Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VII-a

ediția a III-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ZANOSCHI, ADRIAN
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a : mate 2000 - standard / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa. - Ed. a 3-a. - Piteşti : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3666-9

I. Iurea, Gheorghe
II. Popa, Gabriel

51

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Seria „Mate 2000+ Standard”, adresată elevilor de clasele V-VIII, a apărut din necesitatea sistematizării şi a interpretării creative şi aplicative a noţiunilor din noua programă de studiu, în scopul armonizării practicii şcolare cu setul de competenţe impus de programă şi cu specificul subiectelor de examen. Prin ea se urmăreşte trecerea de la formarea noţiunilor şi a deprinderilor elementare de operare cu acestea, la dezvoltarea raţionamentului matematic riguros.

Autorii au modelat conceptele şi noţiunile abstracte fireşti domeniului astfel încât elevul să vadă şi să exerseze aplicaţiile practice ale matematicii, fiind pus permanent în situaţia de a adapta aparatul teoretic la necesităţile şi la provocările vieţii de zi cu zi. Învăţarea devine, prin această deschidere către realitatea concretă, plăcută şi necesară.

Fiecare volum începe cu recapitularea materiei din clasa anterioară, dublată de testele iniţiale elaborate în acord cu gradul de dificultate al Evaluării Naţionale. Capitolele sunt împărţite în lecţii care pot fi parcurse în 1-3 ore şi se încheie, fiecare, cu câte trei teste sumative ce oferă o imagine fidelă a nivelului de pregătire la care se află, etapă cu etapă, elevii. Lecţiile încep cu o expunere detaliată şi temeinică a părţii teoretice, fapt care asigură o anumită autonomie a lucrării faţă de alte auxiliare didactice. Urmează un număr de probleme reprezentative pentru tematica lecţiei, însoţite de rezolvări punctuale, care se constituie în modele de redactare a răspunsurilor. Problemele propuse sunt gândite gradual, atât ca dificultate, cât şi din punct de vedere metodic, încât profesorul să le adapteze în mod nuanţat ritmului de pregătire al elevilor. Ele respectă, totodată, pragurile de dificultate specifice subiectelor de la Evaluarea Naţională, iar cele care depăşesc acest nivel – puţine la număr - sunt semnalate prin asterisc. Toate problemele au, la finalul culegerii, răspunsuri sau soluţii. În plus, volumul pentru clasa a VIII-a are, în ultima parte, teme recapitulative din materia claselor V-VII, gândite în spiritul subiectelor de Evaluare Naţională.

Sperăm că lucrările din seria „Mate 2000+ Standard” vor aduce bucuria învăţării pentru elevii cărora se adresează, iar colegii noştri profesori vor găsi în ele instrumente utile pentru îndrumarea copiilor. Succes tuturor!

Autorii

PROBLEME RECAPITULATIVE CLASA A VI-A

ALGEBRĂ

1. Se consideră mulţimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < 3x - 2 < 28\}$ şi $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$. Determinaţi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$.

2. Determinaţi mulţimile X şi Y, ştiind că $X \cup Y = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $X \cap Y = \{5, 7, 9\}$ şi $X \setminus Y = \{1, 10\}$.

3. Fie A şi B două mulţimi, astfel încât card $(A) = 25$, card $(B) = 36$ şi card $(A \cap B) = 20$. Aflaţi card $(A \cup B)$.

4. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

a) Scrieţi toate submulţimile mulţimii A care au două elemente şi suma acestora este număr impar.

b) Câte submulţimi cu cinci elemente are A?

c) Câte submulţimi are, în total, mulţimea A?

5. Descompuneţi în factori primi numerele naturale: $a = 72$, $b = 75$, $c = 91$ şi $d = 138$. Care dintre aceste numere are mai mulţi divizori naturali?

6. Determinaţi cel mai mare număr natural n, astfel încât 5^n să dividă numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 49 \cdot 50$.

7. Fie numerele naturale $a = 168$ şi $b = 180$. Calculaţi cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b şi cel mai mic multiplu comun al lor.

