Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VII-a

partea a II-a

ediția a XI-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. - Ed. a 11-a, reviz.. - Pitești : Paralela 45, 2022
2 vol.
ISBN 978-973-47-3644-7
Partea 2. - 2022. - ISBN 978-973-47-3764-2

I. Negrilă, Maria

51

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulțumim că și în acest an școlar ați ales să utilizați auxiliarele din colecția **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecție din domeniul educațional la nivel național și, pentru multe generații de elevi, astăzi părinți, reprezintă sinonimul reușitei în carieră și de ce nu, în viață. Concepută și gândită de un colectiv de specialiști în domeniul educației ca un produs unic pe piața editorială din România, **MATE 2000+** a reușit să se impună, fiind în acest moment lider pe piața auxiliarelor școlare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că și modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informații de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicația MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât și în Play Store, cu secțiuni dedicate elevilor și profesorilor, aplicația îmbogățește partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicației MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conținuturile esențiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecțiilor, atât la clasă, cât și în sistem online.

Vă dorim o experiență de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

Abrevieri:

- * **Inițiere (înțelegere)**
- ** **Consolidare (aplicare și exersare)**
- *** **Excelență (aprofundare și performanță)**
- **** **Supermate**

Legendă

PE = **portofoliul elevului**

PP = **portofoliul profesorului**

PE-PP = **portofoliul elevului - portofoliul profesorului**

Algebră

Capitolul I
Ecuații și sisteme de ecuații liniare

PP Competențe specifice

- **C1.** Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
- **C2.** Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
- **C3.** Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
- **C4.** Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
- **C5.** Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
- **C6.** Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare

PE-PP 1. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

Ecuațiile sunt propoziții matematice cu una sau mai multe variabile, în care apare o singură dată semnul egal („=”).

Exemple:

1. $2x - 7 = x + 2$; **2.** $3y + 2y - 8 = 0$; **3.** $3(z + 2) = 3z + 6$.

Observații:

- $x, y, z, \ldots$ poartă denumirea de variabile (necunoscute).
- Ceea ce este scris în stânga semnului egal se numește membrul stâng al ecuației, iar ceea ce este scris în dreapta semnului egal poartă denumirea de membrul drept al ecuației.

DEFINIȚII: Un număr real se numește **soluție** pentru o ecuație dacă, înlocuind necunoscuta cu acel număr în ecuația dată, propoziția obținută este adevărată. Mulțimea soluțiilor unei ecuații se notează cu S.

O ecuație de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**. Numerele reale a și b se numesc **coeficienți** (a este **coeficientul necunoscutei**, iar b se numește **termen liber**), iar x se numește **necunoscută** sau **variabilă**.

Se numește **soluție** a ecuației $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziția $ax_0 + b = 0$ este adevărată.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează mulțimea soluțiilor ecuației date și se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea M (sau că se rezolvă în mulțimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M = \mathbb{R}$.

Exemple:

- Numărul 9 este soluție a ecuației $2x - 7 = x + 2$ pentru că, înlocuind în ecuație pe x cu 9, se obține o propoziție adevărată: $2 \cdot 9 - 7 = 9 + 2$ (A) .
- Orice număr real este soluție pentru ecuația $3(z + 2) = 3z + 6$; din această cauză, ecuația se mai numește și **identitate**.
- Există ecuații care nu au nicio soluție reală.
  Exemple: $4(x - 3) = 4x + 10$; $2z + 5 = 2(z + 9)$ etc.
  Mulțimea soluțiilor acestor ecuații este $\varnothing$.

1.1. ECHIVALENȚA ECUAȚIILOR

Înlocuind necunoscuta x cu numărul 3 în ecuația $3x + 2 = 11$, constatăm că obținem o propoziție adevărată: $3 \cdot 3 + 2 = 11$. Deci, numărul 3 este soluție a ecuației. Putem spune că am rezolvat ecuația? Nu încă, deoarece nu suntem siguri că am aflat toate soluțiile. Să presupunem că numărul a este soluție (și el) a ecuației $3x + 2 = 11$. Atunci, înlocuind necunoscuta x cu numărul a, obținem propoziția adevărată (egalitatea) $3a + 2 = 11$. Vom scădea din ambii membri ai ei numărul 2, de unde rezultă că $3a + 2 - 2 = 11 - 2$, adică $3a = 9$. Vom împărți ambii membri cu 3 și obținem $a = 9 : 3$. Deci, $a = 3$.

