Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VII-a

partea a II-a

ediția a X-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Andreea Roşca
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. - Ed. a 10-a, reviz.. - Piteşti : Paralela 45, 2021
2 vol.
ISBN 978-973-47-3402-3
Partea 2. - 2021. - ISBN 978-973-47-3408-5

I. Negrilă, Maria

51

Algebră

Capitolul I
Ecuații și sisteme de ecuații liniare

PP **Competenţe specifice**

C1. Identificarea unei situaţii date rezolvabile prin ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare

C2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluţiilor unor ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare

C3. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare

C4. Redactarea rezolvării ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii liniare

C5. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuaţiilor sau a sistemelor de ecuaţii liniare

C6. Transpunerea matematică a unor situaţii date, utilizând ecuaţii şi/sau sisteme de ecuaţii liniare

PE-PP

1. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută

Ecuaţiile sunt propoziţii matematice cu una sau mai multe variabile, în care apare o singură dată semnul egal („=”).

Exemple:

1. $2x - 7 = x + 2$; 2. $3y + 2y - 8 = 0$; 3. $3(z + 2) = 3z + 6$.

Observaţii:

- $x, y, z,\ldots$ poartă denumirea de variabile (necunoscute).
- Ceea ce este scris în stânga semnului egal se numeşte membrul stâng al ecuaţiei, iar ceea ce este scris în dreapta semnului egal poartă denumirea de membrul drept al ecuaţiei.

DEFINIŢII: Un număr real se numeşte **soluţie** pentru o ecuaţie dacă, înlocuind necunoscuta cu acel număr în ecuaţia dată, propoziţia obţinută este adevărată. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii se notează cu S.

O ecuaţie de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$, se numeşte **ecuaţie de gradul I cu o necunoscută**. Numerele reale a şi b se numesc **coeficienţi** (a este **coeficientul necunoscutei**, iar b se numeşte **termen liber**), iar x se numeşte **necunoscută** sau **variabilă**.

Se numeşte **soluţie** a ecuaţiei $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$, un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziţia $ax_0 + b = 0$ este adevărată.

A rezolva o ecuaţie înseamnă a determina toate soluţiile sale. Aceste soluţii formează mulţimea soluţiilor ecuaţiei date şi se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuaţie urmează o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulţimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuaţia dată este definită pe mulţimea M (sau că se rezolvă în mulţimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M = \mathbb{R}$.

Exemple:

- Numărul 9 este soluţie a ecuaţiei $2x - 7 = x + 2$ pentru că, înlocuind în ecuaţie pe x cu 9, se obţine o propoziţie adevărată: $2 \cdot 9 - 7 = 9 + 2$ (A) .
- Orice număr real este soluţie pentru ecuaţia $3(z + 2) = 3z + 6$; din această cauză, ecuaţia se mai numeşte şi **identitate**.
- Există ecuaţii care nu au nicio soluţie reală.
  Exemple: $4(x - 3) = 4x + 10$; $2z + 5 = 2(z + 9)$ etc.
  Mulţimea soluţiilor acestor ecuaţii este $\varnothing$.

1.1. ECHIVALENŢA ECUAŢIILOR

Înlocuind necunoscuta x cu numărul 3 în ecuaţia $3x + 2 = 11$, constatăm că obţinem o propoziţie adevărată: $3 \cdot 3 + 2 = 11$. Deci, numărul 3 este soluţie a ecuaţiei. Putem spune că am rezolvat ecuaţia? Nu încă, deoarece nu suntem siguri că am aflat toate soluţiile. Să presupunem că numărul a este soluţie (şi el) a ecuaţiei $3x + 2 = 11$. Atunci, înlocuind necunoscuta x cu numărul a, obţinem propoziţia adevărată (egalitatea) $3a + 2 = 11$. Vom scădea din ambii membri ai ei numărul 2, de unde rezultă că $3a + 2 - 2 = 11 - 2$, adică $3a = 9$. Vom împărţi ambii membri cu 3 şi obţinem $a = 9 : 3$. Deci, $a = 3$.

Numai acum putem afirma că am rezolvat ecuaţia; ea are o singură soluţie, şi anume numărul 3. Şi ecuaţia $x = 3$ are ca soluţie doar numărul 3.

Deci, ecuaţiile: $3x + 2 = 11$ şi $x = 3$ au aceeaşi soluţie, ele fiind **echivalente**.

Două ecuaţii sunt echivalente în cazul în care au aceleaşi soluţii. O ecuaţie simplă de forma $x = a$, unde a este număr real dat, are ca soluţie doar numărul a. Atunci când rezolvăm o ecuaţie oarecare, încercăm să găsim o alta, de forma $x = a$, care să fie echivalentă cu cea dată. Putem folosi următoarele reguli, care conduc la ecuaţii echivalente:

1) Se pot trece termenii dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
2) Se pot înmulţi (împărţi) ambii membri ai ecuaţiei cu numere diferite de zero.

1.2. ECUAŢII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ. ECUAŢII REDUCTIBILE LA ECUAŢII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

În general, o ecuaţie de forma $ax + b = 0$, unde a şi b sunt numere reale (iar $a \neq 0$), va fi numită *ecuaţie de gradul I cu o necunoscută*.

O asemenea ecuaţie se rezolvă în două etape:

1. Scădem din ambii membri pe b şi obţinem $ax = -b$.

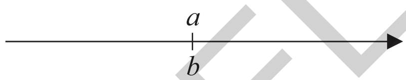
2. Împărţim ambii membri cu a şi obţinem $x = -\frac{b}{a}$. Această ultimă ecuaţie are evident ca unică soluţie numărul real $-\frac{b}{a}$ şi este echivalentă cu ecuaţia $ax + b = 0$.

Observaţii:

- Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, atunci propoziţia cu o variabilă $ax = -b$ se scrie $0x = 0$, deci orice număr real este soluţie a ecuaţiei.
- Dacă $a = 0$, $b \neq 0$, atunci propoziţia cu o variabilă $ax = -b$ devine $0x = -b$, ceea ce este imposibil, deoarece produsul niciunui număr real cu zero nu este un număr real diferit de zero. În general, ecuaţiile nu se prezintă sub această formă simplă, însă le putem aduce la aceasta folosind regulile care conduc la ecuaţii echivalente.

1.3. RELAŢIA DE EGALITATE ÎN MULŢIMEA NUMERELOR REALE. PROPRIETĂŢI

Spunem că două numere reale a şi b sunt egale dacă se reprezintă în acelaşi punct pe axa numerelor.



Exemple:

1. Dacă $a = 3$ şi $b = \sqrt{9}$, atunci $a = b$, deoarece $\sqrt{9} = 3$.

2. Dacă $a = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$ şi $b = 7 - 4\sqrt{3}$, atunci $a = b$, deoarece $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

Proprietăţile relaţiei de egalitate pe mulţimea numerelor reale:

1. Reflexivitatea: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetria: dacă $x = y$, atunci $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitatea: dacă $x = y$ şi $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Egalitatea se păstrează dacă adunăm (scădem) din ambii membri ai unei egalităţi acelaşi termen sau dacă înmulţim (împărţim) o egalitate printr-un factor nenul. Adică au loc următoarele echivalenţe, numite proprietăţi de compatibilitate între relaţia de egalitate şi operaţiile cu numere reale:

$a = b \Leftrightarrow a + x = b + x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

$a = b \Leftrightarrow a - x = b - x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

$a = b \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$;

$a = b \Leftrightarrow a : x = b : x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$.

Pe scurt, putem spune că:

- dacă se adună, se scad, se înmulţesc sau se împart membru cu membru două egalităţi, se obţine tot o egalitate. Altfel spus, avem:

$$\text{dacă } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}, \text{ atunci } \begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} a \cdot c = b \cdot d \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \ (c \neq 0;\ d \neq 0) \end{cases}.$$

Exemplu: Demonstraţi că dacă $x^2 + y^2 = 2xy$, atunci $x = y$.

Adunând în ambii membri ai egalităţii numărul real $-2xy$, obţinem egalitatea $x^2 + y^2 - 2xy = 2xy - 2xy$, care este echivalentă cu egalitatea $(x - y)^2 = 0$. Deoarece pătratul unui număr real este zero doar când numărul dat este zero, rezultă $x - y = 0$. Adunând în ambii membri ai egalităţii numărul y, rezultă $x = y$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care egalităţile de mai jos sunt adevărate:

a) $2x + 3 = 7$; b) $4x - 7 = 9$; c) $2x - 1 = -9$; d) $6x - 5 = 7$;
e) $3x + 14 = 23$; f) $4x - 3 = -19$; g) $2x - 9 = -17$; h) $2x + 13 = 5$;
i) $2x + 5 = 13$; j) $3x + 7 = 16$; k) $2x - 1 = x + 3$; l) $3x - 2 = x + 6$;
m) $4x + 7 = 31$; n) $-2x + 5 = 11$; o) $5x + 6 = -14$; p) $-6x + 11 = -25$.

2. Stabiliţi mulţimea soluţiilor pentru fiecare ecuaţie în parte:

a) $3x + 8 = 14$; b) $2x - 3 = x + 2$; c) $3x + 2 = x - 6$; d) $4x + 3 = x - 15$;
e) $3x - 8 = x + 4$; f) $3x - 11 = x - 23$; g) $4x + 5 = 2x + 13$; h) $5x - 9 = 3x + 1$;
i) $3x + 11 = -10$; j) $-7x + 19 = -16$; k) $5(x + 3) = -20$; l) $3x = x - 18$;
m) $-6x + 22 = -20$; n) $-11x - 91 = 30$; o) $4x + 15 = -5$; p) $8x = x + 49$.

3. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $-9x + 17 = -10$; b) $3(x + 2) = 27$; c) $(x + 2) : 3 = -6$; d) $2(x + 1) - 3 = 5$;
e) $7 - 2(x + 3) = -11$; f) $15 + 3(x - 1) = -6$; g) $7(x - 2) - 13 = 8$; h) $6(x - 3) + 7 = -35$;
i) $4 - 3(x + 5) = -17$; j) $(3x + 1) : 5 = 5$; k) $3x - 8 = 13$; l) $-9 + 7x = 5x + 11$;
m) $6x - 13 = 2x - 1$; n) $2{,}5x - 3(1{,}5x + 2) = 4{,}8$; o) $5x - 9 + 2x = 19$;
p) $2x + \frac{1}{3} = -0{,}(6)$; r) $2x + \frac{1}{2} = -0{,}75 + \frac{1}{3}x$; s) $\frac{3(x-5)}{2} = 5x - 18$.

4. Arătaţi că următoarele ecuaţii sunt echivalente:

a) $2x + 1 = 7$ şi $3x - 4 = 5$; b) $3(x - 2) = 12$ şi $3(x + 5) = 33$;
c) $7(x + 1) = 6x$ şi $3(x + 1) = -18$; d) $3x + 24 = -6$ şi $-2(x - 1) = 22$;
e) $5(x + 4) = 25$ şi $-6(2x - 5) = 18$; f) $4x - 13 = 11$ şi $7(x + 3) = 63$.

5. a) Determinaţi valoarea numărului real m, ştiind că 3 este soluţie a ecuaţiei:
$$4(m + 1)x - 5mx + 7 = 2m - 6.$$
b) Determinaţi valoarea numărului real m, ştiind că -2 este soluţie a ecuaţiei:
$$3(m - 2)x - 2mx + 9 = 5m + 56.$$
c) Calculaţi valoarea numărului real m, pentru care 2 este soluţie a ecuaţiei:
$$7mx - 3(2m + 5)x - 11 = 4m - 17.$$
d) Aflaţi valoarea numărului real m, pentru care -3 este soluţie a ecuaţiei:
$$-9mx + 8(3m - 4)x + 18 - m = 36 + 6m.$$
e) Determinaţi valoarea numărului real m, pentru care -4 este soluţie a ecuaţiei:
$$3mx - 2(3m - 4)x + 13 + 7m = 14 + 8m.$$

6. a) Determinaţi valoarea reală a numărului a, ştiind că -3 este soluţie a ecuaţiei:
$$4x - a(x + 5) = 2ax + 16.$$
b) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$, ştiind că 4 este soluţie a ecuaţiei: $a(7 - x) - 2x = 5ax + 26$.

c) Determinaţi numărul real a pentru care ecuaţia $2x + a = 4x + 3$ are soluţia -2.

d) Determinaţi numărul real a pentru care ecuaţia $2ax + 5(x - 1) = 7x + 13 - 3a$ are soluţia 1.

e) Determinaţi numărul real a pentru care ecuaţia $a(x + 2) + 3(x - 1) = ax - 3$ are soluţia 2.

f) Determinaţi numărul real a pentru care ecuaţia $2x - a(x + 3) = 7ax + 27$ are soluţia -5.

Capitolul II
Elemente de organizare a datelor

PP **Competenţe specifice**

- **C1.** Identificarea unor informaţii din tabele, grafice şi diagrame
- **C2.** Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării şi prezentării acestora
- **C3.** Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependenţe funcţionale şi reprezentări ale acestora
- **C4.** Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
- **C5.** Analizarea unor situaţii practice prin elemente de organizare a datelor
- **C6.** Transpunerea unei situaţii date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)

PE-PP 1. Produsul cartezian a două mulţimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanţa dintre două puncte din plan

Fie o mulţime nevidă formată din două elemente, notate a şi b. Dacă stabilim o ordine de scriere a lor în mulţime, spunem că am format o **pereche ordonată**, pe care o notăm $(a; b)$.

Observaţii:
- Perechea ordonată $(a; b)$ este o mulţime distinctă de $\{a; b\}$.
- În timp ce $\{a; b\} = \{b; a\}$, în general $(a; b) \neq (b; a)$.

Exemple: $(2; 5) \neq (5; 2)$.

DEFINIŢIE: **Produsul cartezian** al mulţimilor nevide A şi B este mulţimea formată din toate perechile ordonate $(a; b)$, unde $a \in A$ şi $b \in B$.

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$$

Într-o pereche ordonată, ordinea scrierii elementelor contează, adică, în general avem $(a; b) \neq (b; a)$ şi $A \times B \neq B \times A$. De fapt, perechile ordonate $(a; b)$ şi $(c; d)$ sunt **egale** dacă şi numai dacă $a = c$ şi $b = d$.

Exemplu:

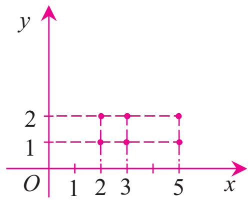
$A = \{2; 3; 5\}$ şi $B = \{1; 2\}$

$A \times B = \{(2; 1); (2; 2); (3; 1); (3; 2); (5; 1); (5; 2)\}$

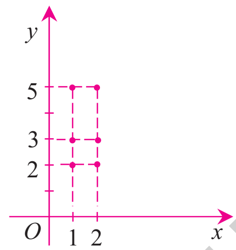
$B \times A = \{(1; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 2); (2; 3); (2; 5)\}$

Se observă că $A \times B \neq B \times A$.

Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $A \times B$ din exemplul anterior este:



Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $B \times A$ din exemplul anterior este:



Se observă şi din cele două reprezentări că $A \times B \neq B \times A$.

Regula produsului: Dacă mulţimile A şi B sunt finite (au un număr finit de elemente), iar card $A = p$ şi card $B = q$, atunci card$(A \times B) = p \cdot q$.

Exemplu: Dacă într-o clasă de 30 de elevi sunt 20 de băieţi şi 10 fete, atunci numărul perechilor distincte băiat-fată din clasă este 200.

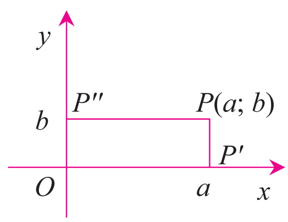
Într-adevăr, notând cu B mulţimea băieţilor şi cu F mulţimea fetelor, orice pereche (băiat; fată) este element al produsului cartezian $B \times F$, iar card$(B \times F)$ = card B · card F = $= 20 \cdot 10 = 200$.

Numerele reale se reprezintă pe o dreaptă numită axa numerelor. Elementele produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pot fi reprezentate în plan într-un sistem ortogonal de axe.

Prin **sistem de axe ortogonale** înţelegem figura formată din două axe ale numerelor care sunt perpendiculare şi care au un punct de intersecţie, numit **origine**.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu:

- **originea** O;
- **unitatea de măsură** AB;
- axa Ox se numeşte **axa absciselor**;
- axa Oy se numeşte **axa ordonatelor**.



Un astfel de sistem se mai numeşte şi **sistem cartezian**.

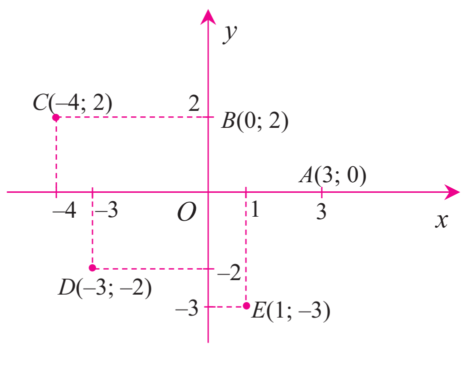
Planul în care se reprezintă un sistem cartezian este împărţit de acesta în patru **cadrane**.

Asociem fiecărei perechi $(a; b)$ de numere reale un punct în plan obţinut astfel: pe axa Ox reprezentăm punctul P' de coordonată a, iar pe axa Oy punctul P'' de coordonată b. Prin punctul P' ducem o paralelă la axa ordonatelor, iar prin punctul P'' ducem o paralelă la axa absciselor. Intersecţia celor două paralele este punctul P căutat, pe care îl notăm $P(a; b)$ şi citim „punctul P de abscisă a şi ordonată b”.

Punctele de forma $A(0; y)$ se află pe axa Oy şi se numesc puncte de abscisă 0 (zero).

Punctele de forma $B(x; 0)$ se află pe axa Ox şi se numesc puncte de ordonată 0 (zero).

În figura alăturată sunt reprezentate în sistemul ortogonal de axe xOy punctele $A(3; 0)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 2)$, $D(-3; -2)$; $E(1; -3)$.



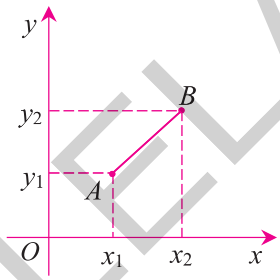
Două puncte $M(a;\ b)$ şi $N(m;\ n)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor Oy dacă au aceeaşi abscisă, adică $a = m$. De exemplu, punctele $M(4;\ 5)$ şi $N(4;\ -3)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa Oy, deoarece au abscisele egale.

Două puncte $P(c;\ d)$ şi $Q(p;\ r)$ se află pe o dreaptă paralelă cu axa absciselor Ox dacă au aceeaşi ordonată, adică $d = r$. De exemplu, punctele $P(-3;\ 2)$, $Q(0;\ 2)$ şi $R(7;\ 2)$ sunt situate pe o dreaptă paralelă cu axa absciselor dusă la 2 unităţi deasupra acesteia.

Distanţa dintre două puncte din plan

Fie punctele $A(x_1;\ y_1)$ şi $B(x_2;\ y_2)$ reprezentate în sistemul ortogonal de axe xOy. **Distanţa dintre două puncte $A(x_1;\ y_1)$ şi $B(x_2;\ y_2)$ se calculează după formula:**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$



Aplicând teorema lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză este segmentul AB, iar catetele sunt paralele cu axele de coordonate, obţinem formula de mai sus.

Exemple:

1. Calculaţi distanţa între punctele $A(-2;\ 4)$ şi $B(1;\ -3)$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$.

2. Ştiind că $A(a;\ 1)$ şi $B(0;\ 5)$, determinaţi numerele reale a pentru care $AB = 5$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(a-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{a^2+16} \Leftrightarrow a^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow |a| = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \{-3;\ 3\}$.

3. Ştiind că $A(-a;\ 2)$ şi $B(0;\ 7)$, determinaţi numerele reale a pentru care $AB = 13$.

Rezolvare: $AB = \sqrt{(-a-0)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{a^2+25} \Leftrightarrow a^2 + 25 = 169 \Leftrightarrow a^2 = 144 \Leftrightarrow |a| = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \{-12;\ 12\}$.

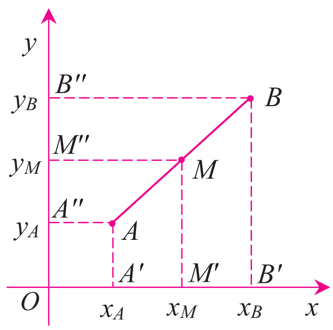
4. Ştiind că $M(a;\ 3)$ şi $N(1;\ 2)$, determinaţi numărul natural a pentru care $MN = \sqrt{17}$.

Rezolvare: $MN = \sqrt{(a-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(a-1)^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+1} = \sqrt{17} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |a-1| = 4 \Leftrightarrow a - 1 = 4$ sau $a - 1 = -4 \Leftrightarrow a = 5$ sau $a = -3$. Cum $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 5$.

Mijlocul unui segment

Pentru oricare două puncte $A(x_A;\ y_A)$ şi $B(x_B;\ y_B)$, coordonatele mijlocului M al segmentului AB sunt $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ şi $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Fie $M \in AB$ astfel încât $AM \equiv MB$ şi A', M', B' – proiecţiile punctelor A, M şi, respectiv, B pe axa Ox, A'', M'', B'' – proiecţiile punctelor A, M şi, respectiv, B pe axa Oy. Cum $AM \equiv MB \Rightarrow A'M' \equiv M'B'$ şi $A''M'' \equiv M''B''$. Deci, $A'M' = M'B'$ şi $A''M'' = M''B''$, de unde se obţine: $A'M' = x_M - x_A$ şi $M'B' = x_B - x_M \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A \Rightarrow$
$\Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$. Analog, $A''M'' = y_M - y_A$ şi $M''B'' = y_B - y_M \Rightarrow y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow 2y_M = y_B + y_A \Rightarrow$
$\Rightarrow y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, unde $M(x_M;\ y_M)$.



Exemple:

1. Mijlocul segmentului AB, unde $A(3; 8)$ şi $B(1; 2)$, este punctul $M(2; 5)$, deoarece $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ şi $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

2. Determinaţi coordonatele simetricului punctului $A(-1; 2)$ faţă de punctul $M(1; 4)$.

Simetricul lui A faţă de M este punctul $B'(a; b)$ cu proprietatea că M este mijlocul segmentului AB'. Atunci $x_M = \frac{x_A + x_{B'}}{2}$ şi $y_M = \frac{y_A + y_{B'}}{2}$, de unde se obţine $x_M = \frac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a = 3$ şi $y_M = \frac{2+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 6$. Deci, $B'(3; 6)$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Se dau mulţimile $A = \{-3; -1; 1\}$ şi $B = \{1; 2; 3\}$.
a) Determinaţi produsele carteziene $A \times B$ şi $B \times A$.
b) Determinaţi produsele carteziene $A \times A$ şi $B \times B$.
c) Reprezentaţi geometric cele patru produse carteziene.

2. Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid 2x + 3 \leq 9\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid 3x + 7 \geq 1\}$, calculaţi $A \cap B$ şi produsele carteziene $A \times B$ şi $B \times A$.

3. Reprezentaţi geometric produsele $A \times B$ şi $B \times A$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 2\}$ şi $B = \{-1; 0; 1\}$.

4. Reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonale punctele:
$A(2; 5)$; $B(3; 0)$; $C(-1; 3)$; $D(4; -4)$; $E(-3; -2)$; $F(-3; 0)$; $G(0; -1)$.

5. Fie punctele $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$ şi $C(4; 1)$.
a) Reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B şi C.
b) Fie A', B' şi C' simetricele punctelor A, B şi C faţă de axa Ox. Determinaţi coordonatele punctelor A', B' şi C'.

6. Fie punctele $M(-3; 3)$, $N(2; 5)$, $P(4; -3)$, $Q(0; 2)$, $R(-2; 0)$.
a) Reprezentaţi punctele M, N, P, Q, R într-un sistem de axe ortogonale.
b) Calculaţi distanţele MN, PQ şi PR.
c) Reprezentaţi punctele următoare şi scrieţi coordonatele lor:
i) punctul A este simetricul punctului P faţă de dreapta Ox;
ii) punctul B este simetricul punctului P faţă de dreapta Oy;
iii) punctul C este simetricul punctului P faţă de punctul O.

7. Fie punctele $A(0; 2)$, $B(2; 6)$ şi $C(0; -3)$.
a) Reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B şi C.
b) Calculaţi lungimea segmentului AB.
c) Calculaţi aria triunghiului ABC.

8. Fie punctele $A(0; -1)$ şi $B(3; -4)$.
a) Reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonale punctele A şi B.
b) Dacă A' şi B' sunt simetricele punctelor A şi B faţă de Ox, aflaţi aria patrulaterului astfel format.

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE