Ora de matematică

CLASA a VI-a

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele şcolare în vigoare.

Referent ştiinţific: Magdalena Claudia Uleia

Editor: Alexandru Creangă
Ilustraţia copertei: Ioana Pioaru
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Pentru comenzi prin poştă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	Zona
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj şi Mehedinţi), Banat şi Transilvania (Alba şi Hunedoara);
0748.111.247	Crişana şi Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureş, Harghita şi Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea şi Olt), Transilvania (Braşov şi Sibiu) şi Muntenia (Argeş, Teleorman şi Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistriţa-Năsăud) şi zona Maramureş;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamţ, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iaşi, Botoşani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmboviţa, Prahova, Brăila, Ialomiţa şi Călăraşi), Dobrogea şi jud. Galaţi;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	Bucureşti

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeş
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro
www.librarianomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NĂCHILĂ, PETRE
Ora de matematică : clasa a VI-a / Petre Năchilă. - Piteşti : Nomina, 2021
ISBN 978-606-535-877-5

51

Petre Năchilă

Ora de matematică

Clasa a VI-a

Editura NOMINA

ALGEBRĂ

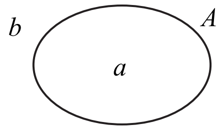
CAPITOLUL 1
Mulțimi

1.1. Mulțimi: descriere, notații, relații între elemente şi mulțime, relații între mulțimi

Matematicianul Georg Cantor este creatorul teoriei mulțimilor. Acesta a definit mulțimea ca fiind o colecție de obiecte (numite elementele mulțimii) de natură oarecare, bine determinate şi bine-distincte.

Mulțimile se notează cu litere mari ale alfabetului (A, B, C, …, X, Y, Z), iar elementele cu litere mici (a, b, c, x, y, z).

Dacă A este o mulțime, iar a, b sunt elemente cu a element al mulțimii A, spunem că „a aparține mulțimii A” (notăm $a \in A$), iar dacă b nu este element al mulțimii A, spunem că „b nu aparține mulțimii A” (notăm $b \notin A$).



Moduri de a defini o mulțime:

I. **explicit**: se enumeră elementele mulțimii: $A = \{0, 1, 2, 3\}$;

II. **implicit**: se precizează proprietatea pe care o au numai elementele acelei mulțimi: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 35\}$;

III. **cu ajutorul diagramei Venn-Euler** (figura de mai sus).

Definiții: Spunem că mulțimea A este inclusă în mulțimea B (notăm $A \subset B$) dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B.

Spunem că $A = B$ dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$.

Proprietățile relației de incluziune a mulțimilor:

a) reflexivitate: $A \subset A$ pentru orice mulțime A;

b) antisimetrie: $A \subset B$ şi $B \subset A \Rightarrow A = B$;

c) tranzitivitate: $A \subset B$ şi $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Proprietățile relației de egalitate a mulțimilor:

a) reflexivitate: $A = A$ pentru orice mulțime A;

b) simetrie: $A = B \Rightarrow B = A$;

c) tranzitivitate: $A = B$ şi $B = C \Rightarrow A = C$.

Observații: 1) Mulțimea care nu are niciun element se numeşte mulțime vidă (se notează cu $\varnothing$).

2) Avem $\varnothing \subset A$ pentru orice mulțime A.

Probleme propuse

*

1. Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:

a) cap; b) capac; c) capacitate; d) matematică.

