Redactare: Alina Costache
Tehnoredactare: Mariana Dumitru
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, MARIA
Caiet de vacanță: matematică: clasa a VI-a: suport teoretic, exerciții și probleme aplicative / Maria Zaharia. – Pitești: Paralela 45, 2019
ISBN 978-973-47-3018-6

51

Maria Zaharia

Caiet de vacanţă

Matematică

Clasa a VI-a

Suport teoretic, exerciţii şi probleme aplicative

Editura Paralela 45

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1 Mulțimi

1. a) Mulțimea este .... bine determinate și distincte numite ....

b) Mulțimile se notează cu .... , cu sau fără indici: A, B, C, ... , A_1, A_2, A_3, ...

c) Elementele unei mulțimi se notează cu .... : a, b, ...

d) Mulțimea care nu are nici un element se numește .... și se notează cu simbolul ....

2. a) Dacă A este o mulțime și x este un element al ei, atunci notăm .... și citim ....

b) O mulțime se numește numerică dacă ....

3. Orice mulțime poate fi dată în trei moduri:

a) **explicit**, prin .... ;

b) **implicit**, ... ;

c) **cu ajutorul unor diagrame Venn–Euler** ....

4. Mulțimea numerelor naturale mai mici decât 5 reprezentată:

a) explicit este M = ...

b) printr-o proprietate caracteristică este M = ...

c) cu ajutorul diagramei Venn–Euler ....

5. O mulțime A se numește:

a) **mulțime finită** dacă .... , de exemplu: mulțimea divizorilor numărului 6 este D_6 ....

b) **mulțime infinită** .... , de exemplu: mulțimea multiplilor unui număr natural este .... M_6 = ...

6. Numărul de elemente al unei mulțimi A se notează cu .... și card D_6 = ...

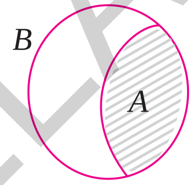
7. a) **Două mulțimi *A* și *B* sunt egale** dacă .... și notăm .... în caz contrar spunem că .... și notăm ....

b) Mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$, sunt .... și notăm ....

c) Mulțimile $M = \{1, 2, 3\}$ și $N = \{a, b, c\}$ sunt .... și notăm .... însă au același număr de elemente, adică card M = ... = ...

8. a) **O mulțime *A*** este **submulțime a mulțimii *B*** dacă ....

Se notează $A \subseteq B$ și se citește „ .... ”.



$A \subset B$

b) Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B, atunci .... și notăm ....

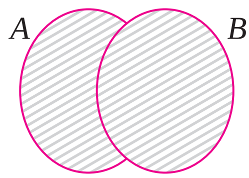
9. a) Mulțimea vidă este submulțime .... ; și notăm ....

b) Orice mulțime este inclusă în ea însăși, adică ....

c) Mulțimea vidă și mulțimea însăși sunt .... , restul submulțimilor sunt submulțimi ....

10. a) **Reuniunea a două mulțimi *A* și *B*** este .... și scriem $A \cup B$ = ...

b) Dacă $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cup B$ = ...

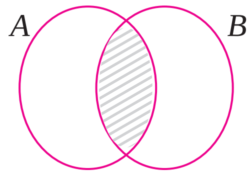


$A \cup B$

11. a) **Intersecția a două mulțimi *A* și *B*** este .... și scriem $A \cap B$ = ...

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci: $A \cap B$ = ...

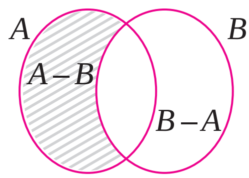
c) Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci A și B se numesc ....



$A \cap B$

12. a) **Diferența mulțimilor *A* și *B*** este .... și scriem $A - B$ = ...

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A - B$ = ... și $B - A$ = ...



$A - B \neq B - A$

13. a) Într-o mulțime fiecare element apare ....

b) Analizând diagramele de mai jos, avem reprezentată o mulțime în figura ....

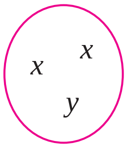


fig. 1

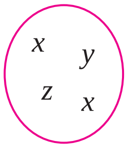


fig. 2

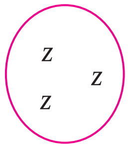


fig. 3

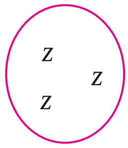


fig. 4

14. a) Submulțimile mulțimii $M = \{a, b, c\}$ sunt ....
....

b) Numărul de submulțimi al unei mulțimi A este ....

15. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x^2 \mid x \in A\}$. Scrieți elementele mulțimilor

$B =$ .... ; $A \cup B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $A \setminus B =$ ....

16. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Într-o mulțime nu contează ordinea .... , mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, a, c\}$ sunt .... pentru că sunt formate din ....

b) Mulțimea literelor din care este format cuvântul „element” este $c =$ ....

c) Mulțimea cifrelor este o mulțime .... în timp ce mulțimea numerelor naturale este o mulțime ....

17. Se dă mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^*, x \leq 3\}$.

a) Scrieți mulțimea M prin enumerarea elementelor, $M =$ ....

b) Submulțimile improprii ale mulțimii M sunt ....

c) Submulțimile proprii ale mulțimii M sunt ....

18. Determinați a, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\{1, a, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $\{1, a, 3\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$

....

19. a) Determinați perechile (x, y) știind că: $\{2, x, 4\} \subseteq \{1, 2, y, 3\}$.

b) Determinați perechile (x, y) știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 4\} \subset \{3, x, y, 4\}$; ii) $\{3, x, y, 4\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție: ....
....

20. a) Elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ este restul împărțirii oricărui număr natural la $5\}$ sunt: ....
....

CAPITOLUL V
NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

V.1 Unghiuri. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf

1. Completați spațiile punctate:

a) Două unghiuri proprii se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă ....

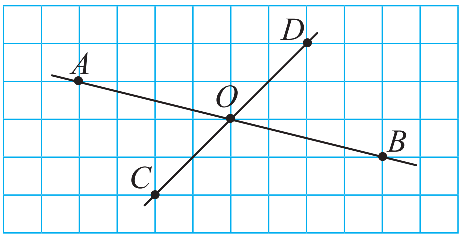
b) Unghiurile opuse la vârf sunt ...., adică au aceeași măsură.

2. Desenați două drepte *MN* și *PQ* concurente în punctul *O*.

a) Semidreptele *OM* și *ON*, respectiv *OP* și *OQ* sunt perechi de .... ;

b) Unghiurile *MOP* și *NOQ*, respectiv *MOQ* și *NOP* sunt unghiuri ....

3. În figura alăturată:



a) semidreptele *OA* și *OB* sunt semidrepte .... , înseamnă că $\sphericalangle AOB$ este .... , adică: $\sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB =$ .... sau $\sphericalangle DOB = 180 -$ .... (1)

b) semidreptele *OC* și *OD* sunt semidrepte .... , înseamnă că $\sphericalangle COD$ este .... , adică: $\sphericalangle AOD + \sphericalangle AOC =$ .... sau $\sphericalangle AOC = 180 -$ .... (2)

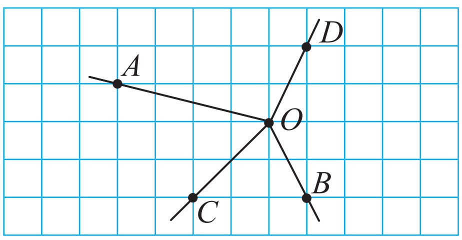
c) Din (1) și (2) se constată că unghiurile *DOB* și *AOC* sunt .... și notăm ....

4. a) Desenați două drepte *MN* și *PQ* concurente în punctul *O*, astfel încât măsura unghiului *MOP* să fie de 45°.

b) Măsurile unghiurilor *MOQ*, *NOQ* și *PON* sunt egale cu ....

c) Unghiurile opuse la vârf din figura obținută sunt .... și ....

5. Observați figura alăturată și completați: Unghiurile *AOD* și *BOC*, respectiv *AOC* și *BOD* sunt perechi de unghiuri care .... deoarece semidreptele *OA* și *OB*, respectiv *OC* și *OD* nu sunt ....

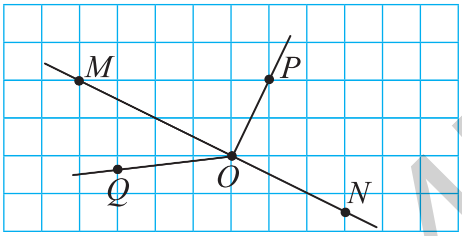


6. Analizați cu atenție figura alăturată și completați:

a) semidreptele OM și ON sunt .... ;

b) semidreptele OP și OQ .... semidrepte opuse;

c) unghiurile POM și QON, respectiv PON și QOM sunt unghiuri care .... la vârf și ale căror laturi .... o singură pereche de ....



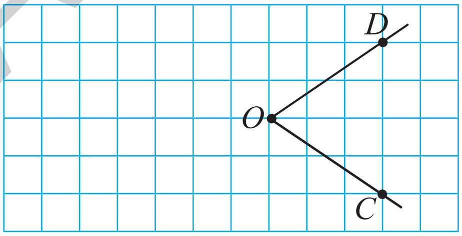
7. Calculați măsurile unghiurilor determinate de două drepte concurente, știind că unul dintre ele are măsura egală cu:

a) 60°; b) 100°; c) 80°; d) 90°.

8. Mihai dorește să măsoare unghiul COD din figura alăturată, dar așa cum este desenat, gradațiile raportorului depășesc marginea caietului. Ce ar trebui să facă Mihai?

....

....



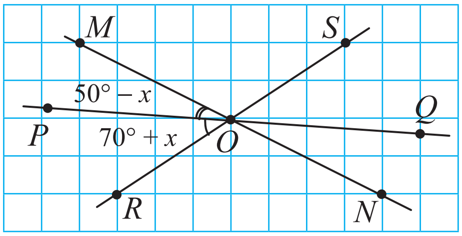
9. Analizați cu atenție figura alăturată.

a) Calculați măsura unghiului SOM;

b) Dacă măsura unghiului POR este dublul măsurii unghiului POM, calculați măsurile unghiurilor: RON, QON, QOS.

....

....



10. Se consideră două drepte a și b concurente în punctul O. Calculați măsura fiecărui unghi cu vârful în punctul O, știind că:

a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este egală cu 140°;

b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este egală cu 225°.

....

....

....

....

SOLUȚII

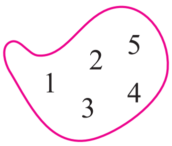
ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1. Mulțimi

1. a) o colecție de obiecte; elementele mulțimii; b) litere mari ale alfabetului; c) litere mici; d) mulțimea vidă $\varnothing$. **2.** a) $x \in A$ și citim x aparține mulțimii A; b) elementele ei sunt numere. **3.** a) enumerarea elementelor, printr-o proprietate caracteristică; c) mulțimea este ilustrată desenând o curbă închisă și scriem în interiorul ei elementele

c)



corespunzătoare. **4.** a) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$; **5.** a) are un număr finit de elemente. $\mathcal{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$; b) are un număr infinit de elemente $\mathcal{M}_6 = \{6 \times 0 = 0, 6 \times 1 = 6, 6 \times 2 = 12, ..., 6 \times n = 6n, ...\}$. **6.** card A; card $\mathcal{D}_6 = 4$.**7.** a) au aceleași elemente; $A = B$. mulțimea A este diferită de mulțimea B și notăm $A \neq B$; b) egale, $A = B$; c) diferite, $M \neq N$, card M = card $N = 3$. **8.** a) orice element al mulțimii A este element al mulțimii B A este inclus în B; b) A nu este o sub-mulțime a lui B și notăm $A \not\subseteq B$. **9.** a) a oricărei mulțimi și $\varnothing \subset A$; b) $A \subseteq A$ oricare ar fi mulțimea A; c) submulțimi improprii; restul sunt submulțimi proprii. **10.** mulțimea formată din elmentele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile date; $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$; b) $A \cup B = \{2, 3, 5, 7\}$. **11.** a) mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi, adică $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$; b) $A \cap B = \{3, 5\}$ c) mulțimi disjuncte, ele nu au elemente comune. **12.** a) mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$; b) $A \setminus B = \{2\}$ și $B \setminus A = \{7\}$. **13.** a) o singură dată; b) fig. 4. **14.** a) $\varnothing$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$ și $\{a, b, c\}$; c) $2^{\text{card } A}$, unde card A este numărul de elemente al mulțimii A. **15.** $B = \{0, 1, 4, 9,\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$; $A \setminus B = \{2, 3\}$, $A \cap B = \{0, 1\}$. **16.** a) elementelor; egale; aceleași elemente; b) $C = \{e, l, m, n, t\}$; c) finită; infinită; **17.** $M = \{1, 2, 3\}$; b) $\varnothing$ și $M = \{1, 2, 3\}$; c) $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$. **18.** $a = 4$. **19.** a) (x, y) poate fi $\{1, 4\}$ sau $\{3, 4\}$; b) (x, y) poate fi $\{2, 5\}$; $\{2, 6\}$; $\{5, 2\}$; $\{6, 2\}$. **20.** a) 0, 1, 2, 3, 4; b) apartenență și $a \in M$; c) relația de incluziune, notăm $A \subseteq B$ și spunem că A este o submulțime a lui B. **21.** a) 23, 46, 69, 92; b) $\{23, 46\}$; $\{23, 69\}$; $\{23, 92\}$; $\{46, 69\}$; $\{46, 92\}$; $\{69, 92\}$; c) $\{23, 46, 69\}$; $\{23, 46, 92\}$; $\{23, 69, 92\}$; $\{46, 69, 92\}$. **22.** a) sau; b) și; c) și; d) și. **23.** F, F; A; F; A; A. **24.** a) $A = B$; b) $A = B$. **25.** a) 24; b) 10 deoarece $48 = 2^4 \times 3$ și numărul divizorilor este $(4 + 1) \times (1 + 1) = 10$; c) 24; d) 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96. **26.** $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{0, 2\}$; $A \setminus B = \{1, 4\}$; B $\{5, 6\}$. **27.** $M = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{2, 3, 4, 5\}$. **28.** De exemplu: a) $A = \{1, 2\}$ și $B = \{2, 3\}$; b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 5\}$; c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{4\}$. **29.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{0, 1, 2, 3\}$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \setminus B = \{4, 5\}$; $B \setminus A = \{0\}$. **30.** a) $A = \{0, 2, 4, 6, 12, 20, 30\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 20, 30\}$; $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$; b) elementele mulțimii A sunt numere de forma $n \times (n + 1)$ adică produs de două numere consecutive care este tot-deauna par iar elementele mulțimii B sunt de forma $2n + 1$ adică totdeauna numere impare. **31.** a) $A = \{1, 12\}$; b) $B = \{2, 3, 4, 6\}$; c) $A \cap B = \varnothing$, A și B sunt mulțimi disjuncte.