Numai acum putem afirma că am rezolvat ecuația; ea are o singură soluție, și anume numărul 3. Și ecuația $x = 3$ are ca soluție doar numărul 3.

Deci, ecuațiile: $3x + 2 = 11$ și $x = 3$ au aceeași soluție, ele fiind **echivalente**.

Două ecuații sunt echivalente în cazul în care au aceleași soluții. O ecuație simplă de forma $x = a$, unde a este număr real dat, are ca soluție doar numărul a. Atunci când rezolvăm o ecuație oarecare, încercăm să găsim o alta, de forma $x = a$, care să fie echivalentă cu cea dată. Putem folosi următoarele reguli, care conduc la ecuații echivalente:

1) Se pot trece termenii dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
2) Se pot înmulți (împărți) ambii membri ai ecuației cu numere diferite de zero.

1.2. ECUAȚII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ. ECUAȚII REDUCTIBILE LA ECUAȚII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

În general, o ecuație de forma $ax + b = 0$, unde a și b sunt numere reale (iar $a \neq 0$), va fi numită *ecuație de gradul I cu o necunoscută*.

O asemenea ecuație se rezolvă în două etape:

1. Scădem din ambii membri pe b și obținem $ax = -b$.

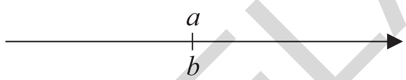
2. Împărțim ambii membri cu a și obținem $x = -\frac{b}{a}$. Această ultimă ecuație are evident ca unică soluție numărul real $-\frac{b}{a}$ și este echivalentă cu ecuația $ax + b = 0$.

Observații:

- Dacă $a = 0$ și $b = 0$, atunci propoziția cu o variabilă $ax = -b$ se scrie $0x = 0$, deci orice număr real este soluție a ecuației.
- Dacă $a = 0$, $b \neq 0$, atunci propoziția cu o variabilă $ax = -b$ devine $0x = -b$, ceea ce este imposibil, deoarece produsul niciunui număr real cu zero nu este un număr real diferit de zero. În general, ecuațiile nu se prezintă sub această formă simplă, însă le putem aduce la aceasta folosind regulile care conduc la ecuații echivalente.

1.3. RELAȚIA DE EGALITATE ÎN MULȚIMEA NUMERELOR REALE. PROPRIETĂȚI

Spunem că două numere reale a și b sunt egale dacă se reprezintă în același punct pe axa numerelor.



Exemple:

1. Dacă $a = 3$ și $b = \sqrt{9}$, atunci $a = b$, deoarece $\sqrt{9} = 3$.

2. Dacă $a = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$ și $b = 7 - 4\sqrt{3}$, atunci $a = b$, deoarece $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

Proprietățile relației de egalitate pe mulțimea numerelor reale:

1. Reflexivitatea: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetria: dacă $x = y$, atunci $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitatea: dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Egalitatea se păstrează dacă adunăm (scădem) din ambii membri ai unei egalități același termen sau dacă înmulțim (împărțim) o egalitate printr-un factor nenul. Adică au loc următoarele echivalențe, numite proprietăți de compatibilitate între relația de egalitate și operațiile cu numere reale:

$a = b \Leftrightarrow a + x = b + x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

$a = b \Leftrightarrow a - x = b - x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

$a = b \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$;

$a = b \Leftrightarrow a : x = b : x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$.

Pe scurt, putem spune că:

- dacă două egalități se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru, se obține tot o egalitate. Altfel spus, avem:

$$\text{dacă } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}, \text{ atunci } \begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \end{cases} \text{ și } \begin{cases} a \cdot c = b \cdot d \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}\ (c \neq 0;\ d \neq 0) \end{cases}.$$

Exemplu: Demonstrați că dacă $x^2 + y^2 = 2xy$, atunci $x = y$.

Adunând în ambii membri ai egalității numărul real $-2xy$, obținem egalitatea $x^2 + y^2 - 2xy = 2xy - 2xy$, care este echivalentă cu egalitatea $(x - y)^2 = 0$. Deoarece pătratul unui număr real este zero doar când numărul dat este zero, rezultă $x - y = 0$. Adunând în ambii membri ai egalității numărul y, rezultă $x = y$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Determinați valorile reale ale lui x pentru care egalitățile de mai jos sunt adevărate:

a) $2x + 3 = 7$; b) $4x - 7 = 9$; c) $2x - 1 = -9$; d) $6x - 5 = 7$;
e) $3x + 14 = 23$; f) $4x - 3 = -19$; g) $2x - 9 = -17$; h) $2x + 13 = 5$;
i) $2x + 5 = 13$; j) $3x + 7 = 16$; k) $2x - 1 = x + 3$; l) $3x - 2 = x + 6$;
m) $4x + 7 = 31$; n) $-2x + 5 = 11$; o) $5x + 6 = -14$; p) $-6x + 11 = -25$.

2. Stabiliți mulțimea soluțiilor pentru fiecare ecuație în parte:

a) $3x + 8 = 14$; b) $2x - 3 = x + 2$; c) $3x + 2 = x - 6$; d) $4x + 3 = x - 15$;
e) $3x - 8 = x + 4$; f) $3x - 11 = x - 23$; g) $4x + 5 = 2x + 13$; h) $5x - 9 = 3x + 1$;
i) $3x + 11 = -10$; j) $-7x + 19 = -16$; k) $5(x + 3) = -20$; l) $3x = x - 18$;
m) $-6x + 22 = -20$; n) $-11x - 91 = 30$; o) $4x + 15 = -5$; p) $8x = x + 49$.

3. Rezolvați ecuațiile:

a) $-9x + 17 = -10$; b) $3(x + 2) = 27$; c) $(x + 2) : 3 = -6$; d) $2(x + 1) - 3 = 5$;
e) $7 - 2(x + 3) = -11$; f) $15 + 3(x - 1) = -6$; g) $7(x - 2) - 13 = 8$; h) $6(x - 3) + 7 = -35$;
i) $4 - 3(x + 5) = -17$; j) $(3x + 1) : 5 = 5$; k) $3x - 8 = 13$; l) $-9 + 7x = 5x + 11$;
m) $6x - 13 = 2x - 1$; n) $2{,}5x - 3(1{,}5x + 2) = 4{,}8$; o) $5x - 9 + 2x = 19$;
p) $2x + \frac{1}{3} = -0{,}(6)$; r) $2x + \frac{1}{2} = -0{,}75 + \frac{1}{3}x$; s) $\frac{3(x-5)}{2} = 5x - 18$.

4. Arătați că următoarele ecuații sunt echivalente:

a) $2x + 1 = 7$ și $3x - 4 = 5$; b) $3(x - 2) = 12$ și $3(x + 5) = 33$;
c) $7(x + 1) = 6x$ și $3(x + 1) = -18$; d) $3x + 24 = -6$ și $-2(x - 1) = 22$;
e) $5(x + 4) = 25$ și $-6(2x - 5) = 18$; f) $4x - 13 = 11$ și $7(x + 3) = 63$.

5. a) Determinați valoarea numărului real m, știind că 3 este soluție a ecuației:
$$4(m + 1)x - 5mx + 7 = 2m - 6.$$
b) Determinați valoarea numărului real m, știind că -2 este soluție a ecuației:
$$3(m - 2)x - 2mx + 9 = 5m + 56.$$
c) Calculați valoarea numărului real m, pentru care 2 este soluție a ecuației:
$$7mx - 3(2m + 5)x - 11 = 4m - 17.$$
d) Aflați valoarea numărului real m, pentru care -3 este soluție a ecuației:
$$-9mx + 8(3m - 4)x + 18 - m = 36 + 6m.$$
e) Determinați valoarea numărului real m, pentru care -4 este soluție a ecuației:
$$3mx - 2(3m - 4)x + 13 + 7m = 14 + 8m.$$

6. a) Determinați valoarea reală a numărului a, știind că -3 este soluție a ecuației:
$$4x - a(x + 5) = 2ax + 16.$$
b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că 4 este soluție a ecuației: $a(7 - x) - 2x = 5ax + 26$.

c) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2x + a = 4x + 3$ are soluția -2.

d) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2ax + 5(x - 1) = 7x + 13 - 3a$ are soluția 1.

e) Determinați numărul real a pentru care ecuația $a(x + 2) + 3(x - 1) = ax - 3$ are soluția 2.

f) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2x - a(x + 3) = 7ax + 27$ are soluția -5.

