Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Andreea Roşca
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, DAN
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VI-a / Dan Zaharia, Maria Zaharia. – Ed. a 12-a. – Pitești : Paralela 45, 2023
2 vol.
ISBN 978-973-47-3883-0
Partea 2. – 2023. – ISBN 978-973-47-3917-2

I. Zaharia, Maria

51

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică
algebră
geometrie

clasa a VI-a

partea a II-a

ediția a XII-a

mate 2000 – consolidare

Algebră

Capitolul I
Mulțimea numerelor întregi

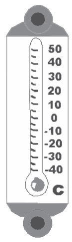
PP **Competenţe specifice**

- **C1.** Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
- **C2.** Utilizarea operaţiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor
- **C3.** Aplicarea regulilor de calcul şi folosirea parantezelor în efectuarea operaţiilor cu numere întregi
- **C4.** Redactarea etapelor de rezolvare a ecuaţiilor şi a inecuaţiilor studiate în mulţimea numerelor întregi
- **C5.** Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi
- **C6.** Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situaţii date, rezolvarea ecuaţiei sau inecuaţiei obţinute şi interpretarea rezultatului

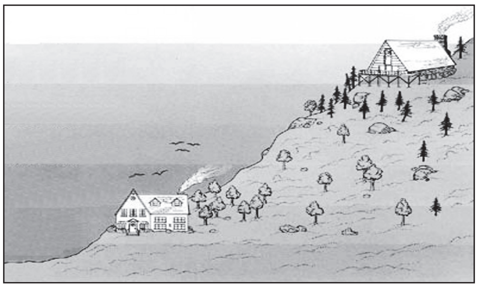
PE-PP 1.1. Număr întreg. Mulţimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi

La televizor sau la radio auziţi zilnic „buletinul meteo”.
Temperaturile pot fi **pozitive**, **zero** sau **negative**.

+3° C se citeşte „plus 3 grade Celsius”
+28° C se citeşte „plus 28 de grade Celsius”
–5° C se citeşte „minus 5 grade Celsius”
–14° C se citeşte „minus 14 grade Celsius”



Temperaturile negative, zero sau pozitive se înregistrează cu ajutorul **termometrului**.



Dacă dorim să ştim înălţimea unui munte sau reperele unei epave de pe fundul oceanului, înseamnă că dorim să ştim **altitudinea**. Altitudinea se măsoară luând ca reper **nivelul mării**, care este considerat zero (0) metri.

Vârful unui deal sau înălţimea unui munte se exprimă **printr-un număr precedat de**

semnul „+”, iar un punct de pe fundul unui ocean se exprimă **printr-un număr precedat de semnul „–”**.

În cadrul firmelor comerciale se folosesc noţiunile de **credit**, **debit** şi **sold**.

Exemple:

1. În luna septembrie, o firmă a încasat 10 000 lei pe marfa vândută (**creditul** este +10 000 lei) şi a cheltuit 5000 lei (**debitul** este –5000 lei). **Soldul** acestei luni este pozitiv, adică +5000 lei, deoarece s-a încasat mai mult cu 5000 lei decât s-a cheltuit.

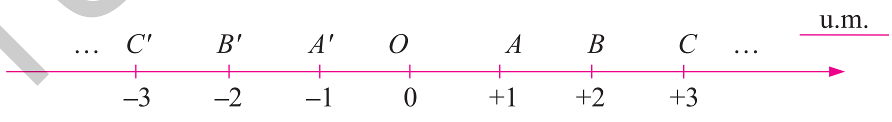
2. În luna octombrie, o firmă a încasat 300 000 lei (**creditul** este +300 000 lei) şi a cheltuit 400 000 lei (**debitul** este –400 000 lei). **Soldul** acestei luni este negativ, adică –100 000 lei, deoarece s-a încasat mai puţin cu 100 000 lei decât s-a cheltuit.

În exemplele date s-au întâlnit numere precedate de semnul „+” sau de semnul „–”. Aceste numere sunt **numere întregi**.

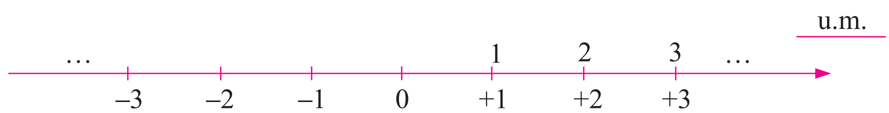
Se numeşte **număr întreg** numărul natural 0 sau orice număr natural diferit de 0 precedat fie de semnul „+” (plus), fie de semnul „–” (minus).

Observaţii:

- Mulţimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$.
- Mulţimea $\{+1, +2, +3, \dots\}$ este o submulţime a mulţimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}^*_+$ şi se numeşte **mulţimea numerelor întregi pozitive**.
- Mulţimea $\{-1, -2, -3, \dots\}$ este o submulţime a mulţimii numerelor întregi, se notează cu $\mathbb{Z}^*_-$ şi se numeşte **mulţimea numerelor întregi negative**.
- Mulţimea numerelor întregi negative împreună cu mulţimea numerelor întregi pozitive şi cu numărul natural 0 formează mulţimea numerelor întregi, adică, avem: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^*_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^*_+$ şi notăm $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- Mulţimea $\{0; +1; +2; +3; \dots\}$ se numeşte **mulţimea numerelor întregi nenegative.**
- Se numeşte **opusul unui număr întreg diferit de zero** acel număr întreg care se obţine din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0. Opusul numărului întreg +2 este numărul întreg –2, iar opusul numărului întreg –5 este numărul întreg +5.
- Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor. **Axa numerelor** este o dreaptă pe care am fixat: un punct numit **origine**, un **sens pozitiv** şi o **unitate de măsură**.



Să reprezentăm pe axa numerelor şi numerele naturale.



Se observă că orice număr natural n coincide cu numărul întreg $+n$ şi notăm $+n = n$. Astfel, se poate scrie $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$ sau $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

● **Numărul 0 nu este nici pozitiv şi nici negativ**.

● **Numerele întregi negative** sunt folosite pentru a descrie: adâncimi sub nivelul mării, temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheţ, datorii.

Exemple:

1. În ziua de 2 februarie 2009, la ora 6 dimineaţa, temperatura a fost de –9°C (minus 9 grade Celsius).

2. În Oceanul Atlantic s-a găsit, la adâncimea de 4375 m, o epavă. Adâncimea poate fi exprimată ca fiind –4375 m, raportată la nivelul mării.

3. Pasul Predeal se află la înălţimea de 1040 m. Altitudinea Pasului Predeal, raportată la nivelul mării, poate fi exprimată ca fiind +1040 m.

4. Dacă încasările unei societăţi comerciale au fost de 5 milioane lei şi plăţile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este de 2 milioane lei (+2 milioane lei).

5. Dacă încasările unei societăţi comerciale au fost de 2 milioane lei şi plăţile au fost de 3 milioane lei, atunci soldul este negativ (–1 milion lei), adică societatea are o datorie de 1 milion de lei.

Priviţi axa numerelor şi observaţi că există puncte egal depărtate de origine. Punctele A şi A', punctele B şi B' sunt egal depărtate de originea axei. Dacă două numere nenule corespund pe axă la două puncte egal depărtate de punctul O (originea axei), atunci cele două numere sunt **opuse**.

Exemple:

1. Numerele –1 şi 1 corespunzătoare punctelor A' şi A sunt opuse.

2. Numerele –3 şi 3 corespunzătoare punctelor C' şi C sunt opuse.

În general, dacă notăm cu a un număr natural nenul, atunci:

● **opusul** numărului întreg pozitiv $+a$ este numărul întreg negativ $-a$;

● **opusul** numărului întreg negativ $-a$ este numărul întreg pozitiv $+a$.

Atenţie!

● **Opusul** numărului negativ –3 se notează cu $-(-3)$ şi este egal cu numărul pozitiv +3, adică $-(-3) = +3$.

● **Opusul** numărului pozitiv +4 se notează cu $-(+4)$ şi este egal cu numărul negativ –4, adică $-(+4) = -4$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Completaţi corect propoziţiile:

a) Orice număr natural este … .

b) Opusul unui număr întreg diferit de zero este … .

c) Axa numerelor este … .

2. Reprezentaţi pe axa numerelor următoarele numere întregi:

a) –5; +1; 0; –1; +2; –4;

b) –7; +4; –3; 0; +13; –2; +5;

c) –5; –3; 4; –7; 3; +5;

d) 50; –50; 30; –20; +20; 10; –10; 0.

PE-PP

1.3. Adunarea numerelor întregi. Scăderea numerelor întregi

Pe mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se defineşte o operaţie denumită **adunarea numerelor întregi**. Această operaţie se defineşte cu ajutorul operaţiei de adunare a numerelor naturale astfel:

Se numeşte **suma a două numere întregi diferite de zero** un număr întreg care este:

- **suma modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul „+”, dacă **cele două numere întregi sunt pozitive**;
- **suma modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul „–”, dacă **cele două numere întregi sunt negative**;
- **diferenţa modulelor** celor două numere întregi precedată de semnul numărului cu modulul mai mare, dacă **cele două numere întregi au semne diferite şi module diferite**;
- **numărul întreg 0**, dacă cele două numere întregi **au semne diferite şi module egale**.

Se defineşte, de asemenea, **suma oricărui număr întreg *a* cu numărul întreg 0** şi **suma numărului 0 cu orice număr întreg *a* ca fiind numărul întreg *a*.**

Operaţia prin care se obţine suma a două numere întregi se numeşte **adunarea numerelor întregi**.

Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se defineşte şi **operaţia de scădere** astfel:

Dacă a şi b sunt numere întregi, se consideră: $a - b = a + (-b)$, $\boldsymbol{a - b}$ numindu-se **diferenţa dintre *a* şi *b***.

Deci, pentru a obţine **diferenţa dintre numărul întreg *a* şi numărul întreg *b*, se efectuează suma numărului întreg *a* cu opusul numărului întreg *b***.
În mulţimea numerelor întregi, orice diferenţă este posibilă.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Completaţi corect propoziţiile:
a) Suma a două numere întregi pozitive este un număr întreg … .
b) Suma a două numere întregi negative este un număr întreg … .
c) Suma a două numere întregi … este un număr întreg … sau un număr întreg … .
d) Dacă suma a două numere întregi este pozitivă, atunci numerele au semnul … sau sunt de semne … cu modulul mai mare al numărului întreg … .
e) Dacă suma a două numere întregi este negativă, atunci numerele au semnul … sau sunt de semne … cu modulul mai mare al numărului întreg … .

2. Calculaţi:
a) $(+5) + (+3)$; b) $(+4) + (-2)$; c) $(-6) + (-1)$; d) $(-6) + 0$;
e) $(-10) + (-30)$; f) $(-15) + (-5)$; g) $(+17) + (-10)$; h) $(+2) + (-1)$;
i) $(+7) + (-7)$; j) $(-7) + (+4)$; k) $(+15) + (-10)$; l) $(-20) + (+10)$.

3. Calculaţi:
a) $(+25) + (+10) + (+10)$; b) $(-32) + (-23) + (-15)$;

PE-PP 1.7. Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural. Reguli de calcul cu puteri

Dacă *a* este un număr întreg şi *n* este un număr natural, *n* ≥ 2, atunci **puterea *n* a lui *a*** este: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$, ***a*** se numeşte **bază**, iar ***n*** se numeşte **exponent**.

Prin definiţie, $a^1 = a$, iar dacă *a* este diferit de zero, atunci **$a^0 = 1$**.

Nu se defineşte 0^0, se mai spune că **0^0 nu are sens**.

PROPRIETĂŢI

1. Dacă baza este un număr pozitiv, puterea este un număr pozitiv oricare ar fi exponentul.

2. Dacă baza este un număr negativ şi exponentul este număr par, atunci puterea este un număr pozitiv.

3. Dacă baza este un număr negativ şi exponentul este număr impar, atunci puterea este un număr negativ.

$$(+a)^n = +a^n = a^n \quad \text{şi} \quad (-a)^n = \begin{cases} a^n, \text{ pentru } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ -a^n, \text{ pentru } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemple:

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$;
$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$; $(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = 125$; $(+11)^2 = 121$.

REGULI DE CALCUL CU PUTERI

Dacă *a* şi *b* sunt două numere întregi, *m* şi *n* sunt două numere naturale, iar operaţiile care trebuie efectuate sunt definite (au sens), atunci:

- **1.** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- **2.** $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- **3.** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
- **4.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
- **5.** $(a : b)^m = a^m : b^m$.

Exemple:

1. $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$; $17^5 \cdot 17^{11} = 17^{5+11} = 17^{16}$;
$31^9 \cdot 31 = 31^{9+1} = 31^{10}$; $(-4)^6 \cdot (-4)^3 \cdot (-4) = (-4)^{6+3+1} = (-4)^{10}$.

2. $11^5 : 11^3 = 11^{5-3} = 11^2$; $(-6)^8 : (-6)^4 = (-6)^{8-4} = (-6)^4$.

3. $(5^7)^2 = 5^{7 \cdot 2} = 5^{14}$; $[(-13)^{11}]^3 = (-13)^{11 \cdot 3} = (-13)^{33}$;
$(+9)^4 = [(+3)^2]^4 = (+3)^{2 \cdot 4} = (+3)^8$; $(-4)^3 = (-2^2)^3 = -2^{2 \cdot 3} = -2^6$.

4. $[(-3) \cdot (-2)]^5 = (-3)^5 \cdot (-2)^5$; $[(+2) \cdot (-5)]^3 = (+2)^3 \cdot (-5)^3$;
$[(-3) \cdot (+5)]^3 = (-3)^3 \cdot (+5)^3$; $[(+2) \cdot (+3)]^3 = (+2)^3 \cdot (+3)^3$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Efectuaţi:

a) 1^5; b) $(-1)^5$; c) $(-1)^6$; d) -1^6; e) $(+1)^6$;
f) $+1^6$; g) $(-1)^{100}$; h) $(-1)^{33}$; i) 1^{13}; j) $(+1)^{33}$;
k) -1^7; l) $(-1)^7$; m) $(-1)^{103}$; n) $(-1)^{88}$; o) $(+1)^{12}$.

2. Completaţi tabelul:

n	n^0	n^1	n^2	n^3	n^4	n^5
1						
–1						
+3						
–3						

3. Calculaţi:

a) $(-2)^4$ şi -2^4; b) $(-1)^3$ şi -1^3; c) $(-7)^2$ şi -7^2;
d) $(-12)^2$ şi -12^2; e) $(-6)^0$ şi -6^0; f) $(+3)^3$ şi $+3^3$.

4. Efectuaţi:

a) 0^4; b) $(-15)^1$; c) $(+3)^1$; d) 0^2; e) 0^{18}; f) $(-7)^1$;
g) $(+13)^1$; h) 0^{11}; i) $(-3)^0$; j) $(-5)^1$; k) $(+6)^0$; l) 0^{33};
m) 33^0; n) 1^{33}; o) 33^1; p) $(-33)^1$; r) $(-33)^0$; s) $(-1)^{11}$.

5. Efectuaţi:

a) 2^3; b) $(-2)^3$; c) $(-2)^1$; d) 2^0; e) $(-2)^0$;
f) $+2^1$; g) 3^2; h) $(-3)^2$; i) -3^2, şi apoi adunaţi rezultatele găsite.

6. a) Determinaţi numerele întregi a căror putere a doua este 4.
b) Determinaţi numerele întregi a căror putere a treia este –4.
c) Determinaţi numerele întregi a căror putere a treia este –8.
d) Determinaţi numerele întregi care la puterea n dau 1.
e) Determinaţi numerele întregi care la puterea n dau –1.

7. Completaţi căsuţele astfel încât egalităţile să fie adevărate:

a) $(\square)^2 = +16$; b) $(\square)^3 = -27$; c) $(\square)^3 = 125$;
d) $(\square)^1 = -7$; e) $(\square)^0 = 1$; f) $(\square)^4 = +81$.

8. Fie $a \in \mathbb{Z}^*$, m, n numere naturale. Înlocuiţi spaţiile punctate astfel încât următoarele propoziţii să fie adevărate:

a) $a^0 = \dots$; b) $a^1 = \dots$; c) $a^m \cdot a^n = \dots$; d) $a^{m+n} = \dots$;
e) $a^m : a^n = \dots$; f) $a^{m-n} = \dots$; g) $(a^m)^n = \dots$; h) $a^{m \cdot n} = \dots$.

9. Cum este corect?

a) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2}$ sau $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3 \cdot 2}$;
b) $3^6 = 3^2 \cdot 3^3$ sau $3^6 = 3^3 \cdot 3^3$;
c) $(-5)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-5) = (-5)^7$ sau $(-5)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-5) = (-5)^6$;
d) $3^2 + 3^3 = 3^5$ sau $3^2 + 3^3 = 9 + 27$.

10. Folosind regula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}^*$ şi $m, n \in \mathbb{N}$, calculaţi:

a) $(-3)^3 \cdot (-3)^2$; b) $(+7) \cdot (+7)^3$;
c) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)^4$; d) $(-4)^1 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^0$;

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Folosind regulile de calcul învăţate, scrieţi ca o singură putere:

a) $(-3)^3 \cdot (-3)^4$; b) $(-2)^{11} : (-2)^9$; c) $\left[(-5)^2\right]^3$; d) $\left[(-7)^3\right]^2$;

e) $(-12)^3 : (-2)^3$; f) $(-3)^5 \cdot (+2)^5$; g) $(-15)^3 : (+5)^3$; h) $(-21)^2 : (+7)^2$.

2. Calculaţi $(-2)^n$, pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $n < 5$.

3. Efectuaţi:

a) $[(-1 + 2^2)^3 \cdot 3^5]^4 : (-9^6) : (5^2 + 2^1)^3$;

b) $[0^5 + 1^7 + (-1)^{17} - (-3)^{27} : (-3)^{26}] \cdot 2^2 + |-4|$.

4. Calculaţi în două moduri:

a) $[-2 \cdot (-9)]^2$; b) $[-2 \cdot (-3) \cdot (+5)]^3$; c) $[(-2)^4 \cdot 2^3 : (-2)^5]^2$.

TESTUL 2

1. Efectuaţi:

a) $[|-3^2 + (-3)^3| - (-3) + (-2) \cdot (5 - 7)] : (-43)$;

b) $\{(-2) \cdot [(-2)^3 + 5] : 2 - (4 - 8)\} \cdot (-2) + |6 - (-2)^3|$.

2. Determinaţi-l pe n folosind regulile de calcul cu puteri:

a) $(-3)^3 \cdot (-3)^2 = (-3)^n$; b) $(-3)^3 : (-3)^2 = (-3)^n$; c) $(-2)^3 \cdot (-2)^n = (-2)^7$;

d) $(-5)^n \cdot (-5)^2 = (-5)^5$; e) $(-5)^n : (-5)^4 = (-5)^2$; f) $(-2)^{10} : (-2)^n = (-2)^7$;

g) $\left[(-2)^2\right]^n = (-2)^6$; h) $\left[(-3)^n\right]^2 = (-2)^8$; i) $(-12)^n : (+6)^n = (-2)^5$.

3. Pentru $x = 2$ şi $y = -3$, calculaţi:

a) $x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$; b) $(x - y)^2$; c) $x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 - y^3$; d) $(x - y)^3$.

4. Efectuaţi:

a) $8^4 : (-4)^6 + (-2) : (-2)^0$; b) $(-4)^2 \cdot 2 \cdot (-2)^4 : (-2^2)^4$.

TESTUL 3

1. Indicaţi baza şi exponentul fiecăreia dintre următoarele puteri:

a) $(-2)^3$; b) $(+5)^2$; c) $(-1)^4$; d) $(+4)^3$.

2. Stabiliţi care dintre propoziţiile următoare sunt adevărate:

a) $(-2)^3 = 2^3$ sau a′) $(-2)^3 = -2^3$; b) $(-3)^2 = 3^2$ sau b′) $(-3)^2 = -3^2$;

c) $(-1)^5 = 1^5$ sau c′) $(-1)^5 = -1^5$; d) $(-5)^4 = -5^4$ sau d′) $(-5)^4 = 5^4$.

3. Care dintre numerele: 1, –1, 2, –2, 4, –4, 8, –8, 16, –16, se pot scrie ca puteri cu baza –2?

4. Efectuaţi:

a) $\left[3^{12} \cdot (-9^5) \cdot (-27)^2\right]^2 : (9^3)^9$; b) $\left[4^2 \cdot (-2)^5 : 8\right]^2 : (-16^3)$;

c) $(-2^3)^{40} : \left[(-2)^{27} \cdot 8^{30}\right]$; d) $(-5^3)^{11} : \left[(-25)^8 \cdot 125^5\right]$.

PE-PP 1.9. Rezolvarea unor ecuații în mulțimea numerelor întregi

Fie a și b două numere întregi. Se formulează următoarea **problemă**:
Determinați numerele întregi x pentru care $ax + b = 0$.

De obicei, această problemă se formulează mai scurt astfel:
Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $ax + b = 0$, unde a și $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

Un număr întreg x_0, pentru care $ax_0 + b = 0$, se numește **soluție** a ecuației.
A rezolva ecuația înseamnă **a găsi mulțimea soluțiilor ei** care se notează cu S.
Două ecuații se numesc **ecuații echivalente** dacă **au aceeași mulțime de soluții**.

1. Rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a ecuației $ax + b = 0$ ($a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$)

- adunăm în ambii membri numărul $-b$ și se obține ecuația echivalentă:

$$ax + b - b = -b, \text{ adică } ax = -b.$$

Se spune că **am separat termenul cunoscut b de termenul necunoscut ax**, prin trecerea termenului cunoscut b în partea dreaptă a egalității cu semn schimbat.

- împărțim ambii membri ai ecuației $ax = -b$ cu $a \neq 0$;
  – dacă $(-b) : a$ este numărul întreg k, atunci ecuația are soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$ și $S = \{k\}$.
  – dacă $(-b) : a$ nu este număr întreg, atunci ecuația nu are soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$, deci $S = \varnothing$.

2. Rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a ecuației $ax + b = c$ ($a \in \mathbb{Z}^*$, $b, c \in \mathbb{Z}$)

- separăm termenul necunoscut ax de termenii cunoscuți, prin trecerea termenului cunoscut b în dreapta egalității, cu semn schimbat; se obține ecuația echivalentă $ax = c - b$;
- împărțim ambii membri ai ecuației cu $a \neq 0$ și se obține: $x = \dfrac{c-b}{a}$;
  – dacă $\dfrac{c-b}{a} = k$ și k este număr întreg, ecuația are soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$ și $S = \{k\}$;
  – dacă $\dfrac{c-b}{a}$ nu este număr întreg, atunci ecuația nu are soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$,

deci $S = \varnothing$.

PE Exerciții rezolvate

Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

1. a) $3x + 9 = 0 \mid + (-9) \Leftrightarrow 3x = -9 \mid : (3) \Leftrightarrow x = -3 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \{-3\}$;

b) $-7x + 3 = 0 \mid + (-3) \Leftrightarrow -7x = -3 \mid : (-7) \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{7} \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \varnothing$.

2. a) $-2x + 7 = 11 \mid + (-7) \Leftrightarrow -2x = 4 \mid : (-2) \Leftrightarrow x = -2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \{-2\}$;

b) $5x - 7 = 12 \mid + 7 \Leftrightarrow 5x = 19 \mid : 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{19}{5} \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow S = \varnothing$.

Observaţie: Utilizând regulile de calcul din $\mathbb{Z}$ şi separarea termenilor cunoscuţi de termenii necunoscuţi, anumite ecuaţii se aduc la forma echivalentă: $ax = b$, a cărei rezolvare în mulţimea $\mathbb{Z}$ este imediată;

- prin împărţirea cu $a \neq 0$ se obţine: $x = \frac{b}{a}$.

  – dacă $\frac{b}{a} = k$ şi k este număr întreg, atunci $S = \{k\}$;

  – dacă $\frac{b}{a}$ nu este număr întreg, atunci $S = \varnothing$.

Exemplu: Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $6 = 4(x + 1) - 2(x - 2)$.

Rezolvare:
- se desfiinţează parantezele şi se obţine ecuaţia echivalentă: $6 = 4x + 4 - 2x + 4$;
- se efectuează calculele în membrul drept, grupând convenabil termenii: $6 = (4x - 2x) + (4 + 4)$ şi se obţine: $6 = 2x + 8$;
- se separă termenul necunoscut $2x$ de termenii 6 şi 8 prin trecerea lui 8 în stânga egalităţii cu semn schimbat: $6 - 8 = 2x$, adică $-2 = 2x$ sau $2x = -2$;
- se împarte la 2 şi se obţine: $\frac{-2}{2} = x$, adică $x = -1$ şi $S = \{-1\}$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Completaţi spaţiile punctate:
a) A rezolva o ecuaţie înseamnă … .
b) Un număr întreg m este soluţie a ecuaţiei $ax + b = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, dacă … .
c) Două ecuaţii se numesc echivalente dacă … .

2. Verificaţi dacă –1 este soluţie pentru ecuaţiile:
a) $3x + 5 = 2$; b) $-2x + 3 = 5$; c) $-x + 3x + 5 = 3$.

3. Rezolvaţi ecuaţia: $2x - 1 = -3$, în mulţimea $A = \{-3, -2, -1, 2\}$.

4. Rezolvaţi ecuaţia: $-3x + 1 = -8$, în mulţimea $B = \{-1, 0, 1, 3\}$.

5. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţiile:
a) $7x - 14 = 0$; b) $4x + 12 = 0$; c) $-9x + 27 = 0$; d) $-4x - 36 = 0$;
e) $2x + 4 = -10$; f) $10 = 7x - 4$; g) $6 = 4x - 2$; h) $-7 = 4x + 1$;
i) $11 = 2x + 3$; j) $5x - 6 = 14$; k) $5x - 1 = 9$; l) $-4x + 1 = -15$;
m) $5x + 17 = 2$; n) $-6x + 4 = -8$; o) $8x + 6 = -2$; p) $5x = 4x + 1$.

6. Reprezentaţi fiecare dintre elementele următoarelor mulţimi, scriind elementele lor între acolade:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3x = 6\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7x = 0\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2x = 10\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -x - 5 = 0\}$;
$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x - 7 = 3\}$; $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3(x + 1) = 3x + 3\}$;
$G = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7x = 5x\}$; $H = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2(x + 1) = 2x - 5\}$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

17. Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$, rezolvaţi ecuaţiile:

a) $(x + 3)(y - 1) = 0$; b) $xy - 2x = -7$;

c) $\frac{1}{3x-1} = \frac{1}{2}$; d) $(x + 3)^2 + [(x + 3)(x - 2)]^2 = 0$.

18. Arătaţi că ecuaţiile următoare nu au soluţii în mulţimea numerelor întregi:

a) $3x - 7 = 10$; b) $-5x + 4 = 27$; c) $x + 3 = -7x + 4$.

19. Scrieţi câte două ecuaţii echivalente cu fiecare dintre ecuaţiile:

a) $-x + 2 = 3$; b) $3x - 7 = 2$; c) $4x - 2 = 12 - 3x$.

20. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţiile:

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $3x^2 - 27 = 0$; c) $-x^2 + 4 = 0$;
d) $2x^2 - 98 = 0$; e) $-7x^2 + 28 = 0$; f) $5x^2 - 125 = 0$.

21. Stabiliţi care dintre următoarele ecuaţii au soluţii numere întregi şi, în caz afirmativ, rezolvaţi-le:

a) $|-x + 5| = -10$; b) $|24 - 6x| - 2 = -2$;
c) $|-x + 1| + (x + y)^2 = 0$; d) $-3|2x + 4| + 5 = -7$.

22. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţiile:

a) $|x - 2| - 11 = -2|x - 2| + 4$; b) $-2|x + 3| + 4|x + 3| = 15 - 5|x + 3| - 1$;
c) $3|x + 1| + 5 = |x + 1| + 11$; d) $-4|2x - 1| + 2 = -|2x - 1| - 7$.

PE-PP Supermate ****

23. Determinaţi numerele întregi x, y care satisfac relaţia: $x^2 = 120 - 7x^3y$.

Etapa locală, Bacău

24. Determinaţi numerele întregi x şi y care satisfac relaţia: $2xy - 3x - 4y + 9 = 0$.

prof. Gheorghe Gându, Bacău

25. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $x^2y + 2x^3 = 63$.

Etapa judeţeană, Bacău

26. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $x^2 - 2x - 143 = 0$.

Etapa locală, Bacău

27. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $xy - 3x + 2y = 1$.

Etapa locală, Botoşani

28. Determinaţi perechile de numere întregi (x, y) pentru care $xy + y - 3x = -5$.

Concursul „Grigore Moisil", Cluj-Napoca

29. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţiile:

a) $x + 3xy = -11$; b) $x + xy + y = 89$.

30. Determinaţi numerele întregi pozitive x şi y pentru care $\frac{2xy}{2x+1} = y^2 - 7$.

Etapa locală, Caraş-Severin

Capitolul II
Mulțimea numerelor raționale

PP Competențe specifice

C1. Recunoaşterea fracţiilor echivalente, a fracţiilor ireductibile şi a formelor de scriere a unui număr raţional

C2. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raţionale pentru rezolvarea ecuaţiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $ax + b = c$, unde a, b şi c sunt numere raţionale

C3. Utilizarea proprietăţilor operaţiilor pentru compararea şi efectuarea calculelor cu numere raţionale

C4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operaţii în mulţimea numerelor raţionale

C5. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu cu numere raţionale

C6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operaţiilor cu numere raţionale

PE-PP 2.1. Număr raţional. Mulţimea numerelor raţionale

Definiţie. Prin **număr raţional** înțelegem orice pereche de numere întregi a și b, unde $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$.

Observaţii:

- Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$ și

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

- Numărul rațional $\frac{a}{b}$ este număr întreg dacă și numai dacă a se divide la b ($a \,\vdots\, b$).
- Orice număr întreg este număr rațional, adică $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Două numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt egale și notăm $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă și numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$.
- Orice număr rațional se poate scrie ca o fracție ordinară sau ca o fracție zecimală finită sau infinită.

Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale

Un număr rațional pozitiv reprezentat printr-o fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$, cu a, $b \in \mathbb{N}^*$, $b \geq 2$, se transformă, folosind algoritmul de împărțire a numerelor naturale, în:

- **fracție zecimală finită** dacă numitorul descompus în factori primi conține numai factorii 2 sau 5 sau 2 și 5;
- **fracție periodică simplă** dacă descompunerea numitorului în factori primi conține alți factori decât 2 sau 5;
- **fracție periodică mixtă** dacă descompunerea numitorului în factori primi conține cel puțin unul din factorii primi 2 sau 5 și cel puțin un alt factor prim diferit de 2 sau 5.

Exemple:

1. fracții zecimale finite:

a) $\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3} = 2{,}125$; b) $\frac{23}{25} = \frac{23}{5^2} = 0{,}92$; c) $\frac{127}{20} = \frac{127}{2^2 \cdot 5} = 6{,}35$.

2. fracții zecimale periodice simple:

a) $\frac{11}{3} = 3{,}(6)$; b) $\frac{47}{11} = 4{,}(27)$; c) $\frac{31}{33} = 0{,}(93)$.

3. fracții zecimale periodice mixte:

a) $\frac{7}{6} = 1{,}1(6)$; b) $\frac{43}{55} = 0{,}7(81)$; c) $\frac{37}{75} = 0{,}49(3)$.

Transformarea fracţiilor zecimale în fracţii ordinare:

- **Fracția zecimală cu un număr finit de zecimale nenule** este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător partea zecimală, iar la numitor numărul format din cifra 1 urmată de tot atâtea zerouri câte are partea zecimală:

$$\overline{a,a_1a_2a_3\ldots a_n} = a\frac{\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}}{10^n}.$$

Exemple: a) $1{,}7 = 1\frac{7}{10}$; b) $24{,}17 = 24\frac{17}{10^2}$; c) $1{,}317 = 1\frac{317}{10^3}$.

- **Fracția zecimală periodică simplă** este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător perioada, iar la numitor numărul format din tot atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada:

$$\overline{a,(a_1a_2a_3\ldots a_n)} = a\frac{\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}}{\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ cifre}}}.$$

Exemple: a) $1{,}(5) = 1\frac{5}{9}$; b) $0{,}(13) = \frac{13}{99}$; c) $2{,}(31) = 2\frac{31}{99}$; d) $3{,}(127) = 3\frac{127}{999}$.

- **Fracția zecimală periodică mixtă** este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător diferența dintre numărul fără paranteză situat după virgulă și numărul situat la partea zecimală în afara perioadei, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are partea periodică urmate de atâtea zerouri câte cifre are partea zecimală din afara perioadei:

$$\overline{a,a_1a_2\ldots a_m(b_1b_2\ldots b_n)} = a\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_mb_1b_2\ldots b_n} - \overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ cifre}}\underbrace{000\ldots0}_{m\text{ cifre}}}.$$

Exemple: a) $2{,}1(6) = 2\frac{16-1}{90} = 2\frac{15^{(15}}{90} = 2\frac{1}{6}$;

b) $3{,}12(5) = 3\frac{125-12}{900} = 3\frac{113}{900}$; c) $1{,}2(13) = 1\frac{213-2}{990} = 1\frac{211}{990}$.

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr rațional

Partea întreagă a numărului rațional x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Partea fracționară a numărului rațional x, notată $\{x\}$, este diferența dintre număr și partea întreagă a numărului, adică $\{x\} = x - [x]$.

Exemple: a) $[3{,}21] = 3$, deoarece $3 \leq 3{,}21 < 4$ și $\{3{,}21\} = 3{,}21 - [3{,}21] = 3{,}21 - 3 = 0{,}21$;

b) $[-3{,}21] = -4$, deoarece $-4 \leq -3{,}21 < -3$ și $\{-3{,}21\} = -3{,}21 - [-3{,}21] = -3{,}21 - (-4) = -3{,}21 + 4 = 0{,}79$.

În general,

- **numărul rațional pozitiv** scris ca fracție zecimală $a,a_1a_2...a_n$, unde $a \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt cifre, are **partea întreagă** numărul a și **partea fracționară** $0,a_1a_2...a_n$.
- **numărul rațional negativ** scris ca fracție zecimală $-a,a_1a_2...a_n$, unde $a \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt cifre, are **partea întreagă** $-(a+1)$ și **partea fracționară** $1 - 0,a_1a_2...a_n$.

Exemple: a) $[1{,}17] = 1$ și $\{1{,}17\} = 0{,}17$; b) $[-1{,}17] = -2$ și $\{-1{,}17\} = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Verificați care dintre propozițiile de mai jos sunt adevărate:

a) $-1 \in \mathbb{Q}$; b) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Q}$; c) $-0{,}1(3) \notin \mathbb{Q}$; d) $-\frac{8}{2} \in \mathbb{Z}$;

e) $1{,}(2) \notin \mathbb{Z}$; f) $-\frac{2}{3} \in \mathbb{N}$; g) $-7 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; h) $+24 \notin \mathbb{Q}$.

2. Se consideră mulțimile: $A = \{-1, 2, -3\}$ și $B = \{-2, 5\}$. Scrieți elementele mulțimii

$$C = \left\{ x = \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in A \text{ și } b \in B \right\}.$$

3. Verificați dacă fracțiile următoare reprezintă același număr rațional:

a) $\frac{2}{3}$; $\frac{-6}{-9}$; $\frac{18}{27}$; b) $\frac{-3}{5}$; $\frac{24}{-40}$; $-\frac{21}{35}$.

4. Se consideră mulțimea:

$$M = \left\{ -1;\ 2{,}(3);\ \frac{1}{7};\ -9;\ \frac{21}{7};\ 0;\ -1{,}5 \right\}.$$

Scrieți elementele mulțimilor:

$M_1 = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$; $M_2 = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$; $M_3 = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}$;

$M_4 = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$; $M_5 = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\}$; $M_6 = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{N}\}$.

30. Se consideră sumele $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$ și $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{n-1}{n}$, unde n este număr natural nenul.

a) Calculați $S_1 + S_2$.

b) Determinați cel mai mic număr natural n, de trei cifre distincte, pentru care $S_1 + S_2$ se divide la 4.

c) Determinați suma tuturor numerelor naturale n, de cel mult trei cifre, pentru care $S_1 + S_2$ se divide la 4.

PE-PP 2.4. Înmulţirea şi împărţirea numerelor raţionale. Proprietăţi

Înmulțirea numerelor raționale este operația prin care oricărei perechi de numere raționale a și b, i se asociază numărul rațional notat $a \cdot b$.

Observaţii:

- Numărul rațional $a \cdot b$ se numește **produsul numerelor *a* și *b***;
- Numerele a și b sunt **factorii produsului**;
- **Factorii unui produs** pot fi reprezentați prin fracții ordinare sau fracții zecimale.
- **Modulul produsului a două numere raționale *a* și *b*** este produsul modulelor numerelor a și b, adică:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

oricare ar fi numerele raționale a și b.

- **Semnul produsului a două numere raționale *a* și *b*** este dat de așa numita **regulă a semnelor** conform căreia:

a) „dacă numerele raționale a și b au același semn (ambele pozitive sau ambele negative), atunci produsul este pozitiv, adică $a \cdot b = |a| \cdot |b|$, oricare ar fi numerele raționale a și b”.

b) „dacă numerele raționale a și b au semne diferite (unul este pozitiv iar celălalt negativ), atunci produsul este negativ, adică $a \cdot b = -(|a| \cdot |b|)$, oricare ar fi numerele raționale a și b”.

- Dacă unul dintre factorii produsului este zero, atunci produsul este zero, adică „dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $a \cdot b = 0$”.
- Oricare ar fi numărul rațional a avem:

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a.$$

- Utile în calcule mai sunt:

a) **înmulțirea unei egalități cu un factor:** „dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$, oricare ar fi a, b și c numere raționale”;

b) **înmulțirea a două egalități:** „dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a \cdot c = b \cdot d$, oricare ar fi numere raționale a, b, c și d”;

c) **simplificarea cu un factor nenul a unei egalități:** „ dacă $c \neq 0$ și $a \cdot c = b \cdot c$, atunci $a = b$, oricare ar fi a și b numere raționale”.

Deoarece operația de înmulțire a numerelor raționale se reduce la operația de înmulțire a numerelor întregi, **proprietățile înmulțirii numerelor raționale** sunt aceleași cu proprietățile înmulțirii numerelor întregi:

• înmulțirea numerelor raționale este **comutativă:** $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele raționale a și b;

• înmulțirea numerelor raționale este **asociativă:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele raționale a, b și c;

• numărul rațional 1 este **element neutru** la înmulțirea numerelor raționale: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, oricare ar fi a număr rațional;

• înmulțirea numerelor raționale este **distributivă față de adunare și scădere:**
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ și $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi numerele raționale a, b și c;

• orice număr rațional nenul a are **un invers** notat $\frac{1}{a}$ sau a^{-1} care are proprietatea că:
$a^{-1} \cdot a = 1$, respectiv $\frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Împărțirea numerelor raționale este operația prin care oricărei perechi de numere raționale a și b, $b \neq 0$ i se asociază numărul rațional notat $a : b$ sau $\frac{a}{b}$.

Observații:

• Numărul rațional $a : b$ se numește **câtul numerelor raționale *a* și *b***.

• Numărul rațional a se numește **deîmpărțit,** iar numărul rațional nenul b se numește **împărțitor**.

• **Câtul** dintre numărul rațional a și numărul rațional nenul b se definește ca fiind **produsul numărului *a* cu inversul numărului *b***, adică:

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

• Prin înmulțirea sau împărțirea unei inegalități cu un număr pozitiv, inegalitatea se păstrează, adică: „dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ și $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$”.

• Prin înmulțirea sau împărțirea unei inegalități cu un număr negativ, semnul inegalității se schimbă, adică: „dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$ și $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$”.

• Înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul al doilea.

• Într-un șir de operații, înmulțirea și împărțirea se efectuează înaintea adunării și scăderii, adică operațiile de ordinul al doilea (înmulțirea și împărțirea) se efectuează înaintea operațiilor de ordinul întâi (adunarea și scăderea).

• Regula de folosire a parantezelor este la fel cu cea de la numere întregi.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Calculați:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$;   b) $\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{3}{5}$;   c) $\frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$;   d) $\frac{-1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$.

PE-PP

2.7. Rezolvarea unor ecuaţii în mulţimea numerelor raţionale

O ecuație în mulțimea numerelor raționale are forma generală $a \cdot x + b = c$, unde a și b sunt numere raționale și a este diferit de zero.

Numărul rațional x este **necunoscuta** sau **variabila ecuației**, a este **coeficientul necunoscutei**, iar b și c sunt termeni liberi.

Un număr rațional x_0 pentru care propoziția $a \cdot x_0 + b = c$ este adevărată se numește **soluția ecuației**.

A rezolva o ecuație înseamnă **a determina toate soluțiile acesteia**.

Mulțimea soluțiilor unei ecuații se notează cu S.

Dacă o ecuație nu are soluție, se notează $S = \varnothing$.

Observaţii:

- În practică ecuația $a \cdot x + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale poate avea una din formele:

a) $x + a = b$; b) $x \cdot a = b$; c) $x : a = b$.

Pentru a rezolva în mulțimea numerelor raționale ecuația $a \cdot x + b = c$, procedăm astfel:

- punem în evidență termenul care conține necunoscuta: $a \cdot x = c - b$;
- calculăm diferența: $c - b = d$;
- rescriem ecuația: $a \cdot x = d$;
- punem în evidență factorul x: $x = d : a$;
- mulțimea soluțiilor ecuației este: $S = \left\{\frac{d}{a}\right\}$.

Exemplu: $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{7}{3} - 0,3$.

Efectuăm calculele: $\frac{7}{3} - 0,3 = \frac{7}{3} - \frac{3}{10} = \frac{70 - 9}{30} = \frac{61}{30}$. Rezultă: $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{61}{30}$.

În acest produs, punem în evidență factorul x: $x = \frac{61}{30} : \frac{1}{2}$.

Efectuăm calculul: $\frac{61}{30} : \frac{1}{2} = \frac{61}{30} \cdot 2 = \frac{61}{15} = 4,0(6)$.

Rezultă $x = 4,0(6)$, ceea ce arată că 4,0(6) este soluția ecuației și că ecuația nu mai are alte soluții. Notând cu S mulțimea soluțiilor ecuației, rezultă $S = \{4,0(6)\}$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Scrieţi ecuaţia $ax + b = 0$, pentru:

a) $a = -2$, $b = 3$; b) $a = -1$, $b = 0,(6)$; c) $a = -1,2$, $b = 2,1(3)$.

2. Verificaţi dacă $a = -\frac{2}{3}$ este soluţie pentru ecuaţiile:

a) $3x - 2 = 0$; b) $-3x - 2 = 0$; c) $3x + 2 = 0$; d) $-3x + 2 = 0$.

Geometrie

Capitolul I
Triunghiul

PP **Competenţe specifice**

- **C1.** Recunoaşterea unor elemente de geometrie plană asociate noţiunii de triunghi
- **C2.** Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului
- **C3.** Utilizarea criteriilor de congruenţă şi a proprietăţilor unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configuraţii geometrice
- **C4.** Exprimarea în limbaj geometric simbolic şi figurativ a caracteristicilor triunghiurilor şi ale liniilor importante în triunghi
- **C5.** Analizarea unor construcţii geometrice în vederea evidenţierii unor proprietăţi ale triunghiurilor
- **C6.** Transpunerea, în limbaj specific, a unei situaţii date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului

PE-PP 1.1. Triunghi. Definiţie. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului

Definiţie: Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C, se numeşte **triunghi determinat de punctele A, B, C** mulţimea formată de cele trei puncte, împreună cu mulțimea tuturor punctelor segmentelor AB, BC şi CA. (fig. 1).