8. Aflaţi câţi divizori comuni au numerele 126 şi 420.

9. Numerele 248 şi 107, împărţite la numărul natural nenul n, dau resturile 14, respectiv 17. Aflaţi numărul n.

10. Scrieţi toţi multiplii comuni ai numerelor 24 şi 36 care sunt mai mici decât 300.

11. Aflaţi care este cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloane de câte 8 elevi, de câte 12 elevi şi de câte 18 elevi.

12. Ana are mai multe mere. Dacă le grupează câte trei sau câte patru, îi rămâne, de fiecare dată, câte un măr în plus. Dacă taie fiecare măr în patru, obţine mai puţin de 100 de felii. Câte mere are Ana?

13. a) Dintr-o clasă cu 28 de elevi, fetele reprezintă 25%. Aflaţi câţi băieţi sunt în clasă.

b) Dacă într-o clasă sunt 6 băieţi şi ei reprezintă 20% din numărul total de elevi, aflaţi câţi elevi sunt în clasa respectivă.

14. Un calculator se ieftineşte cu 20% din preţul pe care îl are. După un timp calculatorul se scumpeşte cu 20% din noul preţ, ajungând să coste 2 304 lei. Aflaţi preţul iniţial al calculatorului.

15. Fie a şi b două numere raţionale pozitive.

a) Dacă $\frac{a}{b} = 0{,}75$, calculaţi $\frac{2a-b}{a+2b}$.

b) Dacă $\frac{2a-b}{a+2b} = \frac{2}{11}$, aflaţi $\frac{a}{b}$.

16. Arătaţi că, dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu 1, 5, 6, atunci triunghiul este dreptunghic.

17. Fie a, b, c trei numere raţionale pozitive direct proporţionale cu 2, 3, respectiv 4.

a) Arătaţi că $n = \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}\right)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}\right)$ este număr natural.

b) Demonstraţi că b este media aritmetică a numerelor a şi c.

18. Determinaţi numerele naturale a, b, c, ştiind că sunt invers proporţionale cu 3, 4, respectiv 6 şi $2a + 3b - 4c < 15$.

19. Se consideră numerele naturale a, b, c, astfel încât a şi b sunt direct proporţionale cu 2 şi 3, iar b şi c sunt invers proporţionale cu 0,1(6) şi 0,5.

a) Demonstraţi că c este 50% din a.

b) Determinaţi cele trei numere, ştiind că $ab + bc + ca = 176$.

20. Numerele naturale $\overline{ab}$ şi $\overline{bc}$ sunt direct proporţionale cu 5, respectiv 4.

a) Demonstraţi că $b = 5$.

b) Determinaţi cele două numere.

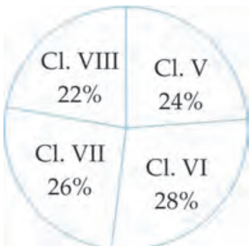
21. Elevii unei clase au obţinut la o teză următoarele note:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	2	3	4	7	5	1	3

a) Câţi elevi sunt în clasă? Câţi dintre ei au obţinut o notă cel puţin egală cu 8?

b) Care este media clasei la teză?

22. Într-o şcoală învaţă 750 de elevi. Distribuţia acestora pe ani de studiu este prezentată în diagrama alăturată.



a) Cu cât este mai mare numărul elevilor din clasa a VI-a faţă de numărul elevilor din clasa a VIII-a?

b) Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un elev din şcoală, acesta să fie în clasa a VII-a?

23. Se consideră mulţimea $A = \{\overline{abc} \mid a+b+c=3\}$. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element al mulţimii A, acesta să fie număr par.

24. Calculaţi:

a) $4 - 3 \cdot (2 - 5)$;
b) $-17 - [(5 - 14) : (-3 - 6) - 8] \cdot 2$;
c) $-3 \cdot [(-3)^2 - 5] - (-2^2)$;
d) $|2^3 - 3| - |5 - 2^3|$.

25. Produsul a cinci numere întregi consecutive este zero. Aflaţi cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile posibile ale sumei celor cinci numere.

26. Comparaţi numerele $a = 15 \cdot (-1)^{10} - 34 \cdot (-1)^{101}$ şi $b = -39 \cdot (-1)^{11} + 10 \cdot (-1)^{102}$.

27. Fie $a = 1 \cdot (-1)^1 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^3 + ... + 100 \cdot (-1)^{100} + 101 \cdot (-1)^{101}$ şi $b = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot ... \cdot (-1)^{101}$. Arătaţi că $\frac{b-a}{2}$ este număr natural, pătrat perfect.

28. Fie $a \in \mathbb{Z}$ şi $b = |a + 7| - |a - 1|$.

a) Determinaţi b, ştiind că $a = -4$.
b) Există $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $b = 0$?

29. Fie $a = |6x + 8y - 2| - |2x - 4y - 11|$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Determinaţi a, ştiind că $x = 2$ şi $y = -4$.
b) Există numere întregi x şi y pentru care $a = 0$?

30. Determinaţi valorile posibile ale numărului $a = |3^n - 8| - |-3^n - 10|$, unde $n \in \mathbb{N}$.

31. Se consideră mulţimile $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{15}{4x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{3} \in \mathbb{Z}\right\}$. Determinaţi $A \cap B$.

32. Determinaţi numerele întregi a şi b, ştiind că $\frac{2a+1}{3} = \frac{4}{b-2}$.

33. Se consideră numărul natural $a = 2^{30}$.

a) Aflaţi jumătatea lui a şi dublul lui a.
b) Arătaţi că a este şi pătrat perfect, şi cub perfect.
c) Determinaţi ultima cifră a lui a.
d) Aflaţi câte cifre are numărul a scris în baza 10.

34. Fie numerele raţionale $a = -\frac{2}{3}$ şi $b = \frac{5}{6}$.

a) Calculaţi suma dintre b şi opusul lui a.
b) Calculaţi produsul dintre inversul lui a şi opusul lui b.
c) Calculaţi câtul dintre modulul lui a şi inversul opusului lui b.

35. Fie $\frac{a}{b}$ o fracţie. Dacă micşorăm cu 4 atât numărătorul, cât şi numitorul ei, obţinem o fracţie echivalentă cu $\frac{3}{5}$, iar dacă mărim cu 6 atât numărătorul, cât şi numitorul ei, obţinem o fracţie echivalentă cu $\frac{4}{5}$. Aflaţi fracţia $\frac{a}{b}$.

36. Se consideră fracția $\frac{x}{12}$, $x \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Determinați x astfel încât fracția să fie:

a) subunitară;
b) supraunitară;
c) reductibilă;
d) ireductibilă;
e) egală cu o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule;
f) egală cu o fracție zecimală periodică simplă;
g) egală cu o fracție zecimală periodică mixtă;
h) cuprinsă între 0,7 și 0,8.

37. Calculați:

a) $\left[3\frac{3}{11}\cdot\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{12}+\frac{7}{24}\right)-\frac{7}{4}\right]\cdot\frac{70}{105}$;

b) $\left\{\frac{7}{36}-\frac{1}{46}\cdot[5,(6)-3,75]\right\}:1\frac{3}{8}$.

38. Fie $a = 3 + 2\frac{2}{11}\cdot(1,25-0,(3))$ și $b = \left(1\frac{1}{3}+0,1(6)\right)^2:(1,5)-\frac{1}{2}$. Calculați $(a-6b)^{23}$.

39. Calculați media aritmetică a numerelor $a = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-0,25\right]:\frac{2}{5}$ și $b = 1,25-\frac{1}{12}+1,8(3)$.

40. Ordonați crescător numerele: $a = 2,019$, $b = 2,0(19)$, $c = 2,01(9)$ și $d = 2,(019)$.

41. Fie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \overline{0,ab} \text{ și } 0,3 \le x < 0,9\}$.

a) Câte elemente are mulțimea A?
b) Calculați media aritmetică a elementelor mulțimii A.

42. Fie $0,a_1a_2a_3\ldots$ scrierea sub formă de fracție zecimală a numărului $\frac{1}{14}$.

a) Determinați a_3.
b) Calculați $p = a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{2019}$.
c) Calculați $s = a_1+a_2+\ldots+a_{2019}$.

TESTE INIŢIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului 6 – 12 : 3 – 4 este:
A. –6 B. –2 C. 4 D. 0

(0,5p) **2.** Preţul unui calculator este 2800 lei. După o reducere cu 20%, preţul acestuia devine:
A. 2200 lei B. 2000 lei C. 2240 lei D. 2600 lei

(0,5p) **3.** Dacă $a \in \mathbb{Z}$ şi $-9 < a + 1 < -7$, atunci a este egal cu:
A. –10 B. –9 C. –8 D. –7

(0,5p) **4.** Ioana a cumpărat de la magazin o pâine de 2,50 lei şi 2 kg de cartofi de 2,40 lei kilogramul. Pentru cumpărăturile făcute, Ioana a plătit:
A. 4,90 lei B. 7,30 lei C. 7,50 lei D. 6,50 lei

(0,5p) **5.** Lungimea laturii unui triunghi echilateral cu perimetrul de 12,6 m este egală cu:
A. 4 m B. 12,6 m C. 6,3 m D. 4,2 m

(0,5p) **6.** Complementul unui unghi de 35° are măsura egală cu:
A. 55° B. 65° C. 90° D. 145°

(0,5p) **7.** Un triunghi isoscel are măsura unghiului opus bazei de 20°. Fiecare dintre unghiurile alăturate bazei sale are măsura de:
A. 20° B. 50° C. 70° D. 80°

(0,5p) **8.** Un triunghi dreptunghic are catetele egale cu 6 cm şi 8 cm. Lungimea ipotenuzei triunghiului este egală cu:
A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 14 cm

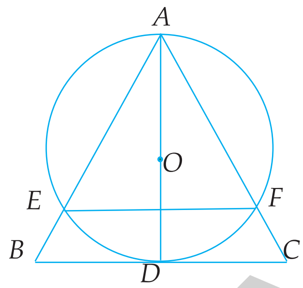
Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Rezolvaţi ecuaţia: $12 - 2(3x - 1) = -4$, $x \in \mathbb{Z}$.

(1p) **2.** Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$, astfel încât $\frac{3a+2b}{a+7b} = \frac{12}{23}$. Determinaţi valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

(1p) **3.** Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza BC şi m($\sphericalangle A$) = 30°. Dacă BD este înălţimea din B a triunghiului ABC ($D \in AC$), determinaţi măsura unghiului CBD.

4. În figura alăturată, ABC este un triunghi echilateral, D este mijlocul laturii BC, iar E şi F sunt punctele în care cercul cu diametrul AD şi centrul O intersectează laturile AB, respectiv AC.



(1p) a) Determinaţi măsura arcului mic $\overset{\frown}{AE}$ al cercului $\mathcal{C}(O)$ şi arătaţi că cercul este tangent dreptei BC.

(1p) b) Arătaţi că dreptele BC şi EF sunt paralele.

TESTUL 2

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ este:

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{11}{12}$ D. $\frac{37}{36}$

(0,5p) **2.** Dacă $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, atunci numărul $3a-2b-1$ este egal cu:

A. 0 B. 1 C. –1 D. –2

(0,5p) **3.** Soluţia ecuaţiei $x:2+1=0$ este:

A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. –2 D. $-\frac{1}{2}$

(0,5p) **4.** Iulia rezolvă tema la matematică în jumătate de oră şi tema la engleză într-un sfert de oră. În total, ea a lucrat la teme timp de:

A. 45 minute B. 60 minute C. 75 minute D. 90 minute

(0,5p) **5.** Diametrul unui cerc are lungimea de 4 cm. Raza acelui cerc are lungimea de:

A. 8 cm B. 1 cm C. 2 cm D. 16 cm

(0,5p) **6.** În jurul punctului O se formează unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ şi $\sphericalangle DOA$. Primele trei unghiuri au măsurile 30°, 150°, respectiv 72°. Măsura unghiului $\sphericalangle DOA$ este:

A. 118° B. 108° C. 98° D. 128°

(0,5p) **7.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ şi $AC = 12$ cm, atunci lungimea segmentului MP este:

A. 2 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 24 cm

(0,5p) **8.** În triunghiul dreptunghic ABC, AD este bisectoarea corespunzătoare ipotenuzei. Măsura unghiului $\sphericalangle DAC$ este:

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

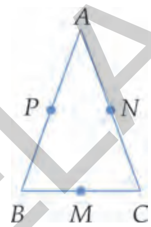
Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Numerele raţionale a, b şi c sunt direct proporţionale cu 2, 3 şi 4 şi au suma egală cu 6. Determinaţi cele trei numere.

(1p) **2.** Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x+1| \leq 3\}$. Calculaţi suma şi produsul elementelor mulţimii A.

(1p) **3.** Aflaţi restul împărţirii prin 10 a numărului $N = 1^{1000} + 5^{2000} + 6^{3000} + 9^{4000}$.

4. Triunghiul ABC din figura alăturată este isoscel, cu $AB = AC$ şi $BC = 12$ cm. Punctele M, N şi P sunt mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Se ştie că $MN = 5$ cm.



(1p) a) Calculaţi perimetrul triunghiului ABC.

(1p) b) Demonstraţi că dreptele AM şi PN sunt perpendiculare.

TESTUL 3

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului 12 : 4 – 3 – 2 este:
A. 2 B. –2 C. 10 D. –1

(0,5p) **2.** Un multiplu al numărului 7 este numărul:
A. 4 B. 20 C. 0 D. 1

(0,5p) **3.** Cel mai mare număr întreg mai mic decât numărul raţional $a = -\frac{3}{4}$ este:
A. –2 B. –1 C. 0 D. 1

(0,5p) **4.** Delia aleargă 10 km într-o oră. Pentru a parcurge 6 km, are nevoie de:
A. 30 minute B. 24 minute C. 40 minute D. 36 minute

(0,5p) **5.** Suplementul unui unghi de 35° are măsura egală cu:
A. 55° B. 65° C. 145° D. 135°

(0,5p) **6.** Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui triunghi echilateral este:
A. 120° B. 90° C. 60° D. 180°

(0,5p) **7.** Latura unui triunghi se exprimă, în centimetri, prin numere întregi. Două dintre laturi au 5 cm, respectiv 1 cm. Lungimea celei de-a treia laturi este:
A. 4 cm B. 1 cm C. 5 cm D. 6 cm

(0,5p) **8.** În triunghiul ABC avem $\measuredangle A = 90°$, $\measuredangle B = 60°$ şi $BC = 10$ cm. Lungimea segmentului AB este:
A. 5 cm B. 10 cm C. 20 cm D. 2,5 cm

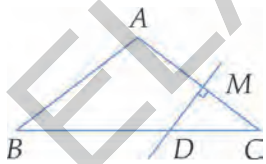
Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

(1p) **1.** Suma a două numere raţionale este 10, iar raportul lor este 3. Aflaţi cele două numere.

(1p) **2.** În cadrul unei promoţii a unui magazin, preţul produselor electronice se micşorează cu 20%. Un televizor costă, după ieftinire, 900 lei. Determinaţi preţul iniţial al televizorului.

(1p) **3.** Fie A mulţimea divizorilor naturali ai numărului 24, iar P produsul tuturor elementelor lui A. Stabiliţi care este descompunerea în factori primi a numărului P.

4. În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$ şi $\sphericalangle B = 36°$, M este mijlocul laturii AC, iar dreapta DM ($D \in BC$) este mediatoarea laturii AC.



(1p) a) Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.

(1p) b) Arătaţi că segmentele AB şi BD au lungimi egale.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT. CALCULUL RĂDĂCINII PĂTRATE A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT

Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2, cu $n \in \mathbb{N}$, se numeşte **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

DEFINIȚIE: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x, adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{\ }$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observaţii:

1. $3 \underset{\text{rădăcină pătrată}}{\overset{\text{pătrat}}{\rightleftarrows}} 9$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulţimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind –3 şi 3. Prin definiţie, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

M2. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

I. $\sqrt{1\,|\,82\,|\,25}$

Despărţim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

II.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \hline \underline{1} & \\ = & \end{array}$$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl aşezăm sub 1 (stânga) şi efectuăm scăderea.

III.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \hline \underline{1} & 2 \\ =\ 8.2 & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) şi despărţim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

IV.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 13 \\ \hline \underline{1} & \underline{\cancel{24 \cdot 4 = 96}} \\ =\ 8.2 & 23 \cdot 3 = 69 \\ \quad \underline{6\,9} & \\ \quad 1\,3 & \end{array}$$

Împărţim pe 8 la 2, obţinem câtul 4. Aşezăm pe 4 la dreapta lui 2 şi înmulţim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operaţia anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) şi facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

V.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 135 \\ \hline \underline{1} & \underline{\cancel{24 \cdot 4 = 96}} \\ =\ 8.2 & \underline{23 \cdot 3 = 69} \\ \quad \underline{6\,9} & 265 \cdot 5 = 1325 \\ \quad 1\,3\,2.5 & \\ \quad \underline{1\,3\,2\,5} & \\ \quad =\,=\,=\,= & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă şi despărţim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Trecem pe 5 în dreapta lui 26 şi înmulţim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferenţa din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

Probleme rezolvate

1. Calculaţi: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ şi $\sqrt{10\cdot 2^3\cdot 5^5}$.

Soluţie: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obţinem:

$\sqrt{324} = \sqrt{2^2\cdot 3^4} = \sqrt{(2\cdot 3^2)^2} = 2\cdot 3^2 = 18$,

$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6\cdot 3^4} = \sqrt{(2^3\cdot 3^2)^2} = 2^3\cdot 3^2 = 72$,

$\sqrt{10\cdot 2^3\cdot 5^5} = \sqrt{2^4\cdot 5^6} = \sqrt{(2^2\cdot 5^3)^2} = 2^2\cdot 5^3 = 500$.

2. Determinaţi numărul natural n, ştiind că $n = \sqrt{16\cdot 3^{10} + 3^{12}}$.

Soluţie: Cum $16\cdot 3^{10} + 3^{12} = 3^{10}\cdot(16 + 9) = 3^{10}\cdot 5^2 = (3^5\cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5\cdot 5 = 1215$.

3. Determinaţi numărul natural x, ştiind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluţie: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x + 1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinaţi cifrele a, b, x, y, pentru care $\sqrt{\overline{4ab}} = \overline{xy}$.

Soluţie: Evident, dacă extragem radicalul din $\overline{4ab}$, obţinem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ şi $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ şi $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ şi $y = 2$.

Probleme propuse

1. Determinaţi pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 şi 160.

2. Ridicaţi la pătrat următoarele numere şi scrieţi de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5, $2^3\cdot 3$, $2^4\cdot 3^2\cdot 5$, $3^{11}\cdot 5^7$, $2^n\cdot 7^{2n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$.

3. Scrieţi toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 şi 500.

4. Arătaţi că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) 25, 36, 81, 100, 900;
b) 5^4, 2^6, 12^{10}, 6^{2n}, 13^{4n+6} $(n\in\mathbb{N})$.

5. Arătaţi că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $3^2 + 4^2$;
b) $3^2 + 4^2 + 12^2$;
c) $3^7 + 3^6$;
d) $2^{11} - 2^{10}$;
e) $2\cdot 3^3\cdot 6^5$;
f) $3^3\cdot 12^5$.

6. Efectuaţi următoarele calcule şi scrieţi rezultatul sub formă de pătrat perfect:

a) $3\cdot(3\cdot 29 + 91 : 7 - 52)$;
b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 49$;
c) $2^{51} + 7\cdot 2^{50}$;
d) $9^{30} : 3^{11} + 10\cdot 3^{48} - 3^{50}$.

7. Determinaţi câte elemente are mulţimea $A = \{x\in\mathbb{N} \mid x \text{ este pătrat perfect şi } x \le 1000\}$.

8. a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?

b) Arătaţi că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n + 2$ şi $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte.

9. Arătaţi că numărul $a = 3^{45} + 2^{62}$ nu este pătrat perfect.

10. Calculaţi (utilizând descompunerea în factori primi):

a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{2500}$;

b) $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^2\cdot 5^6}$; $\sqrt{6^4\cdot 3^8}$; $\sqrt{2^2\cdot 3^6\cdot 5^4}$;

c) $\sqrt{2^{2n}}$; $\sqrt{3^{4m}}$; $\sqrt{2^{2n}\cdot 5^{6m}}$; $\sqrt{7^{4n+2}}$; $\sqrt{2^{6m-4}}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$;

d) $\sqrt{12\cdot 3^{11}}$; $\sqrt{18\cdot 2^{13}}$; $\sqrt{6^3\cdot 2^5\cdot 3^{11}}$; $\sqrt{7^{31}+2\cdot 7^{30}}$; $\sqrt{3^{22}-2\cdot 3^{21}+3^{20}}$.

11. Calculaţi (folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate):

a) $\sqrt{225}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{576}$;

b) $\sqrt{1764}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{7056}$;

c) $\sqrt{10404}$; $\sqrt{50625}$; $\sqrt{64516}$.

12. Calculaţi:

a) $\sqrt{36}+\sqrt{64}-\sqrt{81}$;

b) $\sqrt{100}-\left(\sqrt{169}-\sqrt{25}\right)$;

c) $\sqrt{9}+\sqrt{196}:\sqrt{49}$;

d) $\left(\sqrt{256}-\sqrt{144}\right):\sqrt{4}$;

e) $\left(\sqrt{0}+\sqrt{1}\right)^7+\sqrt{361}$;

f) $\left(2+\sqrt{324}\right)\cdot\sqrt{16}$;

g) $\left(\sqrt{289}+\sqrt{169}\right):\sqrt{225}$;

h) $2\cdot\sqrt{121}-\sqrt{441}$.

13. Calculaţi:

a) $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$;

b) $\sqrt{20-32:(7-5)}$;

c) $\sqrt{104:2+4\cdot 3}$;

d) $\sqrt{(14-6)\cdot(7+11)}$;

e) $\sqrt{2^8+2^{11}}$;

f) $\sqrt{15^2+20^2}$;

g) $\sqrt{3^2+4^2+12^2}$;

h) $\sqrt{3\left(7^{12}-7^{10}\right)}$.

14. Determinaţi $x\in\mathbb{N}$, ştiind că:

a) $\sqrt{x}=15$; b) $\sqrt{x-2}=16$; c) $7+\sqrt{x}=12$; d) $\sqrt{x+3}-4=6$.

15. Calculaţi $\sqrt{\overline{abc}}$, ştiind că $\sqrt{\overline{1ba}}=\overline{c3}$.

16. Determinaţi numărul natural $\overline{abcd}$, ştiind că $\sqrt{\overline{abc5}}=\overline{3d}$.

17. Aflaţi lungimea laturii unui ring de box în formă de pătrat cu aria de 36 m².

18. Aflaţi perimetrul unui pătrat echivalent cu un dreptunghi cu lungimea L = 175 cm şi lăţimea l = 28 cm (două figuri plane se numesc echivalente dacă au ariile egale).

19. Podeaua unei camere are forma unui dreptunghi cu dimensiunile L = 12 m şi l = 8 m. Pentru pavarea ei se folosesc 384 plăci pătrate de gresie cu latura de x cm. Aflaţi valoarea lui x.

Cuprins

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

CAPITOLUL V. CERCUL

CAPITOLUL VI. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR