Redactare: Ramona Rossall, Daniel Mitran
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu, Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, MARIA
Caiet de vacanță : matematică : clasa a VII-a : suport teoretic, exerciții şi probleme aplicative / Maria Zaharia. - Piteşti : Paralela 45, 2019
ISBN 978-973-47-3019-3

51

Maria Zaharia

Caiet de vacanţă
Matematică
Clasa a VII-a

Suport teoretic, exerciţii şi probleme aplicative

Editura Paralela 45

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) Dacă x este un număr natural, întreg sau rațional, atunci x^2 este .... lui x şi despre numărul x^2 se spune că este ....

b) Rădăcina pătrată a unui număr pozitiv a este numărul pozitiv notat ...., al cărui pătrat ....

2. a) Dacă a şi p sunt două numere pozitive, atunci $\sqrt{a} = p$ dacă şi numai dacă ....

b) Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural este ....

3. a) Operația prin care se află rădăcina pătrată a unui număr pozitiv se numeşte .... din acel număr.

b) Pentru a extrage rădăcina pătrată dintr-un pătrat perfect se descompune .... şi se foloseşte proprietatea $n = p^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} =$ ....

4. a) Prin estimare se înțelege ....

b) A estima rădăcina pătrată a unui număr înseamnă ....

5. a) Pentru a estima, pentru a aproxima prin adaos sau prin lipsă la un anumit ordin de mărime rădăcina pătrată dintr-un număr pozitiv care nu este pătrat perfect, se foloseşte ....

b) A calcula rădăcina pătrată a numărului 2, care nu este ...., cu o eroare mai mică decât 0,00001, înseamnă a scrie $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ cu ajutorul unui .... şi a scrie rezultatul luând în considerație doar .... zecimale, adică $\sqrt{2} =$ ....

6. a) Dacă $n \in \{0, 1, 2, 7, 11, 12\}$, atunci $n^2 \in \{$........................$\}$.

b) Dacă $n^2 \in \{9, 16, 25, 36, 64, 81, 100\}$, atunci $\sqrt{n^2} \in \{$...$\} =$ $=$ ....

7. Se consideră mulțimea $M = \{8, 121, 72, 144, 49, 169\}$.

a) Elementele mulțimii M, care sunt pătrate perfecte, sunt ....

b) Rădăcinile pătrate ale numerelor naturale pătrate perfecte din mulțimea M sunt ....

8. a) Ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect poate fi: ....

b) Dacă ultima cifră a unui număr natural este 2, 3, 7 sau 8, atunci numărul respectiv ....
....

9. a) Dacă ultima cifră a unui număr este 4, atunci numărul respectiv poate ....
.... sau ....

b) Numerele 14, 24, 34, 44, 54 ş.a.m.d. au ultima cifră 4 şi nu sunt ....

c) Numerele 4, 64, 144, 324 ş.a.m.d. au ultima cifră 4 şi sunt ....;
$4 = 2^2$; $64 = 8^2$; $144 = 12^2$; $324 = 18^2$.

10. a) Dacă $\sqrt{\overline{1xy}}$ este număr natural, atunci $\overline{1xy} \in$ ....
....

b) Dacă $\sqrt{\overline{3ab}}$ este număr natural, atunci $a + b \in$ ....
....

11. Rădăcinile pătrate ale numerelor:

a) $2^2 \cdot 3^4$; $2^6 \cdot 5^2$; $5^4 \cdot 7^2$; $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ sunt ....;

b) 576; 1024; 1764; 15876 sunt ....

12. a) Pătratele perfecte mai mici decât 51 sunt ....

b) Pătratele perfecte cuprinse între 200 şi 391 sunt ....

13. a) Mulţimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^2 \leq x < 6^2\}$ are .... elemente.

b) Numărul pătratelor perfecte cuprinse între 2^2 şi 7^2 este egal cu ....

14. Efectuând următoarele calcule se obţine:

a) $\sqrt{13^2 - 5^2} =$ ....;

b) $\sqrt{12^2 + 16^2} =$ ....;

c) $\sqrt{2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^2} =$ ....;

d) $\sqrt{9 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5^2} =$ ....

15. a) Pătratele perfecte de trei cifre sunt: ....
....

b) Numerele de forma $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 7$ şi $5n + 8$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece
....
....