Capitolul II
Elemente de organizare a datelor

PP **Competențe specifice**

- **C1.** Identificarea unor informaţii din tabele, grafice şi diagrame
- **C2.** Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării şi prezentării acestora
- **C3.** Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependenţe funcţionale şi reprezentări ale acestora
- **C4.** Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
- **C5.** Analizarea unor situaţii practice prin elemente de organizare a datelor
- **C6.** Transpunerea unei situaţii date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)

PE-PP 1. Produsul cartezian a două mulţimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanţa dintre două puncte din plan

Fie o mulțime nevidă formată din două elemente, notate a și b. Dacă stabilim o ordine de scriere a lor în mulțime, spunem că am format o **pereche ordonată**, pe care o notăm $(a; b)$.

Observaţii:

- Perechea ordonată $(a; b)$ este o mulțime distinctă de $\{a; b\}$.
- În timp ce $\{a; b\} = \{b; a\}$, în general $(a; b) \neq (b; a)$.

Exemple: $(2; 5) \neq (5; 2)$.

DEFINIŢIE: **Produsul cartezian** al mulțimilor nevide A și B este mulțimea formată din toate perechile ordonate $(a; b)$, unde $a \in A$ și $b \in B$.

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Într-o pereche ordonată, ordinea scrierii elementelor contează, adică, în general avem $(a; b) \neq (b; a)$ și $A \times B \neq B \times A$. De fapt, perechile ordonate $(a; b)$ și $(c; d)$ sunt **egale** dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.

Exemplu:

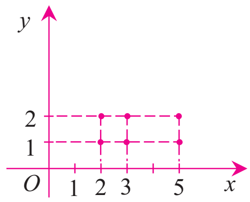
$A = \{2; 3; 5\}$ și $B = \{1; 2\}$

$A \times B = \{(2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2), (5; 1), (5; 2)\}$

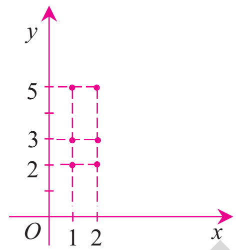
$B \times A = \{(1; 2), (1; 3), (1; 5), (2; 2), (2; 3), (2; 5)\}$

Se observă că $A \times B \neq B \times A$.

Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $A \times B$ din exemplul anterior este:



Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $B \times A$ din exemplul anterior este:



Se observă și din cele două reprezentări că $A \times B \neq B \times A$.

Regula produsului: Dacă mulțimile A și B sunt finite (au un număr finit de elemente), iar card $A = p$ și card $B = q$, atunci card$(A \times B) = p \cdot q$.

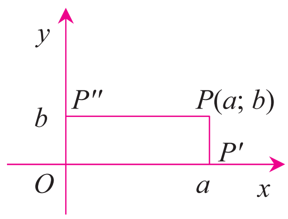
Exemplu: Dacă într-o clasă de 30 de elevi sunt 20 de băieți și 10 fete, atunci numărul perechilor distincte băiat-fată din clasă este 200.

Într-adevăr, notând cu B mulțimea băieților și cu F mulțimea fetelor, orice pereche (băiat; fată) este element al produsului cartezian $B \times F$, iar card$(B \times F)$ = card B · card $F = 20 \cdot 10 = 200$.

Numerele reale se reprezintă pe o dreaptă numită axa numerelor. Elementele produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pot fi reprezentate în plan într-un sistem ortogonal de axe.

Prin **sistem de axe ortogonale** înțelegem figura formată din două axe ale numerelor care sunt perpendiculare și care au un punct de intersecție, numit **origine**.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu:
- **originea** O;
- **unitatea de măsură** AB;
- axa Ox se numește **axa absciselor**;
- axa Oy se numește **axa ordonatelor**.



Un astfel de sistem se mai numește și **sistem cartezian**.

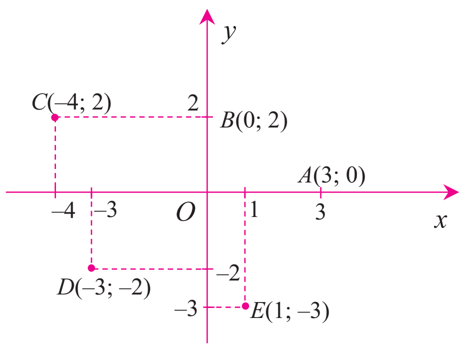
Planul în care se reprezintă un sistem cartezian este împărțit de acesta în patru **cadrane**.

Asociem fiecărei perechi $(a; b)$ de numere reale un punct în plan obținut astfel: pe axa Ox reprezentăm punctul P' de coordonată a, iar pe axa Oy punctul P'' de coordonată b. Prin punctul P' ducem o paralelă la axa ordonatelor, iar prin punctul P'' ducem o paralelă la axa absciselor. Intersecția celor două paralele este punctul P căutat, pe care îl notăm $P(a; b)$ și citim „punctul P de abscisă a și ordonată b".

Punctele de forma $A(0; y)$ se află pe axa Oy și se numesc puncte de abscisă 0 (zero).

Punctele de forma $B(x; 0)$ se află pe axa Ox și se numesc puncte de ordonată 0 (zero).

În figura alăturată sunt reprezentate în sistemul ortogonal de axe xOy punctele $A(3; 0)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 2)$, $D(-3; -2)$; $E(1; -3)$.



Două puncte $M(a; b)$ și $N(m; n)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor Oy dacă au aceeași abscisă, adică $a = m$. De exemplu, punctele $M(4; 5)$ și $N(4; –3)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa Oy, deoarece au abscisele egale.

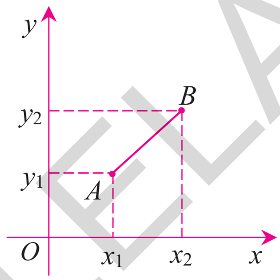
Două puncte $P(c; d)$ și $Q(p; r)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa absciselor Ox dacă au aceeași ordonată, adică $d = r$. De exemplu, punctele $P(–3; 2)$, $Q(0; 2)$ și $R(7; 2)$ sunt situate pe o dreaptă paralelă cu axa absciselor dusă la 2 unități deasupra acesteia.

Distanța dintre două puncte din plan

Fie punctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ reprezentate în sistemul ortogonal de axe xOy. **Distanța dintre două puncte $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ se calculează după formula:**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Aplicând teorema lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză este segmentul AB, iar catetele sunt paralele cu axele de coordonate, obținem formula de mai sus.



Exemple:

1. Calculați distanța între punctele $A(–2; 4)$ și $B(1; –3)$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$.

2. Știind că $A(a; 1)$ și $B(0; 5)$, determinați numerele reale a pentru care $AB = 5$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(a-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{a^2+16} \Leftrightarrow a^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow |a| = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \{–3; 3\}$.

3. Știind că $A(–a; 2)$ și $B(0; 7)$, determinați numerele reale a pentru care $AB = 13$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(-a-0)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{a^2+25} \Leftrightarrow a^2 + 25 = 169 \Leftrightarrow a^2 = 144 \Leftrightarrow |a| = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \{–12; 12\}$.

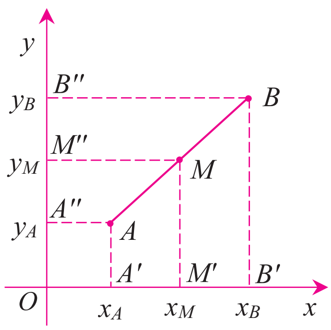
4. Știind că $M(a; 3)$ și $N(1; 2)$, determinați numărul natural a pentru care $MN = \sqrt{17}$.

Rezolvare: $MN = \sqrt{(a-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(a-1)^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+1} = \sqrt{17} \Leftrightarrow (a – 1)^2 = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |a – 1| = 4 \Leftrightarrow a – 1 = 4$ sau $a – 1 = –4 \Leftrightarrow a = 5$ sau $a = –3$. Cum $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 5$.

Mijlocul unui segment

Pentru oricare două puncte $A(x_A; y_A)$ și $B(x_B; y_B)$, coordonatele mijlocului M al segmentului AB sunt $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Fie $M \in AB$ astfel încât $AM \equiv MB$ și A', M', B' – proiecțiile punctelor A, M și, respectiv, B pe axa Ox, A'', M'', B'' – proiecțiile punctelor A, M și, respectiv, B pe axa Oy. Cum $AM \equiv MB \Rightarrow A'M' \equiv M'B'$ și $A''M'' \equiv M''B''$. Deci, $A'M' = M'B'$ și $A''M'' = M''B''$, de unde se obține: $A'M' = x_M – x_A$ și $M'B' = x_B – x_M \Rightarrow x_M – x_A = x_B – x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A \Rightarrow$
$\Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$. Analog, $A''M'' = y_M – y_A$ și $M''B'' = y_B – y_M \Rightarrow y_M – y_A = y_B – y_M \Rightarrow 2y_M = y_B + y_A \Rightarrow$
$\Rightarrow y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, unde $M(x_M; y_M)$.



Exemple:

1. Mijlocul segmentului AB, unde $A(3; 8)$ și $B(1; 2)$, este punctul $M(2; 5)$, deoarece $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ și $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

2. Determinați coordonatele simetricului punctului $A(-1; 2)$ față de punctul $M(1; 4)$.

Simetricul lui A față de M este punctul $B'(a; b)$ cu proprietatea că M este mijlocul segmentului AB'. Atunci $x_M = \frac{x_A + x_{B'}}{2}$ și $y_M = \frac{y_A + y_{B'}}{2}$, de unde se obține $x_M = \frac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a = 3$ și $y_M = \frac{2+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 6$. Deci, $B'(3; 6)$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Se dau mulțimile $A = \{-3; -1; 1\}$ și $B = \{1; 2; 3\}$.
a) Determinați produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.
b) Determinați produsele carteziene $A \times A$ și $B \times B$.
c) Reprezentați geometric cele patru produse carteziene.

2. Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid 2x + 3 \le 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid 3x + 7 \ge 1\}$, calculați $A \cap B$ și produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.

3. Reprezentați geometric produsele $A \times B$ și $B \times A$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \le 2\}$ și $B = \{-1; 0; 1\}$.

4. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele:
$A(2; 5)$, $B(3; 0)$, $C(-1; 3)$, $D(4; -4)$, $E(-3; -2)$, $F(-3; 0)$, $G(0; -1)$.

5. Fie punctele $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$ și $C(4; 1)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.
b) Fie A', B' și C' simetricele punctelor A, B și C față de axa Ox. Determinați coordonatele punctelor A', B' și C'.

6. Fie punctele $M(-3; 3)$, $N(2; 5)$, $P(4; -3)$, $Q(0; 2)$, $R(-2; 0)$.
a) Reprezentați punctele M, N, P, Q, R într-un sistem de axe ortogonale.
b) Calculați distanțele MN, PQ și PR.
c) Reprezentați punctele următoare și scrieți coordonatele lor:
i) punctul A este simetricul punctului P față de dreapta Ox;
ii) punctul B este simetricul punctului P față de dreapta Oy;
iii) punctul C este simetricul punctului P față de punctul O.

7. Fie punctele $A(0; 2)$, $B(2; 6)$ și $C(0; -3)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.
b) Calculați lungimea segmentului AB.
c) Calculați aria triunghiului ABC.

8. Fie punctele $A(0; -1)$ și $B(3; -4)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A și B.
b) Dacă A' și B' sunt simetricele punctelor A și B față de Ox, aflați aria patrulaterului astfel format.

Capitolul II
Relații metrice în triunghiul dreptunghic

PP **Competențe specifice**

- **C1.** Recunoaşterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configuraţie geometrică dată
- **C2.** Aplicarea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia
- **C3.** Deducerea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic
- **C4.** Exprimarea în limbaj matematic a relaţiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic
- **C5.** Interpretarea unor relaţii metrice între elementele unui triunghi dreptunghic
- **C6.** Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situaţii date, utilizând relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

PE-PP PROIECŢII ORTOGONALE PE O DREAPTĂ

DEFINIŢIE: Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

TEOREMĂ: Proiecția ortogonală a unui segment AB pe o dreaptă d este segmentul $A'B'$, unde A' și B' sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor A și B pe d (este un punct sau un segment, după cum AB este sau nu perpendicular pe d).

PROPRIETĂŢI:

1. Dacă $AB \parallel d$, atunci proiecția ortogonală a lui AB pe dreapta d este un segment congruent cu AB.

2. Dacă $C'D'$ este proiecția ortogonală a lui CD pe d și $CD \nparallel d$, atunci $C'D' < CD$.

3. Dacă $M'N'$ este proiecția ortogonală a lui MN pe dreapta d, atunci mijlocul lui $M'N'$ este proiecția ortogonală a mijlocului lui MN pe d.

PE-PP 1. Teorema înălţimii

Teorema înălţimii

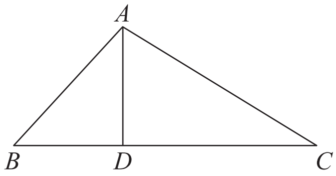
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălţimii din vârful unghiului drept este media geometrică a lungimilor proiecţiilor ortogonale ale catetelor pe ipotenuză.

Observație:

Cu notațiile din figura alăturată, se poate spune:

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii duse din vârful unghiului drept este egală cu raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.

În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, avem: $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$.

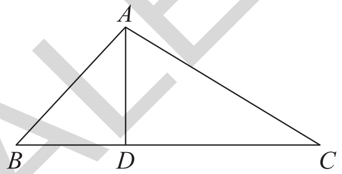


Reciproca teoremei înălțimii

Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$, astfel încât $AD \perp BC$ și $AD^2 = DC \cdot DB$. Atunci $\sphericalangle BAC = 90°$.

Demonstrație:

Din $AD^2 = DC \cdot DB$ rezultă că $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DB}{AD}$, iar cum $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle ADC$, rezultă că $\Delta ADC \sim \Delta BDA$, deci $\sphericalangle BAD \equiv \equiv \sphericalangle DCA$. Dar $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD = 90°$, atunci rezultă că $\sphericalangle DCA + \sphericalangle ABD = 90°$, adică $\sphericalangle BAC = 90°$.



● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE **Înțelegere ***

1. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\text{pr}_{BC} A = D$; b) $\text{pr}_{BC} AB = BD$; c) $\text{pr}_{BC} AC = DC$; d) $\text{pr}_{AB} BC = AB$;
e) $\text{pr}_{BC} AD = BD$; f) $\text{pr}_{AC} AB = AC$; g) $\text{pr}_{AC} BC = AC$.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, cu $D \in (BC)$, iar $BC = 75$ cm. Determinați lungimile proiecțiilor catetelor AB, respectiv AC pe ipotenuza BC, știind că proiecțiile sunt invers proporționale cu numerele 0,(6) și 0,375.

3. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E, F și, respectiv, G situate pe latura AC astfel încât să avem: $AD = DE = EF = FG = GC$. Dacă punctele M, N, P, Q și, respectiv, R sunt proiecțiile punctelor A, D, E, F și, respectiv, G pe latura BC, determinați valorile rapoartelor: $\dfrac{MN}{NP}; \dfrac{RC}{RQ}; \dfrac{MP}{CQ}; \dfrac{NP}{NC}; \dfrac{MC}{NR}; \dfrac{MQ}{NC}; \dfrac{PC}{MQ}$.

4. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este egală cu 20,8 dm, iar lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt direct proporționale cu numerele 0,1(6) și 0,375. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

5. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ se dau:

a) $AD = 24$ cm și $BD = 18$ cm. Calculați CD și BC.
b) $BD = 8$ cm și $CD = 0{,}18$ m. Calculați AD și BC.

6. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ se dau:

a) $BD = 3{,}6$ dm și $CD = 6{,}4$ dm. Calculați BC și AD.
b) $CD = 7{,}2$ dm și $AD = 9{,}6$ dm. Calculați BD și BC.

PE Aplicare și exersare **

7. În dreptunghiul $ABCD$, $DE \perp AC$, $E \in (AC)$. Știind că $AE = 12$ cm și $CE = 48$ cm, calculați lungimea segmentului DE și aria dreptunghiului $ABCD$.

8. În rombul $ABCD$, $AC \perp BD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $OM \perp BC$, $M \in (BC)$. Dacă $BM = 18$ cm și $MC = 32$ cm, calculați lungimea segmentului OM și aria rombului $ABCD$.

9. Trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, are diagonalele perpendiculare, iar $AB = 54$ cm și $CD = 24$ cm. Calculați:

a) lungimea segmentului AD; b) aria trapezului $ABCD$.

10. În trapezul isoscel $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD < BC$, $AC \perp AB$, $AB \equiv DC$, cu $AM \perp BC$, $M \in (BC)$, avem $BM = 12$ cm și $CM = 48$ cm. Calculați:

a) lungimea segmentului AM; b) aria trapezului $ABCD$.

11. În triunghiul dreptunghic MNP, $\sphericalangle M = 90°$, $MQ \perp NP$, $Q \in (NP)$, se dau:

a) $PQ = 25{,}6$ dm și $PN = 40$ dm. Calculați NQ și MQ.

b) $NQ = 9$ dm și $NP = 25$ dm. Calculați QP și MQ.

PE Aprofundare și performanță ***

12. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, se dau:

a) $\frac{BD}{CD} = \frac{4}{9}$, iar $BC = 52$ cm. Calculați AD și $\mathcal{A}_{ABC}$.

b) $\frac{CD}{BD} = 1\frac{7}{9}$, iar $AD = 24$ cm. Calculați BC și $\mathcal{A}_{ABC}$.

13. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, se știu $AD = 36$ dm și $CD = 48$ dm. Calculați:

a) lungimea proiecției BD și a ipotenuzei BC; b) aria triunghiului ABC.

14. Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 45 dm raportul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză are valoarea 4. Calculați:

a) lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;

b) lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

15. Fie triunghiul dreptunghic ABC, având ipotenuza $BC = 24$ cm. Dacă măsura unghiului dintre înălțimea și mediana duse din punctul A este de 30°, calculați lungimea înălțimii duse din A și aria triunghiului ABC.

16. Înălțimea rombului $ABCD$ are lungimea de 12 cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, iar proiecția segmentului OA pe AD are lungimea de 12 cm, calculați perimetrul și aria rombului.

PE-PP Supermate ****

17. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $\mathcal{A}_{ABD} \cdot \mathcal{A}_{ADC} = 576$ cm^4 și $BC = 12\sqrt{3}$ cm. Calculați aria triunghiului ABC.

18. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $\frac{BD}{CD} = \frac{4}{9}$, iar aria triunghiului este egală cu 351 cm^2. Aflați lungimea înălțimii duse din vârful A.

19. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, avem $\mathcal{A}_{ABD} \cdot \mathcal{A}_{ACD} = 1296$ cm^4 și $BC = 12\sqrt{2}$ cm. Calculați aria triunghiului ABC.

PE-PP

2. Teorema catetei

Teorema catetei

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media geometrică a lungimii ipotenuzei și a lungimii proiecției ei ortogonale pe ipotenuză.

Dacă în ΔABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, atunci:

$$AC^2 = CD \cdot BC \text{ și } AB^2 = BD \cdot BC.$$

Reciprocele teoremei catetei

- Fie un triunghi ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și $D \in (BC)$. Dacă $AB^2 = BD \cdot BC$, atunci $AD \perp BC$.
- Fie un triunghi ABC și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Dacă $AB^2 = BD \cdot BC$, atunci $\sphericalangle BAC = 90°$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, se dau:

a) $BC = 20$ cm și $BD = 16$ cm. Calculați CD, AB, AC și AD.

b) $AB = 18$ cm și $BC = 30$ cm. Calculați BD, CD, AC și AD.

c) $BD = 36$ cm și $AB = 60$ cm. Calculați BC, CD, AC și AD.

2. Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză sunt egale cu 12 cm și, respectiv, 48 cm. Calculați aria și perimetrul triunghiului.

3. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, mediana AM corespunzătoare ipotenuzei BC are lungimea egală cu 18 cm. Dacă $\sphericalangle MAC = 30°$, calculați:

a) valoarea raportului $\dfrac{BD}{CD}$, unde D este proiecția punctului A pe ipotenuza BC;

b) aria și perimetrul triunghiului.

4. În triunghiul isoscel ABC, $AB \equiv AC$, se consideră $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ și $DE \perp AC$, $E \in (AC)$. Dacă $BC = 60$ cm și $EC = 18$ cm, calculați:

a) perimetrul triunghiului; b) aria triunghiului.

5. În dreptunghiul $ABCD$, $BE \perp AC$, $E \in (AC)$. Dacă $EC = 6$ cm și $AE = 24$ cm, calculați perimetrul și aria dreptunghiului.

6. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, bazele CD și AB sunt direct proporționale cu 3 și, respectiv, 15. Știind că $AC \perp BC$ și $AD = 12$ cm, calculați aria și perimetrul trapezului.

PE Aplicare și exersare **

7. În triunghiul dreptunghic MNP, $\sphericalangle M = 90°$, $MQ \perp NP$, $Q \in (NP)$, se dau:

a) $PQ = 12{,}8$ cm și $NQ = 7{,}2$ cm. Calculați NP, MN, MP și MQ.

b) $NQ = 21{,}6$ cm și $MN = 36$ cm. Calculați NP, PQ, MP și MQ.

Cuprins