1.2. Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea nmerelor naturale

1. a) are exact doi divizori pe 1 și pe el însuși; b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47; c) dacă mai are și alți divizori în afară de 1 și de el însuși; dacă are și divizori proprii. **2.** a) scrierea numărului ca un produs de numere prime ; b) $15600 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 13$; $5775 = 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$. **3.** a) $12 = 5 + 7$; $26 = 7 + 19$; $34 = 3 + 31$; b) 2 și 97; c) 2 și 2433. **4.** $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$ sau $a = 2$, $b = 7$, $c = 5$ sau $a = 2$, $b = 11$, $c = 3$. **5.** (a, b) pot fi: (1, 1); (1, 3); (1, 7); (3, 7); (7, 9); (3, 1); (7, 1); (7, 3); (9, 7). **6.** (a, b) poate fi: (2, 9); (9, 2); (3, 8); (4, 7); (7, 4); (5, 6); (6, 5). **7.** $\overline{abcabc} = 1001 \times \overline{abc} = 7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc}$ are 16 divizori. **8.** a) $11^2 = 121$ și $\mathcal{D}_{121} = \{1, 11, 121\}$; b) $95 = 5 \times 19$ și $D_{95} = \{1, 5, 19, 95\}$. **9.** (a, b); c.m.m.d.c.; b) numerele în factori primi, se iau

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1. Mulțimi 5

1.2. Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale 9

Capitolul II. RAPOARTE ŞI PROPORȚII

2.1. Rapoarte 15

2.2. Titlul unui aliaj 17

2.3. Concentrația unei soluții 17

2.4. Scara unui desen 18

2.5. Procent 20

2.6. Proporții 22

2.7. Mărimi direct proporționale 23

2.8. Mărimi invers proporționale 25

2.9. Regula de trei simplă 27

2.10. Elemente de organizare a datelor. Probabilități 29

Capitolul III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

3.1. Număr întreg. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi 33

3.2. Operații cu numere întregi 36

3.3. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor în contextul numerelor întregi 43

Capitolul IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

4.1. Număr rațional. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale 49

4.2. Operații cu numere raționale 54

4.3. Ecuații în mulțimea numerelor raționale. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor 63

GEOMETRIE

Capitolul V. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

5.1. Unghiuri. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf 70

5.2. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct........ 72

5.3. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare 74

5.4. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi 76

5.5. Drepte paralele. Construcție intuitivă prin translație. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă 81
5.6. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism 84
5.7. Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice. Distanța de la un punct la o dreaptă........ 89
5.8. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă........ 93
5.9. Cerc. Arc de cerc. Unghi la centru. Măsuri 97
5.10. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri........ 101

Capitolul VI. TRIUNGHIUL

6.1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului........ 104
6.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi 108
6.3. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului 111
6.4. Linii importante în triunghi
6.4.1. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Cerc înscris în triunghi........ 115
6.4.2. Mediatoarele laturilor unui triunghi. Cerc circumscris unui triunghi 118
6.4.3. Înălțimile unui triunghi. 121
6.4.4. Medianele unui triunghi. 123
6.5. Congruența triunghiurilor oarecare. Criterii de congruență a triunghiurilor: LUL,ULU,LLL 127
6.6. Congruența triunghiurilor dreptunghice. Criterii de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU 130
6.7. Metoda triunghiurilor congruente. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment 133
6.8. Proprietăți ale triunghiului isoscel. Proprietăți ale triunghiului echilateral........ 139
6.9. Proprietăți ale triunghiului echilateral. Teorema lui Pitagora 147

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1 154
TESTUL 2 155
TESTUL 3 156
TESTUL 4 158
TESTUL 5 160
TESTUL 6 161

SOLUȚII 163