16. Folosind un calculator scrieţi cu două zecimale exacte numerele:

a) $\sqrt{19} =$ ....; b) $\sqrt{111} =$ ....; c) $\sqrt{631} =$ ....

17. a) Două numere întregi consecutive între care se poate încadra numărul $\sqrt{31}$ sunt .... și ....

b) Aproximarea prin lipsă la sutimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

c) Aproximarea prin adaos la miimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

d) Rotunjirea la zecimi de miimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

18. Numerele naturale x pentru care:

a) $4 < \sqrt{x} < 5$ sunt: .... ;

b) $\sqrt{3} < x < \sqrt{19}$ sunt: ....

19. Trei numere raționale cuprinse între:

a) $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ sunt: .... ;

b) $\sqrt{17}$ și $\sqrt{18}$ sunt: ....

20. Se consideră mulțimile: $A = \left\{0; \frac{1}{2^0}; \frac{1}{2^1}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{64}{16}\right\}$ și $B = \left\{\sqrt{x}, x \in A \text{ și } \sqrt{x} \in \mathbb{N}\right\}$. Cardinalul mulțimii B este ...., deoarece $B = \{$..................$\}$.

21. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{19}; \frac{1}{20}\right\}$. Mulțimea $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in A\}$ are .... elemente.

22. Se consideră mulțimea $M = \left\{\sqrt{0,16}; \sqrt{\frac{9}{49}}; \sqrt{\frac{121}{25}}; \sqrt{\frac{4}{169}}\right\}$. Numărul fracțiilor subunitare din această mulțime este egal cu ....

23. Calculând rădăcinile pătrate ale numerelor: $\frac{25}{49}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; 0,25; $\frac{1}{2500}$; $\frac{196}{324}$ se obțin: ....

24. Precizați rădăcina pătrată a numărului n cu aproximație de o unitate (prin lipsă și prin adaos) dacă:

a) $n = 37$; b) $n = 71$.

Soluție: a) Deoarece $36 < 37 < 49$, adică $6^2 < 37 < 7^2$, rezultă că $6 < \sqrt{37} < 7$ și $\sqrt{37} \approx 6$ (prin lipsă), respectiv $\sqrt{37} \approx 7$ (prin adaos).

....

....

25. Demonstrați că numărul $n = 2019 + 2(1 + 2 + 3 + ... + 2018)$ este pătrat perfect.

1. a) Desenați **un patrulater *ABCD* convex**.

b) Desenați **un patrulater *MNPQ* concav**.

Fig. 1.a

Fig. 1.b

2. Examinați cu atenție figura 2. Explicați de ce figura $ABCD$ nu este un patrulater.

Demonstrație: În figura alăturată $ABCD$ nu este patrulater, deoarece segmentele AD și BC ....

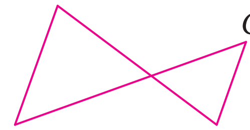

Fig. 2

3. Desenați un patrulater convex $ABCD$ care să aibă:
a) două laturi opuse congruente;
b) două laturi opuse paralele și congruente;
c) două unghiuri alăturate suplementare;
d) două unghiuri alăturate congruente.

Fig. 3.a *Fig. 3.b* *Fig. 3.c* *Fig. 3.d*

4. Fie patrulaterul convex $ABCD$ din figura alăturată. Calculați suma măsurilor unghiurilor patrulaterului.

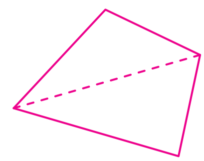

Fig. 4

Demonstrație: În ΔABC suma măsurilor unghiurilor este de $180°$, adică:

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA =$ ....° (1).

În triunghiul ADC ...., adică .... $= 180°$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ ....

5. a) Judecați și notați dacă se poate construi un patrulater convex, astfel încât suma măsurilor a trei unghiuri să fie 170°.

b) Un patrulater *ABCD* are unghiurile *A* și *C* drepte și unghiul *B* ascuțit. Demonstrați că unghiul *D* este obtuz.

Demonstrație: a) Cum suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de ....° și suma măsurilor celor trei unghiuri este 170°, înseamnă că măsura .... ar fi 360° – 170° = ...°, ceea ce ...., deoarece $0° \le x° \le 180°$.

