Adrian Zanoschi
Gabriel Popa
Gheorghe Iurea
Petru Răducanu
Ioan Șerdean

Bacalaureat 2023
Matematică
M_mate-info

Teme recapitulative
65 de teste, după modelul M.E.
Breviar teoretic

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.

Redactare: Iuliana Ene
Corectură: autorii
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Bacalaureat 2023 : matematică M_mate-info : teme recapitulative : 65 de teste, după modelul M.E. : breviar teoretic / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa, ... - Piteşti : Paralela 45, 2022
Conţine bibliografie
ISBN 978-973-47-3696-6

I. Zanoschi, Adrian
II. Iurea, Gheorghe
III. Popa, Gabriel

51

Cuvânt-înainte

Examenul de bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală şi personală, având menirea de a certifica pregătirea ştiinţifică şi competenţele dobândite în liceu, dar şi de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecinţă, performanţa la acest examen, şi îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conţinuturilor, cât şi pentru fixare, sistematizare, recapitulare. Lucrarea de faţă îşi propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigenţelor disciplinei şi probelor de examen.

Prima parte a lucrării conţine probleme grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată, în variantele examenelor din anii precedenţi, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Astfel, un elev îşi poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete şi găseşte în carte un număr suficient de exerciţii cu ajutorul cărora să-şi atingă scopul. Problemele sunt însoţite de soluţii detaliate şi de comentarii metodice, unele dintre ele având chiar mai multe rezolvări.

Partea a doua cuprinde 65 de teste, însoţite de răspunsuri şi de rezolvări, iar la sfârşit există un breviar teoretic, care conţine principalele noţiuni prevăzute în programă.

Cartea se adresează celor care se pregătesc pentru bacalaureatul la matematică, indiferent de profilul liceului pe care îl urmează. Din acest motiv, problemele sunt structurate pe două niveluri, cele mai dificile fiind evidenţiate printr-o steluţă. Elevii care nu urmează profilul matematică-informatică pot parcurge doar problemele fără steluţă.

Lucrarea poate fi folosită şi pentru învăţarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiţii reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor şi elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârşitul anului şcolar.

Autorii

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ şi $B = (-2, 7)$. Determinaţi $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.

2. Ordonaţi crescător numerele $a = 2{,}5(1)$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 2{,}(51)$ şi $d = 2{,}51$.

3. Arătaţi că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}}\right)\left(\sqrt{4\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ este natural.

4. Arătaţi că numărul $b = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$ este natural.

5. Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ şi $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculaţi media aritmetică şi media geometrică ale numerelor a şi b.

6. Determinaţi numerele raţionale a şi b, ştiind că $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 = a - b\sqrt{3}$.

7. Demonstraţi că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.

8. Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Stabiliţi câte numere iraţionale conţine mulţimea $\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{199}, \sqrt{200}\right\}$.

10. Calculaţi:

a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{5}{2}\right]$;

b) $\{1{,}64\} - \{-2{,}36\}$;

c) $\left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$;

d) $\left\{\sqrt{2}\right\} + \left\{\sqrt{3}\right\} - \left\{\sqrt{2}+\sqrt{3}\right\}$.

11. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $|x-2|=5$;
b) $|x-1|+|2-2x|=12$;
c) $|1-2x|=|x+4|$;
d) $|x^2-1|+|x+1|=0$.

12. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $|1-2x|\le 3$;
b) $|x+3|\ge 4$.

13. Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |2x+1|\le 100\}$.

14. Arătaţi că valoarea expresiei $E(x)=|4x-8|-2|4-2x|$ nu depinde de numărul real x.

15. Demonstraţi că $|2x-3|+2|x-1|\ge 1$, pentru orice număr real x.

16. Demonstraţi că $x^2+3x+3>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

17. Fie $E(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$, unde $x\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că:

a) $E(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$;

b) $E(x)>\frac{3}{4}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

18. Demonstraţi că, dacă $x, y\in[2,\infty)$, atunci $xy-2x-2y+6\in[2,\infty)$.

19. Demonstraţi, prin inducţie, că următoarele egalităţi sunt adevărate pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$:

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

b) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

20. Demonstraţi, prin inducţie, că următoarele inegalităţi sunt adevărate pentru orice număr natural n care îndeplineşte condiţia indicată:

a) $2^n>2n+1$, $n\ge 3$;

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n\ge 1$.

21. Demonstraţi că numărul 13^n+7^n-2 se divide cu 6, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

22. Aflaţi câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 25.

23. Stabiliţi câte numere naturale de patru cifre se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3.

24. Stabiliţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma utilizând cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

25. Aflaţi câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.

26. Aflaţi câte numere naturale de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 0.

27. Se consideră mulţimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Aflaţi câte perechi $(a, b)\in A\times A$ au proprietatea că produsul $a\cdot b$ este impar.

28. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}$.
a) Aflaţi câte dintre elementele mulţimii A se divid cu 6 şi cu 8.
b) Aflaţi câte dintre elementele mulţimii A se divid cu 6, dar nu se divid cu 8.
c) Determinaţi câte dintre elementele mulţimii A se divid cu 6 sau cu 8.

1.2. Progresii

1. Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, 21, \ldots$.

2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică de raţie 2, în care $a_3 + a_4 = 8$. Determinaţi a_1.

3. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $a_3 = 5$ şi $a_5 = 9$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.

4. Stabiliţi dacă numărul 2007 aparţine progresiei aritmetice $2, 7, 12, 17, \ldots$.

5. Determinaţi numărul real x, ştiind că numerele 2, x şi $x + 4$ sunt în progresie aritmetică.

6. Calculaţi suma $1 + 4 + 7 + \ldots + 31$.

7. Determinaţi numărul natural n din egalitatea $1 + 5 + 9 + \ldots + n = 231$.

8. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 3n - 2$ este o progresie aritmetică. Determinaţi n, dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 51$.

