi de numere naturale (m, n), $m < n$, care verifică egalitatea $\frac{3}{8}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

„Jose Marti", Bucureşti, 2012

47. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația $2x\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}-2y\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}$.

„Petru Moroşanu", 2010, prof. Constantin Apostol

48. Determinați numărul a cu proprietatea că $(a^2 + 2a - 3)^3 + (a^2 - 2a - 15)^3 = 8(a^2 - 9)^3$.

„Alexandru Myller",, 2011

49. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[x+1]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=\frac{2x+3}{2}$.

prof. Gheorghe Fianu

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{-2013; 2013\}$. Să se determine mulțimea numerelor naturale n pentru care este adevărată egalitatea: $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$.

Etapa locală, Călăraşi, 2013, prof. Lucian Ioniță

50. Determinați numărul natural $\overline{xy}$ pentru care $\frac{1}{\sqrt{\overline{xy}}-1}=\overline{0,xy}$.

Etapa locală, Dolj, 2013, G.M. 6/2010

51. Arătați că dacă $3a^2 + 3b^2 - 2a - 14b + \frac{46}{3} = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $\frac{4}{3} \le a + b \le 4$.

Etapa locală, Dolj, 2013

52. Determinați numerele întregi x şi y pentru care $x^2 - 5^y = 8$.

Etapa locală, Caraş-Severin, 2013, prof. Ovidiu Bădescu, RMCS 40/2012

53. Aflați x, y ∈ $\mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{x-1936}+\sqrt{y-1936}=\frac{x+y}{88}$.

Etapa locală, Gorj, 2013

54. M-am gândit la un număr, l-am adunat cu 3, rezultatul l-am ridicat la pătrat, noul rezultat l-am împărțit la 4, din rezultatul obținut am scăzut numărul cu 2 mai mare decât numărul la care m-am gândit, din rezultatul astfel obținut am extras rădăcină pătrată și am obținut ca rezultat final 8. La ce număr m-am gândit?

Etapa locală, Covasna, 2013

55. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația: $\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+17}+\sqrt{z^2-2z+2}=3$.

Etapa locală, Covasna, 2013

56. Se consideră expresia $E(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b, c ∈ $\mathbb{R}$. Determinați numerele a, b și c, știind că $E(x) \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $E(2013) = 2013$.

Etapa locală, București, 2013, prof. Cosmin Nițu

57. Rezolvați în numere întregi ecuația: $\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{1}{2}$.

Etapa locală, Dâmbovița, 2013, R.M.T. 4/2009

58. a) Determinați numerele reale x, y, z, știind că $x + y + z = 6$ și $xy + xz + yz = 12$.

b) Arătați că numărul $S = 6^3 + 13^3 + 20^3 + \ldots + (7n - 1)^3 + 15n$ se divide cu 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Etapa locală, Vrancea, 2013

59. Să se arate că pentru oricare a, b ∈ $\mathbb{N}$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^2}{4\sqrt{2}}+\frac{b^2}{4\sqrt{3}}\geq\frac{a\cdot b}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Etapa locală, Harghita, 2013

60. a, b, c ∈ $\mathbb{Q}^*$ și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ = abc. Să se arate că numărul:

$\sqrt{(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)}$ este rațional.

Etapa locală, Teleorman, 2013

61. Determinați x, y, z ∈ $\mathbb{R}$ care verifică relațiile: $\begin{cases}25x^2+20y^2+13z^2\leq 1952\\ 3xy+6yz+4zx=488\\ x+y+z=18\end{cases}$.

Etapa locală, Teleorman, 2013, prof. Mihai Bogdan

62. Demonstrați că nu există numere naturale x, y, z pentru care $x + 3y + 5z = 2012$ și $x^2 + y^2 + 3z^2 = 2013$.

Etapa locală, Mureș, 2013

63. Rezolvați ecuațiile:

a) $\left|\frac{10x}{5x+1}\right| + \left|\frac{5x+1}{10x}\right| + |5x-1| = 2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5},\ 0\right\}$;

b) $x^3 - 4x + 4 = \frac{x^4}{4}$.

Etapa locală, Timiş, 2013, RMT 1/2013

64. Rezolvați ecuația $(x + y)^2 - 2(x - 2)(y + 1) + 1 = 0$.

Etapa locală, Vrancea, 2013, RMI Constanța 1/2011, prof. Vasile Tarciniu

65. Fie x, y, z numere reale astfel încât $\frac{xyz}{x+y} = -1$, $\frac{xyz}{y+z} = 1$ şi $\frac{xyz}{z+x} = a$, unde $a > \frac{1}{2}$ este un număr real. Determinați produsul xyz.

Etapa locală, Ialomița, 2013, prof. Marin Chirciu, G.M. 11/2012

66. a) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$xyz - xy - xz - yz + x + y + z = 2014.$$

b) Demonstrați că există a, b, c, d numere naturale nenule şi distincte, astfel ca:

$$2013 = a^2 - b^2 - c^2 + d^2.$$

Etapa locală, Sibiu, 2013, prof. Petru Vlad

67. a) Să se arate că $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} \in \mathbb{Q},\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\frac{3}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}} = x+\frac{2012}{2013}.$$

Etapa locală, Giurgiu, 2013

68. Determinați tripletele de numere întregi (x, y, z) cu proprietatea că:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16(x + y + z).$$

Etapa județeană, 2013

69. Determinați toate numerele reale x pentru care numărul $a = \frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ este număr întreg.

Etapa județeană, 2013

GEOMETRIE

I. PARALELISM ÎN SPAȚIU

1. Pe planul triunghiului isoscel ABC ([AB] ≡ [AC]) se duce perpendiculara în G (centrul de greutate) şi se ia pe aceasta un punct D. Fie punctul N ∈ [AB] astfel încât $\frac{AN}{NB} = \frac{7}{2}$ şi prin N se duce un plan α ∥ (DBC) care intersectează DG în Q.

a) Stabiliți valoarea raportului $\frac{GQ}{GD}$.

b) Determinați m(∢(α, (ABC))) ştiind că $DG = \frac{AM}{3}$, unde M este mijlocul lui [BC].

Etapa locală, Argeş, 2008

2. Fie ABCD tetraedru cu toate muchiile de lungime a, (a > 0), iar M şi N sunt mijloacele muchiilor [AB] respectiv [CD]; AO este înălțime a tetraedrului. În punctul P, care este simetricul lui B față de D, se ridică perpendiculara pe planul (BCD) pe care se consideră segmentul [SP] de lungime a.

a) Arătați că SP ∥ (AOD).

b) Calculați distanța de la S la BC şi măsura unghiului dintre planele (SBC) şi (BCD).

c) Calculați lungimea segmentului [MN].

d) Arătați că $RQ \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$, unde R ∈ [AB], Q ∈ [CD].

Etapa locală, Braşov, 2008, prof. Dorina Bocu

3. Fie A, B, C, D puncte necoplanare, [AB] ≡ [AC] şi E ∈ (AB), F ∈ (AC) astfel încât [AE] ≡ [CF].

a) Arătați că dreapta OP este paralelă cu planul (BCD), unde O şi P sunt mijloacele segmentelor [EF] respectiv [AD].

b) Dacă M este mijlocul segmentului (BC), G centrul de greutate al ΔDBC şi AG ∩ ∩ MP = {T}, calculați valoarea raportului $\frac{MT}{TP}$.

Etapa locală, Braşov, 2008

4. Fie ABCD şi BCEF două paralelograme situate în plane diferite, iar punctul P mijlocul segmentului [AB]. Demonstrați că AE ∥ (FPC).

Etapa locală, Brăila, 2008

5. Un tetraedru regulat este secționat cu un plan după un romb. Să se demonstreze că rombul este pătrat.

Etapa județeană, 2008

6. Fie ABCD trapez (AB || CD) în care AB = 6a; CD = a, AC ⊥ BD şi m(∢BAD) = = 60°. Ştiind că MA ⊥ (ABC), NB || MA, MA = 6a, NB = $2a\sqrt{3}$, se cere:

a) arătați că AD = 4a;

b) calculați m(∢((MCD), (NCD))).

Etapa locală, Alba, 2009

7. Prin mijlocul M al muchiei (AB) a tetraedrului ABCD se duce un plan paralel cu AC şi BD care intersectează muchiile (BC), (CD) şi (DA) în N, P, Q. Determinați unghiul dreptelor AC şi BD, ştiind că aria patrulaterului MNPQ este $\frac{1}{8} \cdot AC \cdot BD$.

Etapa locală, Arad, 2009

8. Pătratul ABCD şi triunghiul echilateral ABE sunt incluse în plane distincte. Fie M, N ∈ (AB) astfel încât AM = MN = NB şi notăm cu G şi F centrele de greutate ale triunghiurilor BEM şi ADN.

a) Demonstrați că FG || (CDE).

b) Aflați FG ştiind că AB = 18 cm şi măsura unghiului format de dreptele AB şi DE este egală cu măsura unghiului format de AD şi CE.