Deci, ...;

b) În figura alăturată: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$. Dar $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle B + \sphericalangle D =$ .... = ...° $\Rightarrow \sphericalangle D =$ ....°. Cum $\sphericalangle B$ este unghi ascuțit $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle B <$ ....° $\Rightarrow \sphericalangle D >$ ....°, adică $\sphericalangle D$ este unghi obtuz.

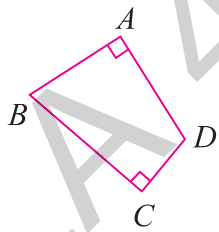

Fig. 5

6. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 2, 3, 4 și 6.

Demonstrație: Fie patrulaterul *ABCD*. Avem: $\frac{\sphericalangle A}{2} = \frac{\sphericalangle B}{3} = \frac{\sphericalangle C}{4} = \frac{\sphericalangle D}{6} = \frac{\text{..........}}{2+3+4+6} = \frac{360°}{\text{......}} = 24°$.

Din $\frac{\sphericalangle A}{2} = 24° \Rightarrow \sphericalangle A = 2 \cdot 24° = 48°$ ....

....

....

....

Deci, măsurile unghiurilor patrulaterului sunt: 48°, ...°, ...°, ...°.

7. Specificați care dintre figurile ce urmează este paralelogram; justificați răspunsul dat.

Demonstrație: *ABCD* ....,

deoarece $AB \parallel CD$ și ....

MNPQ ....,

deoarece $MN \parallel PQ$ și ....

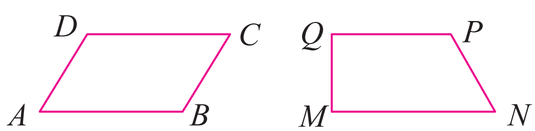

Fig. 6

8. Enunțați proprietățile paralelogramului:

a) Într-un paralelogram, laturile ....,

adică $AB \equiv CD$ și .... ≡ ....

b) Într-un paralelogram, unghiurile opuse sunt ....,

adică $\sphericalangle A \equiv$ .... și $\sphericalangle B \equiv$ ....

c) Într-un paralelogram, unghiurile alăturate sunt ...., adică $\sphericalangle A + \sphericalangle B =$ ....°.

d) Într-un paralelogram, diagonalele ...., adică $AO \equiv$ .... și $BO \equiv$ ....

e) Punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este .... al acestuia, adică $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow O$ este .... al paralelogramului *ABCD*.

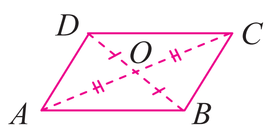

Fig. 7

SOLUȚII

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) pătratul; pătrat perfect; b) $\sqrt{a}$; este egal cu a. **2.** a) $a = p^2$; b) acel număr natural. **3.** a) extragerea rădăcinii pătrate; b) numărul în factori primi; $n = p^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} = p$, $n \in \mathbb{N}$. **4.** a) stabilirea valorii aproximative a unui obiect, a unui bun; b) a aproxima prin lipsă sau prin adaos la zecimi, sutimi, miimi, ..., în funcție de cerința problemei, rădăcina pătrată a numărului respectiv. **5.** a) un calculator; b) pătrat perfect; primele 5 zecimale, adică $\sqrt{2} = 1{,}41421$. **6.** a) $n^2 \in \{0, 1, 4, 49, 121, 144\}$; b) $\sqrt{n^2} \in \left\{\sqrt{3^2}, \sqrt{4^2}, \sqrt{5^2}, \sqrt{6^2}, \sqrt{8^2}, \sqrt{9^2}, \sqrt{10^2}\right\} = \{3, 4, 5, 8, 9, 10\}$. **7.** a) $121 = 11^2$; $144 = 12^2$; $49 = 7^2$; $169 = 13^2$; b) $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{169} = 13$. **8.** a) $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$; b) nu este pătrat perfect. **9.** a) să fie pătrat perfect sau poate să nu fie pătrat perfect; b) pătrate perfecte; c) pătrate perfecte. **10.** a) $\overline{1xy} \in \{10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2\} \Rightarrow \overline{1xy} \in \{100, 121, 144, 169, 196\}$; b) $a + b \in \{6, 7\}$, deoarece $\overline{3ab} \in \{324, 361\}$. **11.** a) $2 \cdot 3^2 = 18$; $2^3 \cdot 5 = 40$; $5^2 \cdot 7 = 175$; $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$; b) 24; 32; 42; 126. **12.** a) $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; b) $15^2 = 225$; $16^2 = 256$; $17^2 = 289$; $18^2 = 324$; $19^2 = 361$. **13.** a) 27; b) 4. **14.** a) $\sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$ și analog; b) 20; c) 9; d) 5. **15.** a) $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$; $15^2 = 225$; $16^2 = 256$; $17^2 = 289$; $18^2 = 324$; $19^2 = 361$; $20^2 = 400$; $21^2 = 441$; $22^2 = 484$; $23^2 = 529$; $24^2 = 576$; $25^2 = 625$; $26^2 = 676$; $27^2 = 729$; $28^2 = 789$; $29^2 = 841$; $30^2 = 900$; $31^2 = 961$; b) Notând cu u(x) ultima cifră a unui număr x se obțin u($5n + 2$) $\in \{7, 2\}$, u($5n + 3$) $\in \{8, 3\}$, u($5n + 7$) $\in \{2, 7\}$ și u($5n + 8$) $\in \{3, 8\}$ și, dacă ultima cifră a unui număr este 2, 3, 7 sau 8, numărul nu este pătrat perfect. **16.** a) 4,35; b) 10,53; c) 25,11. **17.** a) $25 < 31 < 36 \Leftrightarrow 5 < \sqrt{31} < 6$; b) 5,56; c) 5,568; d) 5,5678. **18.** a) 17, 18, 19, ..., 24; b) 2, 3, 4. **19.** a) 1,5; 1,6; 1,7; b) 4,15; 4,18; 4,20. **20.** card $B = 3$, deoarece $B = \{0, 1, 2\}$. **21.** 4. **22.** 3. **23.** $\frac{5}{7}; \frac{4}{9}; 0{,}5; \frac{1}{50}; \frac{14}{18}$. **24.** b) 8, respectiv 9. **25.** $n = 2019 + 2 \cdot \frac{2018 \cdot 2019}{2} \Rightarrow n = 2019 + 2018 \cdot 2019 = 2019 \cdot (1 + 2018) = 2019^2$ și este pătrat perfect.

1.2. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

1. a) nu se divide prin pătratul niciunui număr prim; b) numere libere de pătrate, deoarece nu se divid prin pătratul niciunui număr prim; c) nu sunt numere libere de pătrate, deoarece se divid prin pătratele numerelor 3, 2, 5, 7 și, respectiv, 11. **2.** a) $a\sqrt{b}$ – formula pentru scoaterea factorilor de sub radical; b) a. **3.** $\sqrt{112} = \sqrt{2^4 \cdot 7} = 2^2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$. **4.** a) $\sqrt{a^2 b}$; introducere a factorilor sub radical $\sqrt{108}$. **5.** a) $28 = 2^2 \cdot 7$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $147 = 3 \cdot 7^2$; b) $2\sqrt{7}$, $6\sqrt{5}$ și $7\sqrt{3}$. **6.** a) $\sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$; b) $\sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$; c) $\sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$; d) $\sqrt{4^2 \cdot 6} = \sqrt{16 \cdot 6} = \sqrt{96}$. **7.** a) $2^2 \cdot 5\sqrt{3} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = \sqrt{1200} < \sqrt{1225} = 35$; b) $33 = \sqrt{1089} < \sqrt{1200} = 2^2 \cdot 5\sqrt{3}$. **8.** a) $9 = \sqrt{81} < \sqrt{90} < \sqrt{100} = 10$; b) 9, respectiv 10. **9.** a) 1; b) 6. **10.** a) $\sqrt{25^n \cdot (1 + 25 + 25^2)} = \sqrt{5^{2n} \cdot 651} = 5^n\sqrt{651}$; b) $\sqrt{(2 \cdot 5^2)^n \cdot (2 \cdot 3^2)^{n+1} \cdot (3^2)^n} = \sqrt{2^n \cdot 5^{2n} \cdot 2^n \cdot 2 \cdot 3^{2n} \cdot 3^2 \cdot 3^{2n}} = \sqrt{2^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 2 \cdot 3^{4n+2}} = 2^n \cdot 5^n \cdot 3^{2n+1}\sqrt{2} = 10^n \cdot 3^{2n+1}\sqrt{2}$.

Cuprins