9. Calculaţi suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, dacă:
$a_4 - a_2 = 4$ şi $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

10. Găsiţi suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, dacă:
$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

11. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ un şir cu proprietatea că $a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 + 2n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este o progresie aritmetică.

12*. Demonstraţi că nu există nicio progresie aritmetică având ca termeni (nu neapărat consecutivi) numerele 1, $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$.

13*. Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Câte progresii aritmetice de trei elemente, cu raţia pozitivă, se pot forma cu elementele lui M?

14. Determinaţi numărul real pozitiv x, ştiind că x, 6 şi $x - 5$ sunt în progresie geometrică.

15. Determinaţi primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

16. Ştiind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 2$ şi $b_5 = 4$, determinaţi b_7.

17. Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 3$ şi $b_3 + b_4 = 12$.

18. Determinaţi primul termen şi raţia unei progresii geometrice, dacă $a_1 + a_4 = \frac{7}{16}$, iar $a_1 - a_2 + a_3 = \frac{7}{8}$.

19. Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2008}}$. Demonstraţi că $s \in (1, 2)$.

20. Arătaţi că $2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^8) < 3^9$.

21. Calculaţi $s = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{100}$.

22. Arătaţi că şirul $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = 6 \cdot 2^{n-2}$, $n \geq 1$ este o progresie geometrică. Determinaţi n dacă $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 93$.

23. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ un şir cu proprietatea că $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 10^n - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică.

24. Determinaţi numerele reale a, b, dacă numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică, iar numerele 2, 4, a sunt în progresie aritmetică.

25*. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir pentru care $x_0 = 1$, iar $2x_{n+1} = x_n + 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = x_n - x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, este o progresie geometrică.

b) Determinaţi formula termenului general al şirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

1.3. Funcții. Funcția liniară

1. a) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x - 1$. Calculaţi produsul $P = f(-9) \cdot f(-8) \cdot ... \cdot f(8) \cdot f(9)$.

b) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 3$. Calculaţi suma $S = f(1) + f(2) + ... + f(10)$.

c) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x}$. Calculaţi produsul $P = f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(100)$.

2. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cu proprietatea:

a) $f(1) = f(3)$; b) $f(1) \neq f(3)$; c) $f(1) = 2f(3)$.

3. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$ astfel încât $f(1) \cdot f(2) = 0$.

4. Determinaţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$; c) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$.

5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x-1}$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f şi axele de coordonate.

6. a) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$ este impară.

b) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + |x|$ este pară.

c) Determinaţi numărul funcţiilor impare $f : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$.

7. Demonstraţi că 3 este o perioadă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left\{\dfrac{x+1}{3}\right\}$ (unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracţionară).

8. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + x^2$. Calculaţi $(f \circ f \circ f)(1)$.

9. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ şi $g(x) = x^2 + 1$. Determinaţi funcţiile $f \circ g$ şi $g \circ f$.

10. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ şi $g(x) = x^2 - x$. Determinaţi numerele reale a şi b, astfel încât $f \circ g = g \circ f$.

11. Fie funcţiile $f : (0, +\infty) \to (1, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$ şi $g : (1, +\infty) \to (0, +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x-1}$. Determinaţi funcţiile $f \circ g$ şi $g \circ f$. Sunt egale funcţiile $f \circ g$ şi $g \circ f$?

12*. Se consideră funcţiile: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x<2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$, iar $g(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 2x-4, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinaţi $f + g, f - g, f \cdot g$ şi $f \circ g$.

13. a) Se consideră dreapta de ecuaţie $d : 2x + y - 1 = 0$. Determinaţi funcţia care are ca grafic dreapta d.
b) Există o funcţie al cărui grafic să fie dreapta $d' : 2x + 1 = 0$? Dar pentru dreapta $d'' : 2y + 1 = 0$?

14. Determinaţi funcţia de gradul I al cărei grafic trece prin punctul $A(0, -2)$ şi pentru care $f(1) = 2$.

15. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a, 2)$ se află pe graficul funcţiei f.

16. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$. Determinaţi aria triunghiului format de graficul funcţiei f şi axele sistemului de coordonate.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătaţi că:

a) $2\sqrt{14}-\sqrt{\frac{7}{2}}-5\sqrt{\frac{8}{7}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$;

b) $\sqrt{3}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=3$;

c) $\sqrt{6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. Se consideră numerele $a=\sqrt{3-\sqrt{3}}$ şi $b=\sqrt{3+\sqrt{3}}$. Arătaţi că $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\in\mathbb{Q}$.

3. Arătaţi că numărul $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$.

4. Calculaţi $\left[\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right]$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x).

5. Aduceţi la o formă mai simplă:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{18}:\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$;

d) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{9\sqrt{3}}$.

6. a) Aduceţi la forma cea mai simplă: $E(x,\ y)=\sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}}:\left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$, unde $x,\ y\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că numărul $a=\sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}}\cdot\frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$ este raţional.

7. Se consideră $E(x)=x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$, unde $x\geq 0$. Calculaţi $E(a)$, unde $a=\sqrt[11]{8}$.

8. a) Fie $a=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}$ şi $b=\sqrt[16]{2}$. Arătaţi că $a\cdot b$ este număr raţional.

b) Arătaţi că numărul $a=\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}\in\mathbb{Q}$.

9. Determinaţi numărul natural k, dacă $\left(\sqrt[5]{x^3}\right)^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=x$, pentru orice $x>0$.

10. Ordonaţi crescător numerele:

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4}$ şi $\sqrt[4]{5}$;

b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}},\ \sqrt[4]{27\sqrt{3}}$ şi $\sqrt[3]{4}$.

11. Comparaţi numerele:

a) $a=\sqrt{2}+\sqrt{7}$ şi $b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$; b) $a=\sqrt{13}-\sqrt{12}$ şi $b=\sqrt{12}-\sqrt{11}$.

12. Comparaţi numerele $a=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ şi $b=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$

13. Calculaţi:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$; b) $\log_2 0{,}125$; c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$; d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2\sqrt{8}}$.