2. Precizați care din următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:

a) $a = \{a\}$; b) $a \in \{a\}$; c) $a \neq \{a\}$; d) $\{a\} \subset \{a\}$;
e) $\varnothing \subset \varnothing$; f) $\varnothing = \{\varnothing\}$; g) $\varnothing \in \varnothing$; h) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

3. Determinați $n \in \mathbb{N}$ dacă $12 \in \{3n + 6, 4n + 5\}$.

4. Determinați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $3 \in \{0, 2, 3, 5\}$; b) $6 \notin \{2, 4, 6\}$;
c) $5 \in A$ și $6 \in A$, $A = \{3, 4, 5, 6\}$; d) 3 sau $4 \in A$, $A = \{2, 4, 8\}$;
e) $12 \in 3\mathbb{N}$, $3\mathbb{N} = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5. Notând $m\mathbb{N} = \{mn \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, dați exemple de:

a) două numere naturale care aparțin simultan mulțimilor $3\mathbb{N}$ și $4\mathbb{N}$;

c) numere naturale a, b, c, cu $a \in 3\mathbb{N}$, $a \notin 5\mathbb{N}$, $b \in 3\mathbb{N}$, $b \in 5\mathbb{N}$, respectiv $c \notin 3\mathbb{N}$, $c \in 5\mathbb{N}$.

6. Enumerați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < 2^x \leq 32\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 8 \leq n^2 \leq 46\}$;

c) $C = \{a \in \mathbb{N} \mid 3a - 1 \leq 26\}$; d) $D = \{\overline{xy} \mid 2 \mid y, 3 \mid x\}$;

e) $E = \{x = 3^n - 2^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$.

7. Precizați mulțimile egale dintre mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 4\}$, $C =$
$= \{5, 3, 4, 2\}$, $D = \{2, 4, 1, 3\}$, $E = \{2, 3, 4, 5\}$.

8. Precizați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x - 4)(3x - 2)(1 - x) = 0\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 25\}$; c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 7 \leq 14\}$.

**

9. Scrieți primele 6 elemente ale mulțimilor:

a) $A = \{2n + 3m \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$; b) $B = \{2n - 3m \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$.

10. Scrieți mulțimile următoare folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale:

a) $A = \left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ..., \frac{21}{20}\right\}$; b) $B = \left\{\frac{10}{1}, \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, ..., \frac{1}{10}\right\}$.

11. Aflați câte elemente au mulțimile:

a) $A = \left\{ \dfrac{2n}{n+2} \middle| n \in \mathbb{N},\ n \le 20 \right\}$; b) $B = \left\{ \dfrac{n-1}{2^{n+1}} \middle| n \in \mathbb{N}^*,\ n \le 5 \right\}$.

12. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid$ există $y \in \mathbb{N}$ cu $(x-2)(y+1) = 9\}$;

b) $B = \{y \in \mathbb{N} \mid$ există $x \in \mathbb{N}$ cu $(x-3)(y-1) = 15\}$.

13. Fie mulțimea $M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 15\}$. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in M \mid 2x \in M\}$; b) $B = \{x \in M \mid 3x \in M\}$;

c) $C = \{x \in M \mid$ există $y \in M$ cu $x + y \in M\}$; d) $D = \{x \in M \mid x-1 \in M, x+1 \in M\}$.

***

14. Determinați mulțimile:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \middle| \dfrac{x+8}{x+2} \in \mathbb{N} \right\}$; b) $B = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \dfrac{3n+4}{x+3} < 2 \right\}$.

15. Comparați mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \middle| x = \dfrac{2n+1}{n+4},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ și $B = \{x \in A \mid x < 2\}$.

16. Determinați $a, b \in \mathbb{N}$, știind că $A = B$, unde $A = \{8, 4a-2\}$ și $B = \{b^2 - 1, 2a + 4\}$.

17. Determinați $a, b \in \mathbb{N}$, știind că $A = B$, unde $A = \{2^{a-2}, 2^{4-b}, 2^{a+b}\}$, $B = \{2^a, 4^{a-b}, 4^b\}$.

18. Determinați $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, știind că $A = B$ și $A = \{14, 30, a^2\}$, $B = \{b^2 - b, a + 2b, c^2\}$.

19. Determinați $a, b, c \in \mathbb{N}$, știind că $A \subset M$, $B \subset M$, $C \subset M$, unde $A = \{2a-1, 2b+c\}$, $B = \{2b+1, a+2c\}$, $C = \{2c+1, b+c\}$, $M = \{1, 3, 5, 7\}$.

20. Fie mulțimile $A = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{7, 9, 11\}$, $A_4 =$ $= \{13, 15, 17, 19\}, \ldots$.

a) Scrieți elementele mulțimilor A_7 și A_8.

b) Determinați suma elementelor mulțimii A_{10}.

21. Fie mulțimea $A \subset \mathbb{N}$ cu proprietățile:

i) $2 \in A$, $3 \in A$; ii) $x \in A \Rightarrow 3x - 1 \in A$; iii) $x + 1 \in A \Rightarrow x \in A$.

a) Determinați încă 5 elemente ale mulțimii A.

b) Determinați mulțimea A.

22. Demonstrați că $\left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \dfrac{n^3+3}{2n} \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \dfrac{n^3+2}{3n} \in \mathbb{N} \right\}$.

23. Determinați mulțimile:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n - 1 \mid 3n + 3\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n+1) \mid n^2 + 2\}$.

1.2. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea $\mathbb{N}$

Mulțimile cu un număr finit de elemente se numesc **mulțimi finite**. **Mulțimile infinite** sunt mulțimile care nu au un număr finit de elemente.

Exemple: • mulțimi infinite: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $m\mathbb{N} = \{mn \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $m \in \mathbb{N}^*$;

• mulțimi finite: $D_{100} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 100\}$, mulțimea numerelor de 2, 3, 4 cifre.

Numărul elementelor unei mulțimi finite M se numește **cardinalul** mulțimii M şi se notează card M.

Cardinalul unei mulțimi infinite se notează cu ∞ (infinit).

Teoremă: Fie mulțimea A având card $A = n \in \mathbb{N}^*$. Atunci mulțimea $\mathscr{P}(A) = \{M \mid M \subset A\}$ are card $\mathscr{P}(A) = 2^n$.

Probleme propuse

*

1. Scrieți următoarele mulțimi şi determinați cardinalul lor:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \mid n, n \le 13\}$; b) $B = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, n \le 5\}$;

c) $C = \{a \in \mathbb{N} \mid a \mid 18\}$; d) $D = \left\{\overline{ab} \,\middle|\, \overline{ab} \,\vdots\, 3\right\}$.

2. Determinați cardinalul mulțimilor formate din:

a) numere naturale de 3 cifre şi divizibile cu 22;

b) pătrate perfecte care au 3 cifre.

3. Stabiliți care dintre următoarele mulțimi sunt finite şi care sunt infinite:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 1^{100}\}$; b) $B = \{p \mid p$ număr prim$\}$;

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < 257\}$; d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n > 1023\}$?

4. Elementele a, $2a - 5$, $10 - a$ şi $3a - 7$ aparțin mulțimii A. Ştiind că $a \in \mathbb{N}$, determinați card A.

5. Câte submulțimi are mulțimea $A = \{a, b, c\}$? Precizați-le.

6. Determinați card $A = n$ dacă $49 <$ card $\mathscr{P}(A) < 99$.

7. Scrieți 3 submulțimi cu 4 elemente formate din numere naturale de două cifre care dau restul 5 împărțirea la 8.

8. Determinați cardinalul mulțimii formată din elementele comune ale mulțimilor $A = \{25n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{15m + 9 \mid m \in \mathbb{N}\}$.

9. Fie $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 4n + x < 12, x \in \mathbb{N}\}$. Determinați $x \in \mathbb{N}$ dacă:

a) card $A = 0$; b) card $A = 1$; c) card $A = 2$; d) card $A \geq 3$.

**

10. Determinați cardinalul mulțimilor $A = \left\{\overline{ab} \,\middle|\, \overline{ab} = a \cdot b\right\}$, $B = \left\{\overline{ab} \,\middle|\, \overline{ab} = 2 \cdot a \cdot b\right\}$.

11. Dați exemple de mulțimi finite/ infinite care au/ nu au elemente comune.

12. Fie card $A = m$, card $B = n$, $m, n \in \mathbb{N}$ cu $A \subset B$. Comparați m și n.

13. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10\}$. Determinați numărul mulțimilor B dacă $\{1, 2\} \subset B \subset A$.

14. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determinați numărul submulțimilor $B \subset A$ având card $B = 2$ și suma elementelor lui B număr par.

15. Determinați numărul perechilor (n, m) de numere naturale nenule pentru care $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

16. Determinați $n \in \mathbb{N}$ dacă card $A = 685$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^n \leq x \leq 3^{n+1}\}$.

17. Fie $A = \left\{\frac{4}{1}, \frac{6}{3}, \frac{8}{5}, \frac{10}{7}, \frac{12}{9}, \ldots, \frac{1000}{997}\right\}$.

a) Scrieți A folosind o proprietate caracteristică a elementele sale.
b) Determinați card A.
c) Determinați card B, unde $B = \left\{x \in A \,\middle|\, x < \frac{11}{10}\right\}$.

***

18. Fie $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $B = \{x \in A \mid 2 \leq x < 3\}$. Comparați A și B.

19. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$. Determinați numărul submulțimilor $B \subset A$ dacă produsul elementelor lui B este ≤ 16.

20. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$. Determinați numărul submulțimilor $C \subset A$ dacă suma elementelor lui C este cel mult 7.

21. Împărțiți mulțimea A în două submulțimi fără elemente comune astfel încât sumele elementelor celor două mulțimi să fie egale. Se știe că $A = \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$.

22. Determinați mulțimile A formate din 3 numere naturale având proprietatea că pentru orice $x, y \in A$ avem $1 + x - y \in A$ dacă $x \geq y$ sau $1 + y - x \in A$ dacă $y > x$.

23. Determinați $A \subset \mathbb{N}$ formată din 3 elemente a căror sumă este 19, iar produsul a două elemente este egal cu al treilea.

1.3. Operații cu mulțimi

Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$
Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$
Diferența: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$

Dacă $A \cap B = \varnothing$, mulțimile A şi B se numesc mulțimi **disjuncte**.

Dacă $A \subset E$, atunci $E - A = C_E A$ se numeşte **complementara** mulțimii A în raport cu E.

Proprietăți:

1. **Comutativitatea:** $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;
2. **Asociativitatea:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3. **Independența:** $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
4. **Distributivitatea reuniunii (intersecției) față de intersecție (reuniune):**
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. Pentru orice $B \subset A$, avem $A \cup B = A$; $A \cap B = B$; $A \cap A = A$;
6. **Reuniunea (intersecția)** are proprietatea de **absorbție față de intersecție (reuniune):** $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$.
7. **Legile lui Morgan:** Pentru orice $A \subset E$, $B \subset E$, avem:
$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$; $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

Principiul includerii şi excluderii: Pentru orice mulțimi A, B, C avem:

a) $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$;

b) $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card } A + \text{card } B + \text{card } C - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$;

c) dacă $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, atunci $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card } A + \text{card } B + \text{card } C$.

Probleme propuse

*

1. Împărțiți mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ în două submulțimi disjuncte, astfel încât sumele elementelor acestora să fie egale.

2. Rezolvați problema 1 pentru 3 submulțimi disjuncte.

3. Determinați $\text{card}(A \cap B)$, pentru $\text{card } A = 8$, $\text{card } B = 10$, $\text{card}(A \cup B) = 15$.

4. Dați exemplu de 3 mulțimi A, B, C cu $A = B \cup C$, $B \cap C = \varnothing$, $\text{card } B = 3$, $p(B) = p(C)$, unde $p(M)$ este produsul elementelor lui M.

5. Determinați $A = \{a, b, c, d\}$, ştiind că:
a) $\{c, d\} = \{1, 2\}$; b) $\{a, b, d\} = \{1, 2, 3\}$; c) $\{1, 2\} \cup \{b, d\} = \{1, 2, 3\}$.

CUPRINS