Etapa locală, Botoşani, 2009

9. Se consideră patru puncte diferite, necoplanare V, A, B, C astfel încât VB = AC = = BC şi VA > VC (m(∢VBA) > m(∢VBC)). Fie [BM bisectoarea ∢VBA, M ∈ (VA), [BN bisectoarea ∢VBC, N ∈ (VC) şi [AF bisectoarea ∢CAB, F ∈ (BC); MN ∩ ∩ (ABC) = {P}; PF ∩ (AB) = {E}; (VE) ∩ (BM) = {Q}; (AF) ∩ (CE) = {J}.

Să se demonstreze că QJ || (VAC).

Etapa locală, Galați, 2009, prof. Iulian Stiubianu

10. Fie un segment [AB] şi un plan α astfel încât [AB] ∩ α = ∅ şi [AB] neparalel cu α; Pr_α[AB] = [MN].

a) Determinați poziția punctului C ∈ α pentru care AC + BC este minimă.

b) Dacă AB = 50 cm, AM = 10 cm, BN = 40 cm, determinați d(P, MN) astfel încât P ∈ α şi ΔABP este echilateral.

Etapa locală, Mureş, 2009, prof. Sebestyen Julia

11. Segmentele [AB] şi [CD] sunt situate pe drepte necoplanare, iar M ∈ [AB], N ∈ ∈ [CD], Z ∈ [MD], X ∈ [MC], Y ∈ [BN], T ∈ [AN] astfel ca 2AM = MB; CN = = 3ND; 3ZD = MZ; 3MX = XC, 2YN = BY; 2AT = TN.

Demonstrați că X ∈ (YZT).

Etapa locală, Satu Mare, 2009, prof. Petru Braica

12. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi G centrul de greutate al ΔBCD. Paralelele prin B, C, D la dreapta AG intersectează planele (ACD), (ABD) respectiv (ABC) în punctele M, N respectiv P. Arătați că:

a) BM = 3AG; b) Arătați că (MNP) || (BCD).

Etapa locală, Teleorman, 2009

$x \in [-3, 1]$ şi $y \in [-2, 0] \Rightarrow |x + 3| = x + 3$, iar $|y + 4| = y + 4$. Atunci avem: $2\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{y^2+8y+16}=2x-y+2$; $x \in [-3, 1] \Rightarrow -3 \le x \le 1 \Rightarrow -6 \le 2x \le 2$; $y \in [-2, 0] \Rightarrow -2 \le y \le 0 \Rightarrow 0 \le -y \le +2 \Rightarrow -6 \le 2x - y \le 4 \Rightarrow -4 \le 2x - y + 2 \le 6 \Rightarrow 2x - y + 2 \in [-4, 6]$; b) $a^2+\frac{1}{a^2-1}\ge 3 \Leftrightarrow \frac{a^4-a^2+1}{a^2-1}-3 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a^4-a^2+1-3a^2+3}{a^2-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(a^2-2)^2}{a^2-1}\ge 0$, adevărat deoarece din $a < -1 \Rightarrow a^2 > 1$ şi atunci $a^2 - 1 > 0$. Altfel $a^2+\frac{1}{a^2-1}\ge 3 \Leftrightarrow a^2-1+ +\frac{1}{a^2-1}\ge 2\sqrt{(a^2-1)\cdot\frac{1}{a^2-1}}\ge 2$. **12.** $a^2-4\sqrt{3}\cdot a+21=(a-2\sqrt{3})^2+9\ge 9 \Rightarrow \sqrt{a^2-4a\sqrt{3}+21}\ge 3$; $b^2-2b\sqrt{3}+28=(b-\sqrt{3})^2+25\ge 25 \Rightarrow \sqrt{b^2-2b\sqrt{3}+28}\ \ge 5$; $c^2-6c+25=(c-3)^2+16 \ge \ge 16 \Rightarrow \sqrt{c^2-6c+25}\ge 4$. Adunând inegalităţile de mai sus $\Rightarrow \sqrt{a^2-4a\sqrt{3}+21}+ + \sqrt{b^2-2b\sqrt{3}+28}+\sqrt{c^2-6c+25}\ge 12$. Ţinând cont de cerinţa exerciţiului se impune egalitate, care se obţine pentru $a=2\sqrt{3}, b=\sqrt{3}, c=3$. Observăm că $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow$ triunghiul este dreptunghic cu b şi c catete, iar a ipotenuza şi cum o catetă este jumătate din ipotenuză $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ avem un triunghi dreptunghic cu măsura unghiurilor: 30°, 60°, 90°. **13.** a) $E(x) = x^4 - x^3 + + x^2 - 3x + 2 = x^3(x - 1) + (x - 1)(x - 2) = (x - 1)(x^3 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x^2 + 2 + x) = (x - - 1)^2(x^2 + x + 2)$; $(x - 1)^2 \ge 0$ iar $x^2 + x + 2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4} > 0$, deci $E(x) \ge 0$; b) $E(a) = (a - - 1)^2(a^2 + a + 2)$. Pentru ca E(a) să fie pătrat perfect, trebuie ca $a^2 + a + 2 = k^2 \mid \cdot 4 \Rightarrow 4a^2 + 4a + + 8 = 4k^2 \Leftrightarrow (2a + 1)^2 + 7 = 4k^2 \Leftrightarrow (2a + 1)^2 - 4k^2 = -7 \Leftrightarrow (2a + 1 - 2k)(2a + 1 + 2k) = -7$;

1) $\begin{cases} 2a+1-2k=-7 \\ 2a+1+2k=1 \quad (+) \end{cases} \Rightarrow 4a + 2 = -6 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2;$

2) $\begin{cases} 2a+1-2k=-1 \\ 2a+1+2k=7 \quad (+) \end{cases} \Rightarrow 4a + 2 = 6 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$. Deci E(a) este pătrat perfect pentru $a \in \{-2, 1\}$. **14.** a) $\frac{(a^2+b^2)-(a-b)^2}{2}=\frac{a^2+b^2-a^2+2ab-b^2}{2}=\frac{2ab}{2}= ab$; b) Dacă $a(a - b)$ şi $b(b - a) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ că şi suma $a(a - b) + b(b - a) = (a - b)^2$ este raţional. Dar $a(a - b) \in \mathbb{Q}$ şi $b(b - a) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ produsul lor, adică $ab(a - b)^2 \in \mathbb{Q}$. Împărţind cele două relaţii $\Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Q}$. **15.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow xy + xz + yz = xyz$, (1); $\frac{xy}{z}+1=\frac{xyz+z^2}{z^2}=\frac{xy+xz+yz+z^2}{z^2}=\frac{(x+z)(y+z)}{z^2}$; $\frac{yz}{x}+1=\frac{xyz+x^2}{x^2}=\frac{(y+x)(z+x)}{x^2}$; $\frac{xz}{y}+1=\frac{xyz+y^2}{y^2}=\frac{(x+y)(z+y)}{y^2}$. Înmulţind relaţiile de mai sus, obţinem: $N = \frac{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}{x^2y^2z^2}$, evident pozitiv $\Rightarrow \sqrt{N}=\left|\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\right| \in \mathbb{Q}$. **16.** $\frac{9x^2+12x+5}{3x+2}=k \Leftrightarrow 9x^2 + x(12 - 3k) + 5 - 2k = 0$. Calculăm $\Delta = (12 - 3k)^2 - 36(5 -$

$-2k) = 9k^2 - 36$, care este nenegativ pentru $k \le -2$. Aşadar, nu există o cea mai mică valoare a expresiei pentru orice x real. **17.** a) $(x + y)^4 - (x - y)^4 = 40 \Leftrightarrow [(x + y)^2 - (x - y)^2] \cdot [(x + y)^2 + (x - y)^2] = 40 \Leftrightarrow 4xy(2x^2 + 2y^2) = 40 \Leftrightarrow 8xy(x^2 + y^2) = 40 \Leftrightarrow 40xy = 40 \Leftrightarrow xy = 1$; b) Folosim relațiile $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ şi $\frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$. Atunci $E(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-1} \Rightarrow E(x) = 0 \Rightarrow E(-1) + E(-2) + \ldots + E(-2009) = 0 < 2009$. **18.** a) $25^n - 2 \cdot 5^n + 1 = (5^n)^2 - 2 \cdot 5^n + 1 = (5^n - 1)^2$. Fracția devine $\frac{(5^n-1)^2}{2(5^n-1)} = \frac{5^n-1}{2}$. Evident 5^n este număr impar $\Rightarrow 5^n - 1$ număr par, adică divizibil cu 2 $\Rightarrow 5^n - 1 \,\vdots\, 2$. Deci fracția este număr natural, pentru $n \in \mathbb{N}$; b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \le 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \le 0$, dar $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \ge 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ şi $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, -2)\}$.
19. $a^2 + b^2 - 4\sqrt{3}a - 6\sqrt{2}b + 30 \le 0 \Leftrightarrow (a^2 - 4\sqrt{3}a + 12) + (b^2 - 6\sqrt{2}b + 18) \le 0 \Leftrightarrow (a - 2\sqrt{3})^2 + (b - 3\sqrt{2})^2 \le 0$ dar $(a - 2\sqrt{3})^2 \ge 0, (b - 3\sqrt{2})^2 \ge 0 \Rightarrow (a - 2\sqrt{3})^2 + (b - 3\sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 2\sqrt{3})^2 = 0$ şi $(b - 3\sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$ şi $b = 3\sqrt{2}$. Numărul $x = \left(\frac{12}{2\sqrt{3}} + \frac{18}{3\sqrt{2}}\right)(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = \left(\frac{6\sqrt{3}}{3} + \frac{6\sqrt{2}}{2}\right)(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 18 - 12 = 6 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$. **20.** Fie $x - 1$, x şi $x + 1$ cele trei numere întregi consecutive. Atunci $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 3x^2 + 2$. Vom demonstra că numărul $3x^2 + 2$ nu poate fi cubul unui număr natural, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$. Numărul obținut este de forma $3p + 2$, iar numerele de forma $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$ au cuburile de forma M_9, $M_9 + 1$ sau $M_9 - 1$. Dacă $x = 3k \Rightarrow 3x^2 + 2 = 27k^2 + 2 = M_9 + 2$ nu este cub perfect. Dacă $x = 3k + 1 \Rightarrow 3x^2 + 2 = 27k^2 + 18k + 5 = M_9 + 5$ nu este cub perfect. Dacă $x = 3k + 2 \Rightarrow 3x^2 + 2 = 27k^2 + 36k + 14 = M_9 + 5$ nu este cub perfect. Deci suma pătratelor a trei numere întregi consecutive nu poate fi cub perfect. **21.** Vom scrie expresia $E(x, y)$ ca o sumă de pătrate perfecte. $E(x, y) = x^2 + 4x^2 + 2xy + 2xy + y^2 + 6x + 3y + 3y + 9 + 9 + 15 = (x^2 - 6x + 9) + (4x^2 + 2xy + 6x) + (2xy + y^2 + 3y) + (6x + 3y + 9) + 15 = (x - 3)^2 + 2x(2x + y + 3) + y(2x + y + 3) + 3(2x + y + 3) + 15 = (x - 3)^2 + (2x + y + 3)^2 + 15$. Cum $(x - 3)^2 \ge 0$, $(2x + y + 3)^2 \ge 0$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow E(x, y) \ge 15$. Deci min $E(x, y) = 15$ care se obține pentru $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ şi $9 + y = 0 \Rightarrow y = -9$. **22.** Relația dată este echivalentă cu: $\sqrt{(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2y + 1) + 4} + \sqrt{(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2by + b^2) + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2 + 4} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-b)^2 + 1} = 3$. Cum $(x - a)^2 \ge 0$, $x \ne a$, $(x - 2)^2 \ge 0$, $(y - 1)^2 \ge 0$, $(y - b)^2 \ge 0$, $y \ne b \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - a = 0 \Rightarrow x = a \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow a = 2$ şi $\left\langle\begin{matrix} y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \\ y - b = 0 \Rightarrow y = b \end{matrix}\right. \Rightarrow b = 1$. Deci $a = 2$ şi $b = 1$ pentru $x = 2$ şi $y = 1$.

23. *Soluția I*: Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Conform ipotezei, $9N = a^2 + b^2$. Cum pătratul unui număr natural este de forma M_3 sau $M_3 + 1$ şi $a^2 + b^2 = M_3 \Rightarrow 3 \mid a^2$ şi $3 \mid b^2 \Rightarrow 3 \mid a$ şi $3 \mid b$. Din $3 \mid a$, rezultă că există un număr natural nenul a_1, astfel încât $a = 3a_1$. Din $3 \mid b$ rezultă că există un număr natural nenul b_1, astfel încât $b = 3b_1 \Rightarrow 9 \cdot N = 9a_1^2 + 9b_1^2 \Rightarrow N = a_1^2 + b_1^2$. Avem $10 \cdot N = 10 \cdot a_1^2 + 10b_1^2 = a_1^2 + 9a_1^2 + b_1^2 + 9b_1^2 + 6a_1b_1 - 6a_1b_1 \Rightarrow 10 \cdot N = (a_1 + 3b_1)^2 + (b_1 - 3a_1)^2$. Deci 10N se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte. **24.** a) $x^3 - 1 = y(x - 1)$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = y(x - 1) \mid : (x - 1) \Rightarrow y = x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Deci $y > 0$; b) Din $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 4^3 \Leftarrow x - \frac{1}{x} = 4$, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$, iar $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 18 + 2 = 20 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \pm 2\sqrt{5}$; $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm 40\sqrt{5} \pm 6\sqrt{5} = \pm 34\sqrt{5}$ şi $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 324 - 2 = 322$. Atunci $E = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = \pm 2\sqrt{5} + 18 \pm 34\sqrt{5} + 322$; $E = 340 \pm 36\sqrt{5}$. **25.** Fie $x \in \mathbb{N}^*$. Conform ipotezei $\Rightarrow x = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Atunci $2x = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 2ab - 2ab = (a + b)^2 + (a - b)^2$ şi $x^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$. **26.** Avem: $b^3 + c^3 = (b + c)^3 - 3bc(b + c) \Rightarrow 3bc(b + c) = (b + c)^3 - (b^3 + c^3) \Rightarrow$ $\Rightarrow bc \cdot (b + c) = \frac{(b+c)^3 - (b^3 + c^3)}{3} = \frac{(b+c)^3 - a^3}{3} = \frac{(b + c - a) \cdot [(b+c)^2 + a(b+c) + a^2]}{3}$. De unde $\frac{bc(b+c)}{b+c-a} = \frac{(b+c)^2 + a(b+c) + a^2}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow A = M_3$, unde $A = (b + c)^2 + a(b + c) + a^2$. Vom demonstra că un număr şi cubul său dau acelaşi rest la împărţirea cu 3. Fie $x = 3k + r$, $r < 3$, $r \in \{0, 1, 2\}$. Atunci $x^3 = 27k^3 + 27k^2r + 9k \cdot r^2 + r^3$, $r \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow x^3 = M_9$ sau $M_9 + 1$ sau $M_9 - 1$. Cum $a^3 = b^3 + c^3$, rezultă că a^3 şi $b^3 + c^3$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 3; $3 \mid b + c$ şi $3 \mid a^2 \Rightarrow 3 \mid (b + c)^2 + a(b + c) + a^2 \Rightarrow 3 \mid a^2 + a^2 + a^2 \Rightarrow 3 \mid a^2 \Rightarrow 3 \mid A$. Deci $\frac{bc(b+c)}{b+c-a} \in \mathbb{Z}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b + c$. **27.** Notăm $a = (4n + 5)^2 + (4n + 5) = (4n + 5)(4n + 6)$; $b = (4n + 4)^2 - (4n + 4) = (4n + 4)(4n + 3)$ şi $c = (5n + 5)(16n + 7)(16n - 7)$. Atunci numărul $A = \frac{abc}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \mid a \cdot b \cdot c$. Cum $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, avem $a = (8k + 9)(8k + 4 + 6) = (8k + 9)(8k + 10) = 2(8k + 9)(4k + 5) \Rightarrow 2 \mid a$, (1); $b = 4(2k + 1 + 1)(4k + 4 + 3) = 8(k + 1)(4k + 7) \Rightarrow 8 \mid b$, (2) şi $c = 5(2k + 2)(16k + 23)(16k + 9) \Rightarrow 5 \mid c$, (3). Cum $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow k$ poate fi M_3, $M_3 + 1$ sau $M_3 + 2$. Dacă $k = M_3 \Rightarrow 8k + 9 = M_3 \Rightarrow 3 \mid a$ şi $16k + 9 = M_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 \mid c \Rightarrow 3^2 \mid a \cdot c$, (4). Din (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \mid a \cdot b \cdot c \Rightarrow A \in \mathbb{N}$. Dacă $k = M_3 + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4k + 5 = M_3 \Rightarrow 3 \mid a$ şi $16k + 23 = M_3 \Rightarrow 3 \mid c \Rightarrow 3^2 \mid a \cdot c$, (4) $\Rightarrow A \in \mathbb{N}$. Dacă $k = M_3 + 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4k + 7 = M_3 \Rightarrow 3 \mid b$ şi $k + 1 = M_3 \Rightarrow b = M_8 \cdot M_9 = M_{72} \overset{(1)-(4)}{\Rightarrow} A \in \mathbb{N}$. **28.** Fie $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$.

Conform ipotezei $\Rightarrow$ $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ şi $z = e^2 + f^2$; a) Atunci $x \cdot y = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = m^2 + n^2$, unde $m = ac + bd$ şi $n = ad - bc$; b) $x \cdot y \cdot z = (m^2 + n^2)(e^2 + f^2) = m^2e^2 + m^2f^2 + n^2e^2 + n^2f^2 + 2mnef - 2mnef = (me + nf)^2 + (mf - ne)^2$.

29. a) $E(x) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{3x+3-2x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} \Rightarrow E(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$;

b) $a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{99\cdot 100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$;

$a < \frac{99}{100}$. Cum $0 < a < 1 \Rightarrow [a] = 0$ şi $\{a\} = \frac{99}{100}$ dar $\frac{99}{100} < \frac{100}{101} \Rightarrow \{a\} < \frac{100}{101}$; $(100^2 - 1 < 100^2)$.

30. a) $N = a^2 + 4b^2 + 4ab - (b^2 + c^2 - 2bc) = (a + 2b)^2 - (b - c)^2$; b) Dacă $N = -5 \Rightarrow (a + 2b + b - c)(a + 2b - b + c) = -5 \Leftrightarrow (a + 3b - c)(a + b + c) = -5$. Avem următoarele situaţii:

i) $\begin{cases} a+3b-c=-5 \\ a+b+c=1 \quad (+) \end{cases} \Rightarrow 2a + 4b = -4 \Rightarrow a + 2b = -2 \Rightarrow |a + 2b| = 2$;

ii) $\begin{cases} a+3b-c=1 \\ a+b+c=-5 \quad (+) \end{cases} \Rightarrow 2a + 4b = -4 \Rightarrow a + 2b = -2 \Rightarrow |a + 2b| = 2$;

iii) $\begin{cases} a+3b-c=-1 \\ a+b+c=5 \quad (+) \end{cases} \Rightarrow 2a + 4b = 4 \Rightarrow a + 2b = 2 \Rightarrow |a + 2b| = 2$;

iv) $\begin{cases} a+3b-c=5 \\ a+b+c=-1 \quad (+) \end{cases} \Rightarrow 2a + 4b = 4 \Rightarrow a + 2b = 2 \Rightarrow |a + 2b| = 2$. Deci $|a + 2b| = 2$.

31. a) Descompunem în factori expresiile $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$; $2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = 2x(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(2x - 1)$; $x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x + 1 - 9 = (x - 1)^2 - 9 = (x - 1 + 3)(x - 1 - 3) = (x + 2)(x - 4)$. Aducem fracţiile din paranteză la cel mai mic numitor comun, obţinem după efectuarea calculelor: $E(x) = \frac{(x+2)(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)} \cdot \frac{(x-2)(2x-1)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x-2}{x-4}$;

b) $E(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-4} \in \mathbb{Z}$, cu $x \neq 4 \Leftrightarrow x - 4 \mid x - 2$ dar $x - 4 \mid x - 4 \Rightarrow x - 4 \mid 2 \Rightarrow x - 4 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow x \in \{2, 3, 5, 6\}$. Deci $A = \{2, 3, 5, 6\}$. **32.** a) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - 5x + 3 + 6) + 9 = (x^2 - 5x + 3) \cdot [(x^2 - 5x + 3) + 6] + 9 = (x^2 - 5x + 3)^2 + 6(x^2 - 5x + 3) + 9 = (x^2 - 5x + 3 + 3)^2 = (x^2 - 5x + 6)^2 = (x - 2)^2(x - 3)^2$; b) $A(x, y) = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9 + 1} = \sqrt{(x-3)^2 + 4} + \sqrt{(y-3)^2 + 1}$, dar $\sqrt{(x-3)^2 + 4} \geq 2$ şi $\sqrt{(y-3)^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow A(x, y) \geq 3$. Deci $\min A(x, y) = 3$ şi se realizează pentru $(x - 3)^2 = 0$, $(y - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = y = 3$.

33. $3x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y + 11 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 6\sqrt{3}x + 9) + (y^2 - 2\sqrt{2}y + 2) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 3)^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 0$ şi cum $(\sqrt{3}x - 3)^2 \geq 0$, $(y - \sqrt{2})^2 \geq 0$, egalitatea are loc pentru $\sqrt{3}x - 3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ şi $y - \sqrt{2} = 0, y = \sqrt{2}$. Atunci $x^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = 5$.

34. Din $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1 \mid : (y + \sqrt{y^2+1}) \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1} - y \Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x+y)^2 = (\sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1})^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = y^2 + 1 + x^2 + 1 - 2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \Leftrightarrow 2xy = 2 - 2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} = 2(1 - x \cdot y) \mid : 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} = 1 - x \cdot y$, $xy \le 1 \Rightarrow 1 - xy \ge 0$. Ridicăm la pătrat ambii membri ai egalității $\Rightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = 1 - 2xy + x^2y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = 0 \Rightarrow x = -y$. Atunci $\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+6} = \sqrt{-1-1+6} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$, $x, y \neq 0$.

35. $n \in \mathbb{N}$, $6n + 7$ şi $9n + 1$ sunt pătrate consecutive. Cum $6n + 7 < 9n + 1 \Rightarrow a^2 < a^2 + 2a + 1$;

$$\left.\begin{matrix} 6n+7=a^2 \\ 9n+1=(a+1)^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n=\dfrac{a^2-7}{6} \\ n=\dfrac{(a+1)^2-1}{9} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a^2-7}{6}=\frac{a^2+2a}{9} \Leftrightarrow 9a^2 - 63 = 6a^2 + 12a \Leftrightarrow 3a^2 -$$

$- 12a - 63 = 0 \mid : 3 \Rightarrow a^2 - 4a - 21 = 0 \Leftrightarrow (a - 7)(a + 3) = 0$. Cum $a + 3 \neq 0 \Rightarrow a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7$ şi $6n + 7 = 7^2 \Rightarrow n = 7$. **36.** Din $x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y \Rightarrow E(x, y) = E(y) = (5 - 2y)^2 + y^2 = 25 - 20y + 4y^2 + y^2 = 5y^2 - 20y + 25 = 5(y^2 - 4y + 4 + 1) = 5 \cdot [(y - 2)^2 + 1] = 5 \cdot (y - 2)^2 + 5 \ge 5 \Rightarrow \min E(x, y) = 5$, care se realizează pentru $(y - 2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2$ şi $x = 1$.
37. $6 = M_7 - 1$, $13 = M_7 - 1$, $20 = M_7 - 1$, … Avem $S =(M_7 - 1)^3 + (M_7 - 1)^3 + \ldots + (M_7 - 1)^3 + (M_7 - n) + 15n = M_7 + 14n = M_7 \Rightarrow 7 \mid S$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.
38. Grupăm convenabil termenii sumei S şi scoatem factor comun. $S = (ax^3yz - x^2y^2z^2) + (bxy^3z - abx^2y^2) + (cxyz^3 - acx^2z^2) + (abcxyz - bcy^2z^2)$; $S = x^2yz(ax - yz) + bxy^2(yz - ax) + cxz^2(yz - ax) + bcyz(ax - yz)$; $S =(ax - yz)(x^2yz - bxy^2 - cxz^2 + bcyz)$; $S = (ax - yz) \cdot [(x^2yz - cxz^2) - (bxy^2 - bcyz)]$; $S = (ax - yz) \cdot [xz(xy - cz) - by(xy - cz)]$; $S = (ax - yz)(xy - cz)(xz - by)$. **39.** Din $n^2 = a + b + c \Rightarrow (n^2)^2 = (a + b + c)^2 \Rightarrow n^4 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, dar $ab + ac + bc \le a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow n^4 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3n^3$. Deci $n^4 \le 3n^3 \Rightarrow n^3(n - 3) \le 0$ cu $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dacă $n = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. Deci există $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dacă $n = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \Rightarrow a = 1$, $b = c = 0$ sau permutări. Deci există $a, b, c \in \mathbb{N}$ care răspund celor două cerințe. Dacă $n = 2 \Rightarrow$ există $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a = 0$, $b = c = 2$ sau permutările acestora. Dacă $n = 3 \Rightarrow$ există $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a = b = c = 3$, care verifică cea de-a doua condiție.
40. Vom ridica la pătrat şi obținem: $a^4 + 4a^2b^2 + b^4 + 4a^3b - 2a^2b^2 - 4ab^3 + a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - 4a^3b - 2a^2b^2 + 4ab^3 = 2a^4 + 4a^2b^2 + 2b^4 = 2(a^4 + 2a^2b^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2)^2$.
41. a) Efectuăm calculele şi grupăm convenabil termenii expresiei E. $E = x^4 + 3x^2 + 3x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^2 + x^3 + 6x$; $E = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x = x^4 + x^3 + 5x^3 + 5x^2 + 6x^2 + 6x$; $E = x^3(x + 1) + 5x^2(x + 1) + 6x(x + 1) = x(x + 1)(x^2 + 5x + 6)$; $E = x(x + 1)(x^2 + 2x + 3x + 6) \Rightarrow E = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. Cum $x \in \mathbb{Z}$, E este produs de patru numere întregi consecutive care este divizibil cu 4, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$. Dacă $x = 4k$, evident $4 \mid E$. Dacă $x = 4k + 1 \Rightarrow E = (4k + 1)(4k + 2)(4k + 3)(4k + 4)$; $E = 4(4k + 1)(4k + 2)(4k + 3)(k + 1) \Rightarrow 4 \mid E$. Dacă $x = 4k + 2 \Rightarrow E = 4(4k + 2)(4k + 3)(k + 1)(4k + 5) \Rightarrow 4 \mid E$. Dacă $x = 4k + 3 \Rightarrow E = 4(4k + 3) \cdot (k + 1)(4k + 5)(4k + 6) \Rightarrow 4 \mid E$. Deci $4 \mid E$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{E(x)}{(x+1)(x+3)} = x(x + 2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = x(x+2)\ (A).$$ Fracția se simplifică prin $(x + 1)(x + 3)$ pentru $x \in \mathbb{R} - \{-3, -1\}$.

$\Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta BCN \equiv \Delta CDP \equiv \Delta DAQ \Rightarrow [AM] \equiv [BN] \equiv [CP] \equiv [DQ]$ (*) şi $[BM] \equiv [CN] \equiv$ $\equiv [DP] \equiv [AQ]$ (**); ΔSAB isoscel de bază (AB); $(MB) \equiv (AQ) \Rightarrow$ MBAQ trapez isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow (MA) \equiv (BQ)$ şi $(MA) \equiv (DQ) \Rightarrow (BQ) \equiv (DQ) \Rightarrow \Delta DQB$ isoscel; (OQ) mediană $\Rightarrow OQ \perp BD$. Fie $R = sim_{AC}\, N \Rightarrow AC$ mediatoarea [NR], $O \in AC \Rightarrow [ON] \equiv [OR]$. Fie $T = sim_{AC}\, Q \Rightarrow AC$ mediatoarea [QT], $O \in AC \Rightarrow [OQ] \equiv [OT]$ (1) şi $[QT] \equiv [NR]$ (2). Se demonstrează că NR şi QT sunt coplanare şi perpendiculare pe $AC \Rightarrow QT \parallel NR \Rightarrow$ NRTQ paralelogram. Din (*) $\Rightarrow$ $\Rightarrow (NC) \equiv (QA)$ şi $\{F\} = NR \cap AC$; $\{E\} = QT \cap AC \Rightarrow [NF] \equiv [QE]$ şi $NF \parallel QE \Rightarrow$ NFEQ paralelogram, $m(\sphericalangle NFE) = 90° \Rightarrow$ NFEQ dreptunghi. Analog ETRF dreptunghi $\Rightarrow$ NQTR dreptunghi. Din (1) şi (2) $\Rightarrow \Delta NOR \equiv \Delta QOT \Rightarrow [NO] \equiv [OT] \equiv [RO] \equiv [OQ] \Rightarrow \Delta NOF \equiv$ $\equiv \Delta TOE \Rightarrow \sphericalangle NOF \equiv \sphericalangle TOE \Rightarrow O \in NT$. Analog se demonstrează că $O \in RQ$; $\{O\} = NT \cap RQ$; $\{O\} = EF \cap NT$; $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow \{O\} = RQ \cap BD$. În RBQD, (RQ), (BD) diagonale $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ RBQD paralelogram $\Rightarrow$ R, B, Q, D coplanare; b) RBQD paralelogram, dar $[BQ] \equiv [QD] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ RBQD romb $\Rightarrow RQ \perp DB$. Din (**) $\Rightarrow [DP] \equiv [MB]$ în ΔSDB isoscel $\Rightarrow$ DBMP trapez isoscel $\Rightarrow MP \parallel DB \Rightarrow m(\sphericalangle(MP, RQ)) = m(\sphericalangle(RQ, DB)) = 90°$.

79. În ΔVAB, M–N–R transversală, $\{R\} = MN \cap AB \overset{\text{T.Menelaus}}{\Rightarrow} \dfrac{RB}{RA}\cdot\dfrac{MA}{MV}\cdot\dfrac{NV}{NB} = 1$ (*).

În ΔVDC, Q–P–U transversală, $\{U\} = QP \cap DC \overset{\text{T.Menelaus}}{\Rightarrow} \dfrac{PC}{PV}\cdot\dfrac{VQ}{QD}\cdot\dfrac{DU}{UC} = 1$ (**). Din (*) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MV} = \frac{NB}{NV}\cdot\frac{RA}{RB}.\ \text{Din (**)} \Rightarrow \frac{PC}{PV} = \frac{UC}{UD}\cdot\frac{QD}{QV} \overset{(+)}{\Rightarrow} \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} = \frac{NB}{NV}\cdot\frac{RA}{RB} + \frac{UC}{UD}\cdot\frac{QD}{QV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} - \frac{NB}{NV} - \frac{QD}{QV} = \left(\frac{NB}{NV}\cdot\frac{RA}{RB} - \frac{NB}{NV}\right) + \left(\frac{UC}{UD}\cdot\frac{QD}{QV} - \frac{QD}{QV}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} - \frac{NB}{NV} - \frac{QD}{QV} = \frac{NB}{NV}\left(\frac{RA}{RB} - 1\right) + \frac{QD}{QV}\left(\frac{UC}{UD} - 1\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MV} + \dfrac{PC}{PV} - \dfrac{NB}{NV} - \dfrac{QD}{QV} = \dfrac{NB}{NV}\cdot\dfrac{RA - RB}{RB} + \dfrac{QD}{QV}\cdot\dfrac{UC - UD}{UD}$, dar $RA - RB = AB = \ell$ şi $UD - UC = CD = \ell$ (latura bazei piramidei); $\dfrac{MA}{MV} + \dfrac{PC}{PV} - \dfrac{NB}{NV} - \dfrac{QD}{QV} = \dfrac{NB}{NV}\cdot\dfrac{\ell}{RB} + \dfrac{QD}{QV}\cdot\dfrac{-\ell}{UD} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} - \frac{NB}{NV} - \frac{QD}{QV} = \ell\left(\frac{NB}{NV}\cdot\frac{1}{RB} - \frac{QD}{QV}\cdot\frac{1}{UD}\right).$$

Din (*) + (**) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MV} + \dfrac{PC}{PV} - \dfrac{NB}{NV} - \dfrac{QD}{QV} = \ell\left(\dfrac{MA}{MV}\cdot\dfrac{1}{RA} - \dfrac{PC}{PV}\cdot\dfrac{1}{UC}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{MA}{MV} + \dfrac{PC}{PV} - \dfrac{NB}{NV} - \dfrac{QD}{QV} = \dfrac{\ell}{UC}\left(\dfrac{MA}{MV}\cdot\dfrac{UC}{RA} - \dfrac{PC}{PV}\right)$, dar $\dfrac{UC}{RA} = \dfrac{SC}{SA}, \{S\} = AC \cap UR \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} - \frac{NB}{NV} - \frac{QD}{QV} = \frac{\ell}{UC}\left(\frac{MA}{MV}\cdot\frac{SC}{SA} - \frac{PC}{PV}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} - \frac{NB}{NV} - \frac{QD}{QV} = \frac{\ell}{UC}\cdot\frac{PC}{PV}\cdot\left(\underbrace{\frac{PV}{PC}\cdot\frac{MA}{MV}\cdot\frac{SC}{SA}}_{1} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} - \frac{NB}{NV} - \frac{QD}{QV} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{MA}{MV}+\dfrac{PC}{PV}=\dfrac{NB}{NV}+\dfrac{QD}{QV}$.

80. a) $\Delta ABF \equiv \Delta DAE$ (C.C.) $\Rightarrow \sphericalangle FAB \equiv \sphericalangle EDA$; $\sphericalangle AFB \equiv \sphericalangle DEA$. Fie $m(\sphericalangle FAB) = m(\sphericalangle EDA) = x$, dar $m(\sphericalangle FAB) + m(\sphericalangle AFB) = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle AFB) = 90° - x = m(\sphericalangle DEA)$. Fie $AF \cap DE = \{H\}$. În ΔAHE, $m(\sphericalangle HAE) + m(\sphericalangle HEA) = x + 90° - x = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle AHE) = 90° \Rightarrow AF \perp DE$;
b) F mijlocul lui (BC); F' mijlocul lui (B'C') $\Rightarrow F'F \parallel BB'$; $BB' \perp (ABC) \Rightarrow F'F \perp (ABC)$ şi $F'F = 9$ cm. Din $F'F \perp (ABC)$; $FH \perp DE$; $FH \cap DE = \{H\}$; $FH, DE \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} F'H \perp DE$. Din $(F'DE) \cap (ABC) = DE$; $F'H \perp DE$; $F'H \subset (F'DE)$; $FH \perp DE$; $FH \subset (ABC) \Rightarrow$
$\Rightarrow m[\sphericalangle((F'DE), (ABC))] = m(\sphericalangle(F'H, FH)) = m(\sphericalangle F'HF)$; $\Delta AHE \sim \Delta DAE$ (U.U.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{AH}{DA}=\dfrac{EH}{AE}=\dfrac{AE}{DE}$. În ΔADE, $m(\sphericalangle A) = 90° \overset{T.P.}{\Rightarrow} DE^2 = DA^2 + AE^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow DE = 3\sqrt{5}$ cm $= AF \Rightarrow \dfrac{AH}{6}=\dfrac{EH}{3}=\dfrac{3}{3\sqrt{5}} \Rightarrow AH = \dfrac{18}{3\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ cm; $HF = AF - AH = 3\sqrt{5}-\dfrac{6\sqrt{5}}{5} = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ cm; $F'F \perp (ABC)$, $FH \subset (ABC) \Rightarrow F'F \perp FH$. În $\Delta F'FH$, $m(\sphericalangle F'FH) = 90° \Rightarrow tg(\sphericalangle F'HF) = \dfrac{F'F}{FH}=\dfrac{9}{1}\cdot\dfrac{5}{9\sqrt{5}}=\sqrt{5}$; c) Fie $N \in [AB$, astfel încât $BN = BF = 3$ cm. Din $[BN] \equiv [BF]$, $\sphericalangle PBN \equiv \sphericalangle FBN$; $[PB] \equiv [PB] \Rightarrow \Delta PBF \equiv \Delta PBN$ (C.C.) $\Rightarrow [PN] \equiv [PF]$. Perimetrul $\Delta A'PF$ este minim $\Leftrightarrow A'P + PF + A'F$ este minim. Cum $A'F = 3\sqrt{14}$ (constant), perimetrul $\Delta A'PF$ este minim $\Leftrightarrow A'P + PF = A'P + PN$ este minim $\Leftrightarrow$ punctele A', P, N sunt coliniare. Avem $A'N = 9\sqrt{2}$ cm; $BP \parallel AA' \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta PBN \sim \Delta A'AN \Rightarrow \dfrac{PB}{AA'}=\dfrac{BN}{NA} \Rightarrow PB = \dfrac{9\cdot 3}{9} = 3$ cm şi minimul este $A'P + PF = A'N = 9\sqrt{2}$ cm.

81. Prin M – mijlocul lui (AB) se construieşte un plan paralel cu feţele BCC'B' şi respectiv cu ADD'A' $\Rightarrow (MM_1M_2M_3)$. Prin N – mijlocul lui (BC) se construieşte un plan paralel cu feţele ABB'A' şi respectiv cu DCC'D' $\Rightarrow (NN_1N_2N_3)$. Prin P – mijlocul lui (BB') se construieşte un plan paralel cu feţele ABCD şi respectiv cu A'B'C'D' $\Rightarrow (PP_1P_2P_3)$. Prin construirea celor trei plane de secţiune în cub se obţin 8 cuburi cu latura egală cu jumătate din latura cubului iniţial, adică de $\ell = 1$ dm. Dacă se aleg 9 puncte din 8 cuburi, conform principiului cutiei rezultă că există cel puţin două puncte situate în acelaşi cub $\Rightarrow$ distanţa maximă posibilă dintre ele este egală cu diagonala cubului, dar $d_{cub} = \ell\sqrt{3}$; $\ell = 1$ dm $\Rightarrow d_{cub} = \sqrt{3}$ dm $\Rightarrow$ există cel puţin două dintre ele care se află la o distanţă mai mică sau egală cu $\sqrt{3}$ dm.

82. Fie şirul de numere 6, 9, 21, 27, 34, 43, 59, 76. Se observă că $27 + 43 \vdots 5$.
I. $A \to 27$ şi $B \to 43$. Dar $27 + x$, unde $x \in \{6, 9, 21, 34, 59, 76\}$ nu este divizibil cu 5. Nu este soluţie. II. $A \to 27$ şi $D \to 43$. Dar $27 + x$, unde $x \in \{6, 9, 21, 34, 59, 76\}$ nu este divizibil cu 5. Nu este soluţie. III. $A \to 27$ şi $C \to 43$ şi $B \to y \Rightarrow 27 + y \vdots 5$ şi $43 + y \vdots 5 \Rightarrow 43 + y - 27 - y = 16 \not\vdots\, 5$ (F) $\Rightarrow$ nu este soluţie.
IV. $A \to 27$ şi $A' \to 43$; $B \to x$, $x \in \{6, 9, 21, 34, 59, 76\} \Rightarrow 27 + x$ nu este divizibil cu 5 $\Rightarrow$ nu este soluţie. Răspuns: Nu putem aşeza numerele 6, 9, 21, 27, 34, 43, 59, 76 în vârful unui cub astfel încât să satisface cerinţa problemei.

83. În ΔABC, $m(\sphericalangle B) = 90° \overset{T.P.}{\Rightarrow} AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1600 + 900 = 2500 \Rightarrow AC = 50$ cm. În ABCD dreptunghi, $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow AO = BO = CO = DO = 25$ cm; $A'A \perp (ABC)$. Fie $AQ \perp BD$, $Q \in BD$; $AQ \cap BD = \{Q\}$; $AQ, BD \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} A'Q \perp DB$. Fie $AQ \cap DC = \{M\}$ şi $MN \perp DC$, $N \in DC'$; $NM \perp DC$; $C'C \perp DC \Rightarrow NM \parallel C'C$; $C'C \perp (ABCD) \Rightarrow NM \perp (ABCD)$; $MQ \perp DB$; $MQ \cap DB = \{Q\}$; $MQ, DB \subset (ABCD) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} NQ \perp DB$. Din $(A'DB) \cap (C'DB) = DB$; $A'Q \perp DB$, $A'Q \subset (A'DB)$; $NQ \perp DB$, $NQ \subset (C'DB)$ şi fie $A'A = x \Rightarrow m[\sphericalangle((A'DB), (C'DB))] = m(\sphericalangle(A'Q, QN)) = m(\sphericalangle A'QN) = 90°$. Din $A'A \perp (ABCD)$ şi $AQ \subset (ABCD) \Rightarrow A'A \perp AQ$. În $\Delta A'AQ$, $m(\sphericalangle A'AQ) = 90° \overset{T.P.}{\Rightarrow} A'Q^2 = AQ^2 + A'A^2$. În ΔADB, $m(\sphericalangle A) = 90° \overset{T.P.}{\Rightarrow} DB = 50$ cm; $AQ \perp DB \Rightarrow AQ = \dfrac{AD \cdot AB}{DB} = 24$ cm $\Rightarrow A'Q^2 = 576 + x^2$ (1). În ΔADM, $m(\sphericalangle D) = 90°$; $DQ \perp AM$, $Q \in AM \overset{T.Î.}{\Rightarrow} DQ^2 = QA \cdot QM \Rightarrow MQ = \dfrac{324}{24} = \dfrac{27}{2}$ cm; $MA = MQ + QA = \dfrac{27}{2} + \dfrac{24}{1} = \dfrac{75}{2}$ cm $\overset{T.P.}{\Rightarrow} DM^2 = MA^2 - DA^2 = \dfrac{5625}{4} - 900 = \dfrac{2025}{4} \Rightarrow DM = \dfrac{45}{2}$ cm. În $\Delta C'CD$, $MN \parallel CC' \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta DMN \sim \Delta DCC' \Rightarrow \dfrac{DM}{DC} = \dfrac{MN}{CC'} = \dfrac{DN}{DC'} \Rightarrow \dfrac{\frac{45}{2}}{40} = \dfrac{MN}{x} \Rightarrow MN = \dfrac{9}{16}x$. În ΔNMQ, $m(\sphericalangle M) = 90° \overset{T.P.}{\Rightarrow} NQ^2 = NM^2 + MQ^2 = \dfrac{81}{256}x^2 + \dfrac{729}{4}$ (2); $AA' \perp (ABCD)$ şi $C'C \perp (ABCD) \Rightarrow A'A \parallel CC'$; $CC' \parallel MN \Rightarrow A'A \parallel MN$; $[A'A] \not\equiv [MN] \Rightarrow$ A'AMN trapez; $A'A \perp (ABC)$; $AM \subset (ABC) \Rightarrow A'A \perp AM \Rightarrow$ A'AMN trapez dreptunghic. Fie $NP \perp A'A$, $P \in A'A \Rightarrow$ APNM dreptunghi $\Rightarrow NM = PA = \dfrac{9}{16}x$; $NP = AM = \dfrac{75}{2}$ cm; $A'P = A'A - PA$; $A'P = x - \dfrac{9}{16x} = \dfrac{7}{16}x$. În $\Delta A'PN$, $m(\sphericalangle P) = 90° \overset{T.P.}{\Rightarrow} A'N^2 = A'P^2 + PN^2 \Rightarrow A'N^2 = \dfrac{49}{256}x^2 + \dfrac{5625}{4}$ (3). În $\Delta A'QN$, $m(\sphericalangle A'QN) = 90° \overset{T.P.}{\Rightarrow} A'Q^2 + QN^2 = A'N^2 \overset{(1)+(2)+(3)}{\Rightarrow} 576 + x^2 + \dfrac{81}{256}x^2 + \dfrac{729}{4} = \dfrac{49}{256}x^2 + \dfrac{5625}{4} \Rightarrow x^2 + \dfrac{81}{256}x^2 - \dfrac{49}{256}x^2 = \dfrac{5625}{4} - \dfrac{729}{4} - 576 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{256+81-49}{256}x^2 = \dfrac{5625-729-2304}{4} \Rightarrow \dfrac{288}{256}x^2 = \dfrac{2592}{4} \Rightarrow x^2 = \dfrac{2592}{4} \cdot \dfrac{256}{288} \Rightarrow x^2 = 9 \cdot 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 24 \Rightarrow AA' = 24$ cm.

84. a) $\Rightarrow$ b); $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $d^2 = ab + ac + bc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \mid \cdot 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (a-c)^2 = 0 \\ (b-c)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = 0 \\ a-c = 0 \\ b-c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = c \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ ABCDA'B'C'D este cub $\Rightarrow$ ABCD – pătrat; (AC), (BD) diagonale $\Rightarrow AC \perp BD$; $CC' \perp BD$ şi $AC \cap CC' = \{C\} \Rightarrow BD \perp (ACC')$; $AC' \subset (ACC') \Rightarrow BD \perp AC'$; A'ADD' – pătrat; (A'D), (AD') diagonale $\Rightarrow A'D \perp AD'$; $D'C' \perp (ADD'A')$ şi $A'D \subset (ADD'A') \Rightarrow A'D \perp D'C'$; $AD' \cap$

$\cap$ D'C' = {D} $\Rightarrow$ A'D $\perp$ (AD'C'); A"C' $\subset$ (AD'C') $\Rightarrow$ A'D $\perp$ AC' $\Rightarrow$ AC' $\perp$ A'D; AC' $\perp$ BD; A'D $\cap$ BD = {D} $\Rightarrow$ AC' $\perp$ (A'BD); b) $\Rightarrow$ c); AC' $\perp$ (A'BD); A'D $\subset$ (A'BD) $\Rightarrow$ AC' $\perp$ A'D; C'D' $\perp$ A'D; AC' $\cap$ C'D' = {C'} $\Rightarrow$ A'D $\perp$ (AC'D'); AD' $\subset$ (AC'D') $\Rightarrow$ A'D $\perp$ AD'; AA'D'D dreptunghi $\Rightarrow$ AA'D'D pătrat $\Rightarrow$ b = c. Analog se demonstrează că a = c $\Rightarrow$ a = b = c $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ABCDA'B'C'D este cub; $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2}=d^2 \Leftrightarrow \frac{2a^4}{2a^2}+\frac{2b^4}{2b^2}+\frac{2c^4}{2c^2}=d^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=d^2 \Leftrightarrow 3a^2=d^2 \Leftrightarrow d=a\sqrt{3}$;

c) $\Rightarrow$ a); $\frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{(b^2+c^2)^2-2b^2c^2}{b^2+c^2}+\frac{(a^2+c^2)^2-2a^2c^2}{a^2+c^2}=d^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}+(b^2+c^2)-\frac{2b^2c^2}{b^2+c^2}+(c^2+a^2)-\frac{2c^2a^2}{a^2+c^2}=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{2b^2c^2}{b^2+c^2}+\frac{2c^2a^2}{a^2+c^2} \Leftrightarrow \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}-c^2+\frac{2b^2c^2}{b^2+c^2}-a^2+\frac{2c^2a^2}{a^2+c^2}-b^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{a^2+b^2}+\frac{2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{b^2+c^2}+\frac{2c^2a^2-a^2b^2-b^2c^2}{a^2+c^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(a^2-c^2)}{a^2+b^2}+\frac{b^2(c^2-a^2)+c^2(b^2-a^2)}{b^2+c^2}+\frac{a^2(c^2-b^2)+c^2(a^2-b^2)}{a^2+c^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^4-c^4)(a^2+c^2)+b^2(a^4-c^4)(b^2+c^2)+b^2(c^4-a^4)(a^2+b^2)+c^2(b^4-a^4)(a^2+c^2)+$$
$$+\ a^2(c^4-b^4)(b^2+a^2)+c^2(a^4-b^4)(b^2+c^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^4-c^4)(a^2+c^2-a^2-b^2)+b^2(a^4-c^4)(b^2+c^2-a^2-b^2)+c^2(b^4-a^4)(a^2+c^2-b^2-c^2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2(b^2-c^2)(b^2+c^2)(c^2-b^2)+b^2(a^2-c^2)(a^2+c^2)(c^2-a^2)+c^2(b^2-a^2)(b^2+a^2)(a^2-b^2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)-b^2(a^2-c^2)^2(a^2+c^2)-c^2(b^2-a^2)^2(b^2+a^2)=0 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)+b^2(a^2-c^2)^2(a^2+c^2)+c^2(b^2-a^2)^2(b^2+a^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-c^2=0 \\ a^2-c^2=0 \\ b^2-a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=c \\ b=a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow d^2=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow d=\sqrt{ab+bc+ac}\,.$$

85. a) Fie MN $\perp$ BC, N $\in$ (BC) $\Rightarrow$ [MN] $\equiv$ [CC'], MN || CC' şi N mijlocul lui (BC). Fie NP $\perp$ $\perp$ DB, P $\in$ (DB); ABCD pătrat; AC $\cap$ BD = {O} $\Rightarrow$ AC = BD = $10\sqrt{2}$ cm; AO = CO = DO = = OB = $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ AO = CO = DO = OB = $5\sqrt{2}$ cm; AC $\perp$ DB, dar PN $\perp$ BD $\Rightarrow$ AC || PN. În ΔBOC, N mijlocul lui (BC); NP || AC, P $\in$ (OB), cu reciproca teoremei liniei mijlocii $\Rightarrow$ P mijlocul lui (OB) $\Rightarrow$ (NP) linie mijlocie $\Rightarrow$ NP = $\frac{OC}{2} \Rightarrow NP=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm; MN || CC'; CC' $\perp$ $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ MN $\perp$ (ABCD); NP $\subset$ (ABCD) $\Rightarrow$ MN $\perp$ NP. În ΔMNP, m($\sphericalangle$MNP) = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ $\Rightarrow MP^2=100+\frac{50}{4}=\frac{450}{4} \Rightarrow MP=\frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm. Din MN $\perp$ (ABCD); PN $\perp$ OB; PN $\cap$ OB = = {P}; PN, OB $\subset$ (ABCD) $\overset{\text{T3}\perp}{\Rightarrow}$ MP $\perp$ OB $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MDB}=\frac{DB\cdot MP}{2}=\frac{10\sqrt{2}\cdot 15\sqrt{2}}{2\cdot 2}=75\ \text{cm}^2$;

b) ABCD pătrat $\Rightarrow$ AC $\perp$ BD; AA' $\perp$ (ABCD) şi BD $\subset$ (ABCD) $\Rightarrow$ AA' $\perp$ BD; AA' $\cap$ AC = = {A} $\Rightarrow$ BD $\perp$ (AA'C); A'C $\subset$ (AA'C) $\Rightarrow$ BD $\perp$ A'C (1); C'B $\perp$ B'C (BB'C'C) pătrat; A'B' $\perp$

$\perp$ (BB'C'C); C'B $\subset$ (BB'C'C) $\Rightarrow$ C'B $\perp$ A'B'. Din C'B $\perp$ B'C; C'B $\perp$ A'B'; A'B' $\cap$ B'C' = {B'} $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ C'B $\perp$ (A'B'C); A'C $\subset$ (A'B'C) $\Rightarrow$ A'C $\perp$ C'B (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ A'C $\perp$ (C'BD). Fie A'C $\cap$ $\cap$ (C'BD) = {P} $\Rightarrow$ d(A', (B'BD)) = A'P; d(C, (C'BD)) = CP; A'C = d_{cub} = $\ell\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ A'C = = $10\sqrt{3}$ cm; A'P + CP = A'C = $10\sqrt{3}$ cm.

86. a) Fie N $\in$ (BB') astfel încât A–N–M coliniare pe desfăşurarea laterală $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_{\Delta AMN}$ minim. Pe desfăşurarea suprafeței laterale în ΔACM dreptunghic în C $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ $AM^2 = AC^2 + CM^2 =$ = 625 + 25 = 650 $\Rightarrow$ $AM = 5\sqrt{26}$ cm, unde AC= AB + BC = 25 cm. În ΔACM, m($\sphericalangle$C) = = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ $AM^2 = MC^2 + AC^2$; AC este diagonala dreptunghiului $\Rightarrow$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 325$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ AC = $5\sqrt{13}$ $\Rightarrow$ AM^2 = 25 + 325 = 350 $\Rightarrow$ AM = $5\sqrt{14}$ cm; $\mathcal{P}_{\Delta AMN}$ = AM + MN + AN = = AM + $\overline{AM} = 5\sqrt{26} + 5\sqrt{14} = 5\sqrt{2}\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)$ cm.

În ΔANB, MC || NB $\overset{\text{T.F.A.}}{\Rightarrow}$ ΔABN ~ ΔACM $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{NB}{CM} \Rightarrow \dfrac{15}{25} = \dfrac{NB}{5}$ $\Rightarrow$ NB = 3 cm;

b) m($\sphericalangle$(D'B, (A'B'BA))) = 30°; D'A' $\perp$ (ABB'A') $\Rightarrow$ $pr_{(ABB'A')}$ D' = A'; B $\in$ (ABB'A') $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $pr_{(ABB'A')}$ B = B $\Rightarrow$ $pr_{(ABB'A')}$ D'B = A'B $\Rightarrow$ m($\sphericalangle$(D'B, (A'BB'A'))) = m($\sphericalangle$(D'B, A'B)) = = m($\sphericalangle$D'BA') = 30°. În ΔD'A'B, m($\sphericalangle$A) = 90°; m($\sphericalangle$D'BA') = 30° $\overset{\text{T.}\sphericalangle 30°}{\Rightarrow}$ A'D' = $\dfrac{D'B}{2}$ $\Rightarrow$ D'B = = 20 cm $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ $A'B^2 = D'B^2 - A'D'^2$ = 400 – 100 = 300 $\Rightarrow$ A'B = $10\sqrt{3}$ cm. În ΔA'AB, m($\sphericalangle$A) = = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ $A'A^2 = A'B^2 - AB^2$ = 300 – 225 = 75 $\Rightarrow$ A'A = $5\sqrt{3}$ cm. Fie NQ $\perp$ (D'BC), Q $\in$ $\in$ (D'BC) şi D'C' $\perp$ (NBC) $\Rightarrow$ d(N, (D'BC)) = NQ $\Rightarrow$ NQ · $\mathcal{A}_{\Delta D'BC}$ = D'C' · $\mathcal{A}_{\Delta NBC}$ (1); $\mathcal{A}_{\Delta D'BC}$ = = $\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{A'BCD'}$; A'D'CB dreptunghi $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{A'BCD'}$ = A'D' · A'B = $10\sqrt{3}$ · 10 = $100\sqrt{3}$ cm^2 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{\Delta D'BC}$ = = $50\sqrt{3}$ cm^2 (2). În ΔNBC, m($\sphericalangle$B) = 90° $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{\Delta NBC} = \dfrac{NB\cdot BC}{2} = \dfrac{3\cdot 10}{2}$ = 15 cm^2 (3). Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow$ NQ · $50\sqrt{3}$ = 15 · 15 $\Rightarrow$ NQ = $\dfrac{225}{50\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm $\Rightarrow$ d(N, (D'BC)) = $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

87. a) a > 0, b > 0, AB = b, SA = a. În ΔSMA, m($\sphericalangle$M) = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ $SM^2 = a^2 - \dfrac{b^2}{4}$ (1); BM = = $h_3 = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. În ΔSBM, m($\sphericalangle$S) = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ $SM^2 = \dfrac{3b^2}{4} - a^2$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $a^2 - \dfrac{b^2}{4} =$ $= \dfrac{3b^2}{4} - a^2$ $\Rightarrow$ $2a^2 = b^2$ $\Rightarrow$ b = $a\sqrt{2}$; b) $\mathcal{V}_{SABC} = \mathcal{V}_{CSAB}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{ABC}$ · SO = $\mathcal{A}_{SAB}$ · d(C, (SAB));

SO = $\sqrt{SM^2 - OM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $\mathcal{A}_{ASC} = \dfrac{AC\cdot SM}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{2}$; SM = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Avem $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2}{2}$ · d(C, (SAB)) $\Rightarrow$ d(C, (SAB)) = a; c) cu RTP se obține ΔSAB dreptunghic în S și Δ SBM drept. În S $\Rightarrow$ SA $\perp$ SB în (SAB) și SM $\perp$ SB în (SBM) $\Rightarrow$ $\sphericalangle$((SAB) ; (SBM)) = $\sphericalangle$(SA, SM) = $\sphericalangle$(ASM); în ΔASM, m($\sphericalangle$(ASM)) = 45°

88. a) Fie M $\in$ [BB'] astfel încât MB = MB' = $\dfrac{AA'}{2}$ şi cum NC = NC' = $\dfrac{AA'}{2}$ $\Rightarrow$ [MB] $\equiv$ $\equiv$ [NC], dar MB $\parallel$ NC $\Rightarrow$ BCNM paralelogram. Cum m($\sphericalangle$NCB) = 90° $\Rightarrow$ BCNM dreptunghi $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ MN $\parallel$ BC, MN = BC = 12, dar BC $\parallel$ AD $\Rightarrow$ MN $\parallel$ AD $\Rightarrow$ punctele A, D, N, M coplanare, ADNM trapez isoscel, AM = ND. În ΔABM, m($\sphericalangle$B) = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ AM = $6\sqrt{7}$; (BFF') $\cap$ (AMD) = = MQ; Q $\in$ [BF] şi cum ΔABC isoscel şi AQ $\perp$ BF $\Rightarrow$ [AQ] mediană $\Rightarrow$ QB = QF = $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$; QB = $6\sqrt{3}$; $AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2} = \sqrt{144-108}$ = 6; MQ = $\sqrt{MB^2 + BQ^2} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$; DQ = = AD – AQ = 24 – 6 = 18; BF = B'F' = $\ell\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$; BB' = FF' $\Rightarrow$ BFF'B' pătrat. În ΔBFB', [MQ] linie mijlocie $\Rightarrow$ MQ $\parallel$ B'F, dar B'F $\perp$ BF' $\Rightarrow$ BF' $\perp$ MQ (1); AD $\perp$ BF; AD $\perp$ BB'; BF $\cap$ BB' = {B} $\Rightarrow$ AD $\perp$ (BB'F'); BF' $\subset$ (BB'F') $\Rightarrow$ BF' $\perp$ AD (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ BF' $\perp$ $\perp$ (ADN); DN $\subset$ (ADN) $\Rightarrow$ BF' $\perp$ DN; b) Fie {S} = MQ $\cap$ BF' şi SP $\perp$ ND, P $\in$ [ND]. Cum BF' $\perp$ (ADN); SP $\subset$ (ADN) $\Rightarrow$ BF' $\perp$ SP $\Rightarrow$ d(BF', ND) = SP. Din MB $\perp$ (ABC); AD, BQ $\subset$ $\subset$ (ABC); AD $\perp$ BQ $\overset{\text{T3}\perp}{\Rightarrow}$ MQ $\perp$ AD $\Rightarrow$ MQDN trapez dreptunghic;

$$\mathcal{A}_{MQDN} = \frac{(DQ+MN)\cdot MQ}{2} = \frac{24\cdot 6\sqrt{6}}{2} = 72\sqrt{6};\ \mathcal{A}_{SMN} = \frac{SM\cdot MN}{2};$$

$$\mathcal{A}_{SDN} = \mathcal{A}_{MQDN} - \left(\mathcal{A}_{SMN} + \mathcal{A}_{SDQ}\right) = \frac{(DQ+MN)\cdot MQ}{2} - \left(\frac{MN\cdot MQ}{4} + \frac{DQ\cdot MQ}{4}\right) = \frac{MQ}{2}\cdot\frac{DQ+N}{2} =$$

$$= \frac{\mathcal{A}_{MQDN}}{2} = 36\sqrt{6};\ \mathcal{A}_{SDN} = \frac{SP\cdot ND}{2} \Rightarrow SP = \frac{72\sqrt{6}}{6\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{42}}{7}.$$

89. Vom arăta unicitatea punctului M (M fiind mijlocul muchiei [BB']). Presupunem că există un punct M' $\in$ [BB'] simetricul lui M faţă de mijlocul muchiei [BB'], M' $\neq$ M. Din [AB] $\equiv$ [B'C']; [MB] $\equiv$ [M'B']; $\sphericalangle$ABM $\equiv$ $\sphericalangle$C'B'M' $\Rightarrow$ ΔMAB $\equiv$ ΔM'C'B' (C.C.) $\Rightarrow$ [MA] $\equiv$ [M'C'] (1). Din [M'B] $\equiv$ [MB']; [AB] $\equiv$ [B'C']; $\sphericalangle$ABM' $\equiv$ $\sphericalangle$C'B'M (90°) $\Rightarrow$ ΔM'AB $\equiv$ ΔMC'B' (C.C.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ [M'A] $\equiv$ [MC'] (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ ΔMAC' $\equiv$ ΔM'AC' (L.L.L.), deci m($\sphericalangle$AM'C') = = m($\sphericalangle$MAC'), contradicţie. Deci M = M' şi M este mijlocul lui [BB']. Fie h = BB'. În ΔABM, m($\sphericalangle$B) = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ AM = $\sqrt{AB^2+MB^2} = \sqrt{a^2+\dfrac{h^2}{4}}$. În ΔC'B'M, m($\sphericalangle$B') = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ C'M = = $\sqrt{B'C'^2 + B'M^2} = \sqrt{a^2+\dfrac{h^2}{4}}$. În ΔACC', m($\sphericalangle$C) = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ AC' = $\sqrt{AC^2+CC'^2} = \sqrt{a^2+h^2}$ şi cum ΔAMC' este dreptunghic, m($\sphericalangle$AMC') = 90° $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow}$ $AC'^2 = AM^2 + MC^2 \Rightarrow a^2 + h^2 = 2a^2 + \dfrac{h^2}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $h^2 = 2a^2$ $\Rightarrow$ h = $a\sqrt{2}$. Fie A'C $\cap$ AC' = {O} şi D $\in$ [AC] astfel încât [DA] $\equiv$ [DC]; OD $\overset{\parallel}{\equiv}$ BM $\Rightarrow$ BMOD dreptunghi $\Rightarrow$ MO = BD = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Din BD $\perp$ AC; BD $\perp$ AA'; AC $\nparallel$ AA' rezultă BD $\perp$ (AA'C'C) şi cum MO $\parallel$ BD $\Rightarrow$ MO $\perp$ (ACC'); $pr_{(ACC')}$ AM = AO $\Rightarrow$ m($\sphericalangle$(MA, (ACC'))) = m($\sphericalangle$(AO, MA)) = m($\sphericalangle$MAO). În ΔMOA, m($\sphericalangle$O) = 90°, sin($\sphericalangle$MAO) = $= \dfrac{OM}{AM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ m($\sphericalangle$MAO) = 45°.

Cuprins