Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelență

clasa a VI-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

La început de drum...

Iată că a trecut un an petrecut la gimnaziu şi ne bucurăm că, citind aceste rânduri, te numeri printre prietenii matematicii. Deja ai făcut primii paşi în a înţelege matematica, în a găsi răspunsuri la multele probleme – provocări pe care aceasta ni le aduce în atenţie.

Ai participat deja la diferite concursuri de matematică şi suntem încântaţi că te afli printre cei fruntaşi; oricum, în drumul spre „a şti mai multe şi mai bine, a gândi frumos şi profund" toţi sunt câştigători.

Pentru a pătrunde în tainele matematicii ai nevoie de dorinţă, răbdare, iniţiativă şi multă muncă. Trebuie să ai curaj, să încerci şi iarăşi să încerci, să nu renunţi... deoarece uneori drumul spre *succes* are şi suişuri, dar şi coborâşuri, ocolişuri.

Pentru a obţine performanţă, rezultate, mai ai nevoie de ceva: trebuie să ştii să prezinţi în scris sau verbal ceea ce gândeşti pentru soluţionarea problemelor.

Ai văzut că temele, subiectele de la concursuri pot fi cu diferite grade de dificultate şi necesită volum de muncă diferit. În acordarea punctajului se ţine cont de aceste aspecte. Pentru a obţine punctaj bun trebuie să scrii toţi paşii parcurşi în rezolvarea problemelor în cauză, să justifici rezultatele, relaţiile, afirmaţiile şi să le ordonezi logic, natural, firesc. Asta înseamnă *să redactezi* soluţia problemei. Câştigătorii nu sunt prieteni cu expresia „ştiu, dar nu pot să spun".

Cum învăţăm să redactăm rezolvarea unei probleme? Cu multă răbdare, gândind, înţelegând în detaliu, în profunzime rezolvarea problemei şi apoi scriind aşa încât cineva care citeşte rezolvarea să înţeleagă uşor exact ceea ce ai înţeles tu după acel efort de gândire şi analiză. Trebuie să accepţi că poţi greşi, să cauţi atunci cauza, să-ţi completezi cunoştinţele sau să corectezi modul în care ai gândit. Permanent, trebuie să fii conştient de nivelul prestaţiei tale, adică să fii capabil *să autoevaluezi* punctajul pe care îl vei obţine la un test, la un concurs.

Cunoscând aceste „arme secrete", cu dorinţă şi perseverenţă, succesul este mult mai aproape.

Pentru exemplificare, prezentăm în cele ce urmează un test însoţit de rezolvarea problemelor şi modul de atribuire a punctajelor.

TEST DE EVALUARE – EXEMPLU DE NOTARE

(7p) **1.** La un concurs de matematică participă elevi din Arad, Bucureşti, Deva şi Timişoara. Se ştie că 30 de elevi nu sunt din Arad, 33 nu sunt din Bucureşti, 32 nu sunt din Deva şi 34 de elevi nu sunt din Timişoara. Aflaţi numărul participanţilor din fiecare oraş.

(7p) **2.** Se consideră numerele naturale $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ astfel încât $a_1 = 1$ şi fiecare număr, începând cu al doilea, este triplul sumei tuturor numerelor scrise înaintea sa.

(2p) **a)** Aflaţi al patrulea termen al şirului.

Capitolul I
NUMERE NATURALE

I.1. PROPRIETĂŢILE RELAŢIEI DE DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{N}$.

CRITERII DE DIVIZIBILITATE. NUMERE PRIME, NUMERE COMPUSE PĂTRAT PERFECT, CUB PERFECT, ULTIMA CIFRĂ A UNUI NUMĂR NATURAL.

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

A1: Proprietăţile relaţiei de divizibilitate, criterii de divizibilitate

Numărul natural a se divide la numărul natural b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Notăm $b|a$ (b divide a) sau $a \vdots b$ (a se divide la b).

1. Proprietăţile relaţiei de divizibilitate

1.1. $a|a$, $\forall a \in \mathbb{N}$;

1.2. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a|b$ şi $b|a$, atunci $a = b$;

1.3. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $a|b$ şi $b|c$, atunci $a|c$.

2. Se deduc, de asemenea, următoarele proprietăţi:

2.1. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi $b|a$, atunci $b|(na), \forall \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie: $b|a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot k \Rightarrow na = n \cdot bk = b \cdot (nk) \Rightarrow b|(na)$.

EXEMPLUL 1: $15763 \cdot 25 \vdots 5$ pentru că $25 \vdots 5$.

2.2. Dacă $a, b, d \in \mathbb{N}^*, d|a$ şi $d|b$, atunci $d|(a+b)$.

Demonstraţie:

$d|a$ şi $d|b \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ a.î. $a = d \cdot k_1$ şi $b = d \cdot k_2 \Rightarrow a + b = d(k_1 + k_2) \Rightarrow (a+b) \vdots d$.

EXEMPLUL 2: $(5^7 \cdot 29 + 29^3 \cdot 7) \vdots 29$ pentru că $5^7 \cdot 29 \vdots 29$ şi $29^3 \cdot 7 \vdots 29$.

2.3. Dacă $a, b, d \in \mathbb{N}^*, d|a$, $d|b$ şi $a \geq b$, atunci $d|(a-b)$.

EXEMPLUL 3: $(75398 - 2^6) \vdots 2$ *pentru că* $75398 \vdots 2$ şi $2^6 \vdots 2$.

2.4. Dacă $d, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$ şi $d|a_1, d|a_2, ..., d|a_n$, atunci

$d|a_1b_1 \pm a_2b_2 \pm ... \pm a_nb_n)$, $\forall b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{N}$ pentru care $a_1b_1 \pm a_2b_2 \pm ... \pm a_nb_n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţia se obţine din 2.1., 2.2., 2.3, dar depăşeşte cadrul lucrării.

EXEMPLUL 4: $7|(2^9 \cdot 7 + 2^8 \cdot 7^2 - 2^7 \cdot 7^3)$, pentru că $7|7; 7|7^2; 7|7^3$.

Două numere naturale pentru care singurul divizor comun este 1 se numesc numere prime între ele. Vom scrie $(a, b) = 1$.

Capitolul II
RAPOARTE ŞI PROPORŢII

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

Considerăm cunoscute cunoştinţele prevăzute de programa şcolară referitoare la rapoarte, proporţii, mărimi direct proporţionale, mărimi invers proporţionale.
Pentru rezolvarea problemelor sunt necesare următoarele rezultate.

Fiind dată proporţia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}, b \neq 0$ şi $d \neq 0$, se pot obţine următoarele proporţii derivate:

1. $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$, $a+b \neq 0$ şi $c+d \neq 0$ şi $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

2. $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$, $a-b \neq 0$ şi $c-d \neq 0$ şi $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

3. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $a-b \neq 0$ şi $c-d \neq 0$;

$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$, $a+b \neq 0$ şi $c+d \neq 0$;

4. $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$, $c+d \neq 0$ şi $c-d \neq 0$;

$\frac{c+d}{a+b}=\frac{c-d}{a-d}$, $a+b \neq 0$ şi $a-b \neq 0$.

Justificare:

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc \Leftrightarrow ad+ac=bc+ac \Leftrightarrow a(c+d)=c(a+b)$.

Pentru $c+d \neq 0$ şi $a+b \neq 0$, obţinem proporţia $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$.

Apoi, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc \Leftrightarrow ad+bd=bc+bd \Leftrightarrow d(a+b)=b(c+d)$.

Pentru $b \neq 0$ şi $d \neq 0$, obţinem $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

În mod similar, se pot obţine proporţiile de la **2.**

3. Din **1.** $\Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$, de unde obţinem $\frac{a}{c}=\frac{a+b}{c+d}$.

Din **2.** $\Rightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$, de unde $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{c-d}$. Obţinem $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$ (prevăzută la **4.**), care este echivalentă cu $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Capitolul III
MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

OPERAŢII CU NUMERE ÎNTREGI. MODULUL UNUI NUMĂR ÎNTREG. PROPRIETĂŢI ALE DIVIZIBILITĂŢII ÎN $\mathbb{Z}$

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

Proprietăţile modulului unui număr întreg

1. $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{Z}; |a| = 0$ dacă şi numai dacă $a = 0.$

2. $|a| = |-a|, \forall a \in \mathbb{Z}.$

3. $|a+b| \leq |a| + |b|, \ \forall a, b \in \mathbb{Z}.$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă *a* şi *b* au acelaşi semn.

4. $|a_1| + |a_2| = 0$ dacă şi numai dacă $|a_1| = |a_2| = 0.$

Observaţie: Proprietatea 4 se poate generaliza:

$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| = 0 \Leftrightarrow |a_1| = |a_2| = ... = |a_n| = 0.$

5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \ \forall a, b \in \mathbb{Z};$

Observaţie: Proprietatea 5 se poate generaliza:

$|a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot ... \cdot |a_n|, \forall a_1, ... a_n \in \mathbb{Z}.$

6. $|a| \geq a, \forall a \in \mathbb{Z};$

7. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 0,$ atunci $|a| \leq b$ dacă şi numai dacă $a \geq -b$ şi $a \leq b;$

8. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 0,$ atunci $|a| \geq b$ dacă şi numai dacă $a \leq -b$ sau $a \geq b.$

Proprietăţile relaţiei de divizibilitate în $\mathbb{Z}$

1. $a | a, \forall a \in \mathbb{Z};$ $a \vdots 0$ dacă şi numai dacă $a = 0.$

2. $1 | a, \forall a \in \mathbb{Z}.$

3. Dacă $a | b$ şi $b | c,$ atunci $a | c; a, b \in \mathbb{Z}^*; c \in \mathbb{Z}.$

4. Dacă $a | b$ şi $b | a, \ a, b \in \mathbb{Z},$ atunci $a = b$ sau $a = -b.$

5. Dacă $a | b$ şi $a | c \ \ a, b, c \in \mathbb{Z},$ atunci $a | b \cdot c.$

6. Dacă $a | b$ şi $a | c, \ a \in \mathbb{Z}^*, b, c \in \mathbb{Z},$ atunci $a | (b+c)$ şi $a | (b-c).$

7. Dacă $a | c, b | c$ şi $(a, b) = 1, a, b \in \mathbb{Z}^*, b, c \in \mathbb{Z},$ atunci $(a \cdot b) | c.$

8. Dacă $a \in \mathbb{Z}$ şi $a | 1$ sau $a | -1,$ atunci $a = 1$ sau $a = -1.$

Capitolul VI
TRIUNGHIUL

VI.1. PUNCTE COLINIARE, DREPTE CONCURENTE PERPENDICULARITATE ŞI PARALELISM TRIUNGHIURI CONGRUENTE

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

A1. Puncte coliniare, drepte concurente

I. Coliniaritatea a trei sau mai multe puncte ale unei configuraţii geometrice poate fi o cerinţă în sine sau poate constitui un instrument pentru demonstrarea altor cerinţe. În demonstrarea coliniarităţii a trei puncte distincte ne putem folosi de următoarele:

1. Se demonstrează că cele trei puncte determină un unghi alungit.

2. Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată (Postulatul lui Euclid).

3. Dacă două unghiuri adiacente sunt suplementare, atunci laturile necomune sunt semidrepte opuse (punctele situate pe ele sunt coliniare).

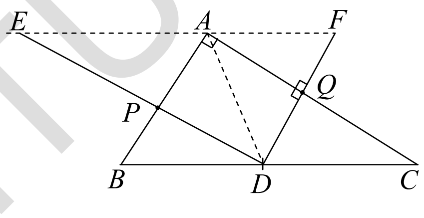
4. Dacă *A*, *O*, *B* sunt puncte coliniare, $O \in (AB)$, punctele *C* şi *D* sunt situate de o parte şi de alta a dreptei *AB* şi $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle BOD)$, atunci punctele *C*, *O*, *D* sunt coliniare (Teorema reciprocă teoremei unghiurilor opuse la vârf).

5. Punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare dacă şi numai dacă are loc una din relaţiile: $AB = AC + CB$, $AC = AB + BC$, $BC = AB + AC$.

6. Printr-un punct oarecare din plan se poate construi o singură perpendiculară pe dreapta dată.

EXEMPLUL 1: Triunghiul *ABC* este dreptunghic în *A*, punctul *D* este mijlocul segmentului (BC), iar *E* şi *F* sunt simetricele lui *D* faţă de *AB*, respectiv *AC*. Demonstraţi că punctele *E*, *A*, *F* sunt coliniare.

Soluţie:



E este simetricul lui *D* faţă de $AB \Rightarrow AB$ este mediatoarea $[ED]$. $ED \perp AB \Rightarrow ED \parallel AC \Rightarrow PD$ este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow P$ este mijlocul segmentului $[AB]$.

$\Delta BPD \equiv \Delta APE$ $(L.U.L.) \Rightarrow \sphericalangle BDP \equiv \sphericalangle AEP$.

Dar $\sphericalangle BDP$ şi $\sphericalangle AEP$ sunt unghiuri alterne interne $\Rightarrow EA \parallel BD$, adică $EA \parallel BC$.

Se demonstrează analog că $AF \parallel BC$.

CUPRINS

La început de drum... 5

Teste inițiale..8

Capitolul I. NUMERE NATURALE 11

I.1. Proprietățile relației de divizibilitate în ℕ. Criterii de divizibilitate.
Numere prime, numere compuse. Pătrat perfect, cub perfect,
ultima cifră a unui număr natural..11

I.2. Teorema fundamentală a aritmeticii.
Numărul divizorilor naturali ai unui număr natural.
Numere prime între ele. Evaluarea *p*-adică a unui număr natural..........................52

Teste de evaluare..70

Capitolul II. RAPOARTE ŞI PROPORŢII...73

Teste de evaluare..96

Capitolul III. MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI...99

Teste de evaluare..123

Capitolul IV. NUMERE RAŢIONALE 127

IV.1. Periodicitatea în scrierea numerelor raționale. Operații cu numere raționale............127

IV.2. Ecuații și inecuații în ℕ, ℤ, ℚ 161

Teste de evaluare..186

Capitolul V. PUNCT, DREAPTĂ, SEMIDREAPTĂ,
SEGMENT DE DREAPTĂ. UNGHIURI 189

Teste de evaluare..210

Capitolul VI. TRIUNGHIUL..215

VI.1. Puncte coliniare, drepte concurente. Perpendicularitate şi paralelism.
Triunghiuri congruente...215

Teste de evaluare..238

VI.2. Proprietăți ale triunghiurilor. Inegalități geometrice...241

Teste de evaluare..274

Olimpiada națională de matematică 2007-2013 277

Soluțiile testelor de evaluare 287

Bibliografie 295