14. Ordonaţi crescător numerele $a=-\sqrt[3]{64}$, $b=\log_3\frac{1}{27}$ şi $c=\log_2\frac{1}{32}$.

15. a) Arătaţi că numărul $a=\log_4 8+\log_9 27-\sqrt[3]{8}$ este natural.

b) Demonstraţi că numărul $b=\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

16. Calculaţi:

a) $\log_2\left(6+\sqrt{8}\right)+\log_2\left(6-\sqrt{8}\right)-\log_2 7$; b) $\lg 0{,}01+2^{\log_2 3}-9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$; d) $\dfrac{\log_3 5\cdot\log_7 11}{\log_7 5\cdot\log_3 11}$.

17. Calculaţi:

a) $\log_2 8\cdot\log_3 9\cdot\log_5\sqrt{5}$; b) $\log_2 8\sqrt{2}-\log_3 3\sqrt{3}$.

18. Aduceţi la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}} 9+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$; b) $\dfrac{1}{\log_3 2}+\dfrac{2}{\log_9 4}-\dfrac{3}{\log_{27} 8}$;

c) $\log_{11} 3\cdot\log_7 5-\log_7 3\cdot\log_{11} 5$.

19. Arătaţi că numărul a este raţional, unde:

a) $a=\log_{25}100\cdot\log_{16}25-2\log_{16}5$; b) $a=\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

c) $a=\log_2 9+\dfrac{\log_2 12}{\log_3 2}-\dfrac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$.

20. Arătaţi că numărul $a=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3}{5+2\sqrt{6}}$ este natural.

21. Care număr este mai mare?

a) $\log_3 5$ sau $\log_3 4$; b) $\log_2 3$ sau 2; c) $\log_{0,3} 2$ sau $\log_{0,3} 3$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ sau -1; e) $\log_3 5$ sau $\log_4 5$.

22. Demonstraţi că:

a) $0 < \log_3 2 < 1$; b) $1 < \log_3 4 < \frac{3}{2}$; c) $\log_3 4 < \log_4 9$.

23. a) Arătaţi că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$.

b)* Calculaţi partea întreagă a numărului $a = \log_2 3 + \log_3 2$.

24. Dacă $\log_3 2 = a$, calculaţi $\log_{12} 18$ în funcţie de a.

25. Dacă $\log_{40} 100 = a$, calculaţi $\log_{20} 50$.

26. Ştiind că $\log_{12} 18 = a$, arătaţi că $\log_{24} 36 = \frac{2+2a}{5-a}$.

27. Ştiind că $\log_2 5 = a$, calculaţi $\log_5 \frac{5}{12} + \frac{1}{\log_3 5}$ în funcţie de a.

28. Arătaţi că:

a) $4^{\lg 5} = 5^{\lg 4}$; b) $\sqrt[4]{2^{\lg 3}} = \left(\sqrt{3}\right)^{\lg \sqrt{2}}$.

29. a) Dacă notăm $\log_2 5 = \frac{a}{b}$, arătaţi că $2^a = 5^b$.

b) Demonstraţi că $\log_2 5$ este număr iraţional.

2.2. Numere complexe

1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 2i$ şi $z_2 = -4 + 3i$. Calculaţi $z_1 + z_2$; $3z_1 - 2z_2$.

2. Calculaţi: a) $i \cdot i^2 \cdot \ldots \cdot i^{10}$; b) $1 + i + i^2 + \ldots + i^{10}$.

3. Calculaţi:

a) $(1 - i)(1 + 2i) - 3(2 - i)$; b) $(2 + i)(3 - 2i) - (1 - 2i)(2 - i)$;

c) $\frac{1+4i}{4+7i} + \frac{1-4i}{4-7i}$; d) $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$;

e) $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$; f) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.

4. Demonstraţi că:

a) $\frac{25}{4+3i} + \frac{25}{4-3i} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{1+3i}{1-3i} + \frac{1-3i}{1+3i} \in \mathbb{R}$; c) $(1+i\sqrt{3})^3 \in \mathbb{Z}$;

d) $(1+i\sqrt{3})^2 + (1-i\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$; e) $(1 - i)^{24} \in \mathbb{R}$.

5. Determinați:

a) partea imaginară a numărului $z = \dfrac{2+3i}{3-2i}$;

b) partea reală a numărului $z = \dfrac{2-i}{3i+4}$;

c) partea reală și partea imaginară ale numărului complex $z = \dfrac{5+8i}{8-5i}$;

d) partea imaginară a numărului complex $z = (1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.

6. a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z = 3(a-2i) - 2i(3a-i)$ este număr real.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că $z = \dfrac{2+i}{a(1+i)+i}$ este număr real.

7. a) Determinați $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\dfrac{1+2x}{1-2i} + \dfrac{2+y}{1+2i} = i$.

b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $(1-i\sqrt{3})^3 = a+ib$.

8. Determinați forma algebrică a numerelor complexe:

a) $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{103} + i^{102}$;

b) $z = 1 + \dfrac{1-i}{1+i} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^9$.

9. Determinați conjugatul numărului $i^3 + 2$.

10. Fie z un număr complex. Arătați că $i(z - \bar{z})$ este număr real.

11. Se consideră numărul complex $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculați $z + \dfrac{1}{z}$.

b) Arătați că $z^2 = \bar{z}$.

12. Determinați $z \in \mathbb{C}$, dacă:

a) $z + 3i = 6\bar{z}$;

b) $2\bar{z} + z = 3 + 4i$;

c) $\dfrac{\bar{z}+7i}{z} = 6$.

13. Determinați numerele complexe z care verifică egalitatea $z^2 = i\bar{z}$.

14. Calculați modulele numerelor complexe:

$z_1 = (3-4i)(1+i)$; $z_2 = \sqrt{2} - 1 + i(\sqrt{2}+1)$; $z_3 = \dfrac{8+i}{7-4i}$;

$z_4 = (\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+i)$; $z_5 = (2+3i)^2$; $z_6 = (2-i)^3 + (2+i)^3$.

15. Fie $z = a + 2i$, $a \in \mathbb{R}$. Calculați $|z|$, știind că $1 + i(z + \bar{z}) \in \mathbb{R}$.

16. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţiile:
a) $z^2 = -9$; b) $z^2 - 2z + 2 = 0$; c) $z^2 - 8z + 25 = 0$; d) $z^2 = 2i$.

17. Fie z_1, z_2 soluţiile ecuaţiei $2z^2 + z + 50 = 0$. Calculaţi $|z_1| + |z_2|$.

18. Rezolvaţi ecuaţia $x^2 - (a + i)x + 1 + i = 0$, $a \in \mathbb{R}$, ştiind că are o soluţie reală.

19. Se consideră funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 3z - 4\bar{z}$.

a) Arătaţi că $f(a + bi) = -a + 7bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $(f \circ f)(z) = 25z - 24\bar{z}$.

c) Arătaţi că $f(z) = 0$ dacă şi numai dacă $z = 0$.

20*. Fie $z = 1 + i + i^2 + \ldots + i^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Dacă $n = 102$, calculaţi $|z|$. b) Determinaţi n, astfel încât $z \in \mathbb{R}$.

21*. Fie $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $(z + i)^{10} + (z - i)^{10} = 0$.

a) Arătaţi că $|z + i| = |z - i|$. b) Demonstraţi că $z \in \mathbb{R}$.

2.3. Funcții

1. Determinaţi domeniul maximal de definiţie D al fiecăreia dintre funcţiile:
a) $f(x) = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$; b) $f(x) = x + \log_2(2 - x - x^2)$;

c) $f(x) = \sqrt{x} + \lg\frac{x+1}{2-x}$; d) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x-1}$.

2. a) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculaţi $(f \circ f)(512)$.

b) Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$. Calculaţi $(f \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

c) Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$. Calculaţi $(f \circ f)(256)$.

3. Calculaţi $S = f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \ldots + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde:

$f(x) = \frac{\lg(1+x)}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x$. Demonstraţi că funcţia $f \circ f \circ f$ este strict descrescătoare.

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculaţi $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, τ^{-2}.

2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculaţi $(\sigma\tau)^{-1}$, σ^{-1}, τ^{-1} şi arătaţi că $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$.

3. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. Calculaţi σ^{2009}.

4. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinaţi $x \in S_3$, ştiind că $\sigma x \tau = e$.

5. Se consideră următoarele permutări de gradul patru:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\sigma^2 = \tau^2 = e$, $\sigma^{-1} = \sigma$, $\tau^{-1} = \tau$ şi $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

b) Determinaţi o permutare $\alpha \in S_4$, astfel încât $\alpha^{-1} \neq \alpha$.

6. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Calculaţi σ^3.

b) Rezolvaţi ecuaţia $\sigma^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

7. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Calculaţi $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $\sigma x = \tau$.

8. Determinaţi semnul fiecăreia dintre următoarele permutări:

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Se consideră $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$.

a) Determinaţi σ^{-1}.
b) Arătaţi că σ şi σ^{-1} au acelaşi număr de inversiuni.

10. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & j & 9 \end{pmatrix} \in S_9$. Determinaţi i şi j, astfel încât σ să fie o permutare pară.

11. Se dau permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ şi mulţimea $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Determinaţi numărul elementelor mulţimii A.
b) Arătaţi că toate elementele mulţimii A sunt permutări pare.

12. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$.

a) Determinaţi numărul inversiunilor permutării σ.
b)* Arătaţi că ecuaţia $x^4 = \sigma$ nu are nicio soluţie în S_6.

3.2. Matrice

1. Câte elemente are mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}, |a_{ij}| \le 2, i, j = \overline{1,2} \right\}$?

2. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculaţi $A + B$, $2A - 3B$, $A + A^t$.

3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculaţi $A \cdot B$ şi $B \cdot A$.

4. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$. Calculaţi $a + b + c + d$, ştiind că $2X - AB = A$.

5. Determinaţi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ştiind că $3\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \\ z & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x+y & 1 \\ -1 & z \\ 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -9 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Se consideră matricea $A_k = \begin{pmatrix} 2^k & 2k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Calculaţi suma elementelor matricei $A(x + 1) - A(x)$.
b) Determinaţi $x \in \mathbb{R}$, ştiind că $5A(x) - (A(x))^2 = 4I_3$.
c) Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n} A(k) = nA\left(\frac{n+1}{2}\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Arătaţi că $A(-2) + A(-1) + A(0) + A(1) + A(2) = 5I_3$.
b) Arătaţi că $A(1) \cdot A(2) = 5A(1)$.
c) Determinaţi numerele naturale x şi y astfel încât suma elementelor matricei $A(x) \cdot A(y)$ să fie egală cu 27.

9. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci numărul $\mathrm{tr}(A) = a + d$ se numeşte urma matricei A.

a) Arătaţi că $\mathrm{tr}(X + Y) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$, $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ şi $\mathrm{tr}(\lambda X) = \lambda\mathrm{tr}(X)$, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$.
b)* Demonstraţi că nu există $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $I_2 = XY - YX$.

10. Se consideră mulţimea $G = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$.

a) Arătaţi că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
b) Determinaţi două matrice $C, D \in G$ pentru care $CD \neq DC$.
c) Arătaţi că dacă $A \in G$, atunci $I_2 - A + A^2 \in G$.

11. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătaţi că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $AX = XA$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

12. Determinați matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2017}$.

13. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați A^{2017}.

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculați A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

15. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = A - I_3$.

a) Calculați B^2 și B^3.
b) Calculați A^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

16. Calculați B^n ($n \in \mathbb{N}^*$), știind că $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

17*. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Calculați A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

18*. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Calculați A^n și B^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

19. Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 2a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X((a+1)(b+1)-1)$.
b) Calculați $(X(a))^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Determinați $t \in \mathbb{N}$, știind că $X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(n) = X(t-1)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

20. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_3 + aA$, unde a este un număr real.

a) Calculați A^2.
b) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.
c) Determinați matricea $M = X(-9) \cdot X(-8) \cdot \ldots \cdot X(9) \cdot X(10)$.

21. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid XA=AX\}$.

a) Arătaţi că $B\in C(A)$.

b) Demonstraţi că dacă $X\in C(A)$, atunci există $x, y\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

c)* Rezolvaţi ecuaţia $X+X^2=A$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3.3. Determinanți

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculaţi $\det(I_2+A+A^2+A^3)$.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Rezolvaţi ecuaţia $\det(A-xI_2)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

3. Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătaţi că $\det(X\cdot X^t)=(ad-bc)^2$.

4. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătaţi că $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi $\det(A)+\det(A^2)+\ldots+\det(A^{2017})$.

c) Calculaţi $\det(A+A^2+\ldots+A^{2017})$.

5. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix}z & w\\ -\overline{w} & \overline{z}\end{pmatrix}\middle|\, z, w\in\mathbb{C}\right\}$.

a) Arătaţi că, dacă $A\in G$, astfel încât $\det A=0$, atunci $A=O_2$.

b) Demonstraţi că, dacă $A, B\in G$ şi $A\cdot B=O_2$, atunci $A=O_2$ sau $B=O_2$.

6. Calculaţi determinanţii: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0\\ 6 & 0 & 0\end{vmatrix}$ şi $\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}$.

7. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătaţi că:

$\det(A)=(a-b)(a-1)$ şi calculaţi $\det(A-A^t)$.

Soluții

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. **2.** $b < d < a < c$. **3.** $a = 6 \in \mathbb{N}$. **4.** $b = 2 \in \mathbb{N}$. **5.** $a = \sqrt{2}$, $b = 18\sqrt{2}$, $m_a = \frac{19\sqrt{2}}{2}$, $m_g = 6$. **6.** $a = 8$, $b = -4$. **7.** $\sqrt{x+49} \in [7, 10]$, $\sqrt{x+625} \in [25, 26] \Rightarrow a \in [32, 36]$, $\forall\ x \in [0, 51]$. **8.** $E(x, y) = \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(y+3)^2+1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. **9.** 186. **10.** a) -2; b) 0; c) 5; d) 1. **11.** a) $x \in \{-3, 7\}$; b) $x \in \{-3, 5\}$; c) $x \in \{-1, 5\}$; d) $x = -1$. **12.** a) $x \in [-1, 2]$; b) $x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$. **13.** 100. **14.** $E(x) = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **15.** $|2x - 3| + 2|x - 1| = |2x - 3| + |2x - 2| = |2x - 3| + |2 - 2x| \geq |2x - 3 + 2 - 2x| = 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **16.** $x^2 + 3x + 3 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **17.** b) $E(x) = (x^2 + 1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) > \frac{3}{4}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **18.** $xy - 2x - 2y + 6 = (x - 2)(y - 2) + 2 \in [2, +\infty)$, $\forall\ x, y \in [2, +\infty)$. **21.** Fie $P(n) = 13^n + 7^n - 2 \,\vdots\, 6$, unde $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ avem $13^0 + 7^0 - 2 \,\vdots\, 6$, deci $P(0)$ este adevărată. Presupunem că $P(k)$ este adevărată pentru un număr natural k; atunci $13^k + 7^k - 2 = 6p$, cu $p \in \mathbb{N}$. Rezultă că $13^{k+1} + 7^{k+1} - 2 = 13 \cdot 13^k + 7^{k+1} - 2 = 13(6p + 2 - 7^k) + 7 \cdot 7^k - 2 = 6 \cdot 13p - 6 \cdot 7^k + 24 = 6(13p - 7^k + 4) \,\vdots\, 6$, deci $P(k + 1)$ este adevărată, Drept urmare, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. **22.** 6. **23.** 192. **24.** 60. **25.** 243. **26.** 171. **27.** 16. **28.** a) 8; b) 25; c) 50.

1.2. Progresii

1. $a_1 = 5$. **2.** $a_1 = -1$. **3.** Fie r rația progresiei; atunci $a_1 + 2r = 5$ și $a_1 + 4r = 9$. Rezultă $a_1 = 1$ și $r = 2$. Prin urmare, $S_7 = \frac{(a_1+a_7)7}{2} = 49$. **4.** 2007 este al 402-lea termen al progresiei. **5.** $x = 6$. **6.** Este suma primilor 11 termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen 1 și rația 3; avem că $S_{11} = \frac{(1+31)\cdot 11}{2} = 176$. **7.** Termenii sumei formează o progresie aritmetică în care $a_1 = 1$, $r = 4$. Dacă notăm cu m numărul de termeni, atunci $n = a_m = a_1 + r(m - 1)$, deci $n = 4m - 3$. Astfel, $231 = S_m = \frac{m(4m-2)}{2} = 2m^2 - m$ și cum $m \in \mathbb{N}^*$, obținem că $m = 11$, apoi $n = 41$. **8.** $a_{n+1} - a_n = 3$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deci (a_n) este progresie aritmetică de rație $r = 3$ și $a_1 = 1$. Apoi

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 51 \Rightarrow \frac{(3n-1)n}{2} = 51$, de unde $n = 6$. **9.** Vom avea $a_1 = 2$, $r = 2$, $S_{20} = 420$. **10.** Observăm că $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = (a_1 + 5r) + (a_1 + 8r) + (a_1 + 11r) + (a_1 + 14r) = 4a_1 + 38r$, prin urmare $2a_1 + 19r = 10$. Atunci $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 10(a_1 + a_1 + 19r) = 10 \cdot 10 = 100$. **11.** Pentru $n \geq 2$ avem: $a_n = (a_1 + ... + a_n) - (a_1 + ... + a_{n-1}) = n^2 + 2n - (n-1)^2 - 2(n-1) = 2n + 1$. Cum $a_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$, rezultă că $a_n = 2n + 1$, $\forall\, n \geq 1$. Atunci $a_{n+1} - a_n = 2$, $\forall\, n \geq 1$, aşadar $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică de raţie 2. **12.** Presupunem, prin absurd, că există o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_p = 1$, $a_q = \sqrt{2}$ şi $a_s = \sqrt{3}$, cu $p, q, s \in \mathbb{N}^*$. Atunci $1 = a_1 + (p-1)r$, $\sqrt{2} = a_1 + (q-1)r$ şi $\sqrt{3} = a_1 + (s-1)r$, unde r este raţia progresiei ($r \neq 0$). Deducem că $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{p-q}{q-s}$, contradicţie: numărul din stânga este iraţional, iar cel din dreapta este raţional. **13.** Există 8 progresii de raţie 1, 6 progresii de raţie 2, 4 progresii de raţie 3 şi 2 progresii de raţie 4, în total 20 de progresii. **14.** $x = 9$. **15.** Din $b_3^2 = 6 \cdot 24$, obţinem că $b_3 = 12$. Raţia progresiei va fi $q = \frac{b_3}{b_2} = 2$, deci $b_1 = \frac{b_2}{q} = 3$. **16.** Fie q raţia progresiei; atunci $b_1q^2 = 2$ şi $b_1q^4 = 4$. Rezultă $q^2 = 2$ şi $b_1 = 1$. Prin urmare, $b_7 = b_1q^6 = 8$. **17.** Fie $q > 0$ raţia progresiei. Rezultă $b_1 + b_1q = 3$ şi $b_1q^2 + b_1q^3 = 12$. Deducem că $q = 2$. **18.** Dacă q este raţia progresiei, atunci $a_1(1 + q^3) = a_1(1 + q)(1 - q + q^2) = \frac{7}{16}$, iar $a_1(1 - q + q^2) = \frac{7}{8}$. Deducem că $q = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$. **19.** $s = 2 - \frac{1}{2^{2008}} \in (1, 2)$. **20.** $2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^8) = 2 \cdot \frac{3^9 - 1}{2} = 3^9 - 1 < 3^9$. **21.** $s = \frac{2^{101} + 1}{3}$. **22.** Deoarece $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, (b_n) este progresie geometrică de raţie $q = 2$ şi $b_1 = 3$; $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 93 \Leftrightarrow 3(2^n - 1) = 93 \Leftrightarrow n = 5$. **23.** Analog soluţiei problemei 11, avem: $b_n = (10^n - 1) - (10^{n-1} - 1) = 9 \cdot 10^{n-1}$, $\forall\, n \geq 2$. Cum $b_1 = 10^1 - 1 = 9$, putem spune că $b_n = 9 \cdot 10^{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$. Atunci $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{9 \cdot 10^n}{9 \cdot 10^{n-1}} = 10$, $\forall\, n \geq 1$, aşadar $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie 10. **24.** Din $a^2 = 2b$ şi $8 = 2 + a$ rezultă $a = 6$, $b = 18$. **25.** a) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}x_n + 1\right) - \left(\frac{1}{2}x_{n-1} + 1\right)}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{2}$, $\forall\, n \geq 1$, deci $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie $\frac{1}{2}$; b) Cum $b_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, rezultă că $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2^n}$, $\forall\, n \geq 1$. Atunci $x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_2 - x_1) + x_1 = b_n + b_{n-1} + ... + b_2 + \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, iar această egalitate se verifică şi când $n = 0$.

1.3. Funcții. Funcția liniară

1. a) 0; b) 525; c) 101. **2.** a) 216; b) $6^4 - 6^3 = 1080$; c) $3 \cdot 36 = 108$. **3.** 15. **4.** a) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$; c) $[1, +\infty) \cup \{0\}$. **5.** $A_1(-3, 0)$ şi $A_2(-2, 0)$, respectiv $B(0, -6)$. **6.** c) Din $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in \{-1, 0, 1\}$, deducem că $f(0) = 0$. Există 3 funcţii impare. **7.** Din $\{a\} = a - [a]$, deducem că $f(x + 3) = \left(\frac{x+1}{3}+1\right) - \left[\frac{x+1}{3}+1\right] = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **8.** 42. **9.** $f \circ g,\ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$, $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 2$. **10.** $(a, b) \in \{(0, 0); (0, 2); (1, 0)\}$. **11.** $f \circ g : (1, +\infty) \to (1, +\infty)$, $(f \circ g)(x) = x$; $g \circ f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $(g \circ f)(x) = x$, deci $f \circ g \neq g \circ f$. **12.** $f + g, f - g, f \cdot g, f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = \begin{cases} 1-2x, & x<0 \\ -x-2, & 0 \le x < 2 \\ 3x-5, & x \ge 2 \end{cases}$, $(f - g)(x) = \begin{cases} 3-4x, & x<0 \\ 6-5x, & 0 \le x < 2 \\ 3-x, & x \ge 2 \end{cases}$,

$(fg)(x) = \begin{cases} (2-3x)(x-1), & x<0 \\ (2-3x)(2x-4), & 0 \le x < 2 \\ (x-1)(2x-4), & x \ge 2 \end{cases}$, $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2-3g(x), & g(x)<2 \\ g(x)-1, & g(x) \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 5-3x, & x<0 \\ 14-6x, & 0 \le x < 3 \\ 2x-5, & x \ge 3 \end{cases}$.

13. a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$; b) Nu există; c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}$. **14.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 2$. **15.** $a \in \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$. **16.** Intersecţiile graficului cu axele sunt $A(0, -6)$ şi $B(3, 0)$, iar aria triunghiului OAB este 9. **17.** $x = \frac{-2}{m^2+1} \notin (0, +\infty)$. **18.** $A(0, a)$, $B\left(-\frac{2}{a}, 0\right)$ şi $AB = \sqrt{\frac{4}{a^2}+a^2} \ge \sqrt{4} = 2$, deci $AB \ge 2$. **19.** $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. **20.** a) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$; b) $\operatorname{Im} f = (-\infty, 4)$; c) $\operatorname{Im} f = [-1, 7]$. **21.** $\sqrt{2} - 5$. **22.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **23.** $(f \circ g)(x) = -2x$, $f \circ g$ este strict descrescătoare. **24.** Dacă $f(x) = ax + b$, atunci $(f \circ f)(x) = a^2x + ab + b$. Găsim $a = -3$ şi $b = -\frac{1}{2}$. **25.** a) $x = 2$; b) $x \in [2, 3]$. **26.** a) $x \in (2, 6]$; b) $x \in (-1, 8]$; c) $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. **27.** a) $x \in [1, 2]$; b) $x \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{1}{5}\right]$.

1.4. Ecuația de gradul al II-lea. Funcția de gradul al II-lea

1. a) $S = \{0, 9\}$; b) $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$; c) $S = \{-10, 1\}$; d) $\{-1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$. **2.** a) $S = \{-1, 2\}$; b) $S = \{-1, 0\}$; c) $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$; d) $S = \{-1, 1\}$. **3.** a) $S = [-2, 1]$; b) $S = [2, 3]$; c) $S = [-3, 0) \cup [3, +\infty)$. **4.** $S = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$. **5.** $S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$. **6.** $S = (0, 1)$. **7.** a) $S = \left\{1, 2, \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$; b) $S = \{-1, 0, 2\}$. **8.** a) $S = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$; b) $S = (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

9. $S=\left[\frac{1}{7},\ 1\right]\cup[3, +\infty)$. **10.** Se impune condiția $\Delta > 0$, de unde $a \in \left(-\infty,\ \frac{1}{8}\right)\cup(1, +\infty)$. **11.** $\frac{3}{4}$. **12.** a) $5x^2 - 2x = 0$; b) $x^2 - 2x - 1 = 0$. **13.** Ecuația cu rădăcinile y_1, y_2 este $y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1 \cdot y_2 = 0$, deci $2y^2 - 9y + 6 = 0$. **14.** a) $\frac{25}{4}$; b) $-\frac{25}{8}$; c) $-\frac{99}{8}$; d) Folosind relația $2x_1^2 + 3x_1 - 4 = 0$ rezultă că $x_1^2 = 2 - \frac{3x_1}{2}$ și atunci $E = \frac{x_1-6}{3x_1} + + \frac{x_2-6}{3x_2}$. Deducem că $E = -\frac{5}{6}$. **15.** a) $S_1 = 3$, $S_2 = 17$; b) Avem $x_1^2 - 3x_1 - 4 = 0$ și $x_2^2 - 3x_2 - 4 = 0$, de unde deducem că $x_1^{n+2} - 3x_1^{n+1} - 4x_1^n = 0$ și $x_2^{n+2} - 3x_2^{n+1} - 4x_2^n = 0$ și, prin adunare, găsim relația $S_{n+2} - 3S_{n+1} - 4S_n = 0$; c) $S_5 = 1023$. **16.** a) $-\frac{1}{4}$; b) 0; c) Ridicând la pătrat, avem $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$, deci, găsim $m=-\frac{1}{4}$. **17.** a) $\Delta = 4(m^2 + m + 1) > 0$, $\forall\ m \in \mathbb{R}$, deci $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$; b) Se impune condiția $x_1 \cdot x_2 < 0$, de unde $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. c) Se impun condițiile $x_1 \cdot x_2 > 0$ și $x_1 + x_2 > 0$ care conduce la soluția $m \in \varnothing$. **18.** Se impun condițiile $\Delta \le 0$ și $m < 0$, de unde rezultă că $m = -\frac{1}{2}$. **19.** $m \in \left[\frac{8}{3},\ +\infty\right)$. **20.** Deducem că $ax^2 + 2(a + 1)x + a \le 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Se impun condițiile $\Delta \le 0$ și $a < 0$, deci $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. **21.** Deoarece $x^2 + 1 > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, deducem că $x^2 + 2x - 1 \ge a(x^2 + 1)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, deci $a \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right]$. **22.** a) $S=\left\{(-1,\ 1);\ \left(\frac{17}{13},\ \frac{-7}{13}\right)\right\}$; b) $S = \{(0, -3); (1, -1)\}$; c) $S = \{(-1, 5); (-3, 19)\}$. **23.** a) Dacă notăm $x + y = s$ și $x \cdot y = p$, atunci $s + p = 5$ și $s^2 - 2p = 5$, deci $(s, p) \in \{(3, 2); (-5, 10)\}$. Obținem $S = \{(1, 2); (2, 1)\}$; b) $S = \{(1, 2); (2, 1)\}$; c) $S = \left\{\left(1,\ \frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2},\ 1\right);\left(\frac{-3+\sqrt{33}}{12},\ \frac{-3-\sqrt{33}}{12}\right);\left(\frac{-3-\sqrt{33}}{12},\ \frac{-3+\sqrt{33}}{12}\right)\right\}$.
24. Înlocuind y cu $1 - x$ în a doua ecuație, obținem ecuația $2x^2 + (a - 4)x = 0$, care are soluție unică pentru $a = 4$. Soluția $S = \{(0, 1)\}$. **25.** $f(x) = x^2 - x$. **26.** $f(x) = x^2 - 2x + 3$. **27.** $f(x) = x^2 - 2x - 3$ și $f(2) = -3$. **28.** Cadranul IV. **29.** Avem $x_V = \frac{1-a}{a}$, $y_V = \frac{a-1}{a}$, deci $x_V = -y_V$.
30. Se impune condiția $f(a) = b$, $\forall\ m \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow m(a^2 + 2a + 1) - 2a + 3 - b = 0$, $\forall\ m \in \mathbb{R}^*$. Deducem că $a^2 + 2a + 1 = 0$ și $-2a + 3 - b = 0$, de unde $a = -1$ și $b = 5$. **31.** $S = \{-2, 0\}$. **32.** $a = 0$ și $b = 3$. **33.** $a = -4$ și $b = 4$. **34.** Abscisa punctului de intersecție dintre d și $\mathscr{P}$ verifică ecuația $ax^2 + (a - 1)x + 3 = -x + 2 \Leftrightarrow ax^2 + ax + 1 = 0$. a) $\Delta = 0$, de unde $a = 4$; b) $\Delta > 0$, deci $a \in (-\infty, 0)\cup(4, +\infty)$. **35.** $a \in \left\{-3, -\frac{7}{3}\right\}$. **36.** $G_f \cap G_g = \{(0, 1); (2, 7)\}$. **37.** $G_f \cap G_g = \{(-1, 0); (3, 12)\}$. **38.** Deoarece f este strict descrescătoare pe $(2, +\infty)$ și cum $2 < 1 + \sqrt{2} < 1 + \sqrt{3} < 3$,

deducem că $f(3) < f\left(1+\sqrt{3}\right) < f\left(1+\sqrt{2}\right)$. **39.** Folosim faptul că $f(x) \geq \frac{3}{4}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **40.** a) $[-3, +\infty)$; b) $[-2, 22]$; c) $[-3, 6]$. **41.** $\operatorname{Im} f = \left[\frac{2}{3}, 2\right]$.

1.5. Vectori

1. a) $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BD}$. **2.** $|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}|=0$. **3.** a) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$; b) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{AO}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{DA}|=1$; d) $|\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}| = 5 = |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$. **5.** a) Ambele sume sunt egale cu $\overrightarrow{AC}$; b) $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; c) Ambele diferenţe sunt egale cu $\overrightarrow{MC}$; d) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM})=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{CM}$. **6.** a) Ţinând seama de faptul că *ABDE* şi *ACDF* sunt paralelograme, avem $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF})+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}=6\overrightarrow{AO}$; b) Patrulaterul *ABCO* este romb, deci $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **7.** Fie *O* punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului. Cum *O* este mijlocul diagonalelor *AC* şi *BD*, avem $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$. **8.** Din $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$ obţinem că $2\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{CM}$. Avem $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ şi $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$. Deducem că $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, de unde rezultă cerinţa. **9.** a) $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$; b) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
10. Vectorul $b \cdot \overrightarrow{AB}$ are lungimea egală cu *bc*, la fel ca vectorul $c \cdot \overrightarrow{AC}$. Punctul *D* este al patrulea vârf al paralelogramului *AB'DC'*, unde $\overrightarrow{AB'} = b \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'} = c \cdot \overrightarrow{AC}$. Cum *AB'* = *AC'*, paralelogramul *AB'DC'* este romb, deci diagonala *AD* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.
11. Din teorema lui Thales rezultă că $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=4$. Deducem $\frac{CN}{CA}=\frac{1}{5}$, deci $\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.
12. Din $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că *DE* ‖ *BC*. **13.** *MN* este linie mijlocie în trapezul *ABCD*, deci *MN* ‖ *AB*. Apoi, *NP* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*, aşadar *NP* ‖ *AP*. Din axioma paralelelor urmează coliniaritatea punctelor *M*, *N* şi *P*.
14. Cum $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=3$, din reciproca teoremei lui Thales rezultă că *MN* ‖ *BC*. *Altfel*: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{MN}$, deci *BC* ‖ *MN*. **15.** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Rezultă că punctele *A*, *C* şi *F* sunt

Cuprins

Cuvânt-înainte..5

TEME RECAPITULATIVE

Enunţuri Soluţii

Clasa a IX-a

1.1. Mulţimi şi elemente de logică matematică .... 7.....234
1.2. Progresii .... 9.....234
1.3. Funcţii. Funcţia liniară .... 10.....236
1.4. Ecuaţia de gradul al II-lea. Funcţia de gradul al II-lea .... 13.....236
1.5. Vectori .... 16.....238
1.6. Trigonometrie .... 19.....239
1.7. Aplicaţii ale trigonometriei în geometrie .... 21.....241

Clasa a X-a

2.1. Radicali şi logaritmi .... 24.....243
2.2. Numere complexe .... 26.....244
2.3. Funcţii .... 28.....245
2.4. Ecuaţii şi inecuaţii .... 31.....247
2.5. Combinatorică .... 34.....250
2.6. Matematici aplicate. Probabilităţi .... 36.....251
2.7. Geometrie analitică .... 38.....253
2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a .... 41.....254

Clasa a XI-a

3.1. Permutări .... 48.....256
3.2. Matrice .... 49.....256
3.3. Determinanţi .... 52.....258
3.4. Inversa unei matrice. Ecuaţii matriceale .... 56.....259
3.5. Sisteme de ecuaţii liniare .... 58.....261
3.6. Probleme de sinteză – algebră .... 62.....263
3.7. Şiruri .... 67.....265
3.8. Şiruri date prin formule de recurenţă .... 72.....269
3.9. Limite de funcţii .... 74.....271
3.10. Asimptote .... 78.....273
3.11. Funcţii continue .... 80.....274
3.12. Derivata unei funcţii .... 82.....276
3.13. Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle. Teorema lui Lagrange .... 85.....278
3.14. Regulile lui l'Hospital .... 88.....281
3.15. Rolul derivatelor de ordinul I şi de ordinul al II-lea în studiul funcţiilor .... 90.....282
3.16. Reprezentarea grafică a funcţiilor .... 95.....289
3.17. Probleme de sinteză – analiză matematică .... 98.....295

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziţie .... 104.....299
4.2. Grupuri .... 107.....301
4.3. Inele şi corpuri .... 112.....306
4.4. Polinoame .... 115.....310
4.5. Probleme de sinteză – algebră .... 122.....315
4.6. Primitive .... 125.....316
4.7. Formula Leibniz–Newton .... 131.....319
4.8. Metode de integrare .... 135.....323
4.9. Proprietăţi ale integralei Riemann .... 139.....327
4.10. Aplicaţii ale integralei definite .... 143.....332
4.11. Probleme de sinteză – analiză matematică .... 146.....334

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E. .... 150.....337

BREVIAR TEORETIC 367

Bibliografie 396