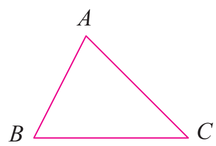


Fig. 1

Observaţii:

- Triunghiul este o mulțime de puncte din plan, adică **o figură geometrică**, care are trei laturi, trei vârfuri și trei unghiuri.
- Triunghiul determinat de punctele A, B, C se poate nota ΔABC, ΔACB, ΔBAC, ΔBCA, ΔCAB, ΔCBA (la citirea unui triunghi literele A, B, C pot fi aşezate în orice ordine dorim).
- Punctele A, B, C se numesc **vârfurile triunghiului**. Segmentele AB, BC, CA se numesc **laturile triunghiului**. Unghiurile ABC, BCA, CAB se numesc **unghiurile triunghiului**.

• În triunghiul ABC, **latura BC se opune unghiului A** și, reciproc, **unghiul A este opus laturii BC**, iar **unghiurile B și C sunt alăturate laturii BC**.

• Pentru lungimile laturilor unui triunghi ABC, se mai folosesc notațiile: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

• Dacă nu există posibilitatea unor confuzii pentru unghiurile triunghiului ABC se pot folosi și notațiile $\sphericalangle ABC = \sphericalangle B$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle A$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle C$.

Definiţie: Suma lungimilor laturilor unui triunghi se numeşte **perimetrul triunghiului,** se notează cu $\mathscr{P}$ și

$$\mathscr{P} = AB + BC + CA.$$

Observaţie:

• Semisuma lungimilor laturilor unui triunghi se numeşte **semiperimetrul triunghiului**, se notează cu p, unde $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2}$.

Definiţii: • Un punct se numeşte **interior unui triunghi**, dacă punctul este interior fiecărui unghi al triunghiului.

• Mulțimea tuturor punctelor interioare unui triunghi, se numește **interiorul triunghiului**.

• Un punct care nu se află pe laturile triunghiului și care nu este nici interior triunghiului se numește **punct exterior triunghiului**, iar mulțimea tuturor punctelor exterioare unui triunghi formează **exteriorul triunghiului.**

Definiţie: Un triunghi care are laturile de lungimi diferite se numește **triunghi scalen** (fig. 2).

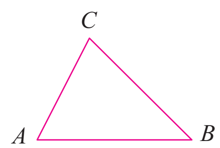


Fig. 2

Observaţii:

• Triunghiul scalen se mai poate defini ca un triunghi în care oricare două laturi nu sunt congruente.

• În figura 2, $AB = 3$ cm, $AC = 2$ cm și $BC = 2{,}5$ cm.

Definiţie: Un triunghi cu două laturi congruente se numește **triunghi isoscel,** iar cea de-a treia latură se numește **baza**[1] **triunghiului isoscel**.

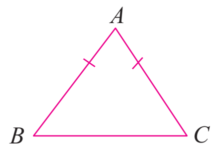


Fig. 3

Observaţii:

• Triunghiul ABC din figura 3 este isoscel.

• Laturile congruente sunt AB și AC ($AB = AC$)

• Latura BC este baza triunghiului isoscel ABC.

Definiţie: Un triunghi cu toate laturile congruente se numește **triunghi echilateral**.

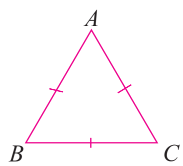


Fig. 4

Observaţii:

• Triunghiul ABC din figura 4 este triunghi echilateral.

• Toate laturile sunt congruente $AB = AC = BC$.

---

[1] Foarte probabil că denumirea de „bază” provine din preferința de a desena triunghiul isoscel cu „baza în jos”. Desigur, această preferință nu impune din punct de vedere geometric nimic. De altfel, și în această carte apar frecvent triunghiuri isoscele „cu baza în sus”.

• Un triunghi echilateral este totodată triunghi isoscel, oricare două dintre laturile lui sunt congruente ($AB = AC$, $AB = BC$, $AC = BC$).

Definiţie: Un triunghi care are toate unghiurile ascuţite se numeşte **triunghi ascuţitunghic.**

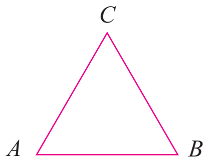


Fig. 5

Observaţii:

• Triunghiul ABC din figura 5 este triunghi ascuţitunghic.

• Toate unghiurile triunghiului sunt ascuţite: $A < 90°$, $B < 90°$, $C < 90°$.

Definiţie: Un triunghi care are un unghi drept se numeşte **triunghi dreptunghic.** Laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**, iar latura opusă unghiului drept se numeşte **ipotenuză**.

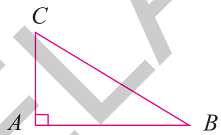


Fig. 6

Observaţii:

• Triunghiul ABC din figura 6 este triunghi dreptunghic ($\sphericalangle A = 90°$).

• AB şi AC sunt **catete**, BC este **ipotenuză**.

Definiţie: Un triunghi care are un unghi obtuz se numeşte **triunghi obtuzunghic.**

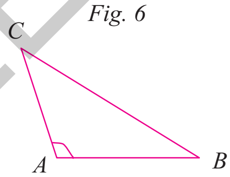


Fig. 7

Observaţie:

• Triunghiul ABC din figura 7 este triunghi obtuzunghic ($\sphericalangle A > 90°$).

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

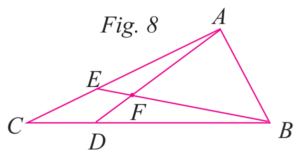
PE Înţelegere *

1. Desenaţi trei puncte necoliniare M, N, P şi triunghiul determinat de cele trei puncte. Denumiţi vârfurile, laturile şi unghiurile triunghiului.

2. Desenaţi un triunghi ABC şi precizaţi:

a) latura opusă unghiului A;
b) unghiul opus laturii AB;
c) unghiurile alăturate laturii BC.

3. Fie patru puncte P, Q, R, H astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Câte triunghiuri determină cele patru puncte? Denumiţi aceste triunghiuri.

Fig. 8


4. Priviţi figura 8. Scrieţi apoi:

a) triunghiurile din figură care au ca latură comună pe AB;
b) triunghiurile din figură care au ca unghi comun pe $\sphericalangle FBD$;
c) numărul triunghiurilor din figură.

5. Urmăriţi figura 9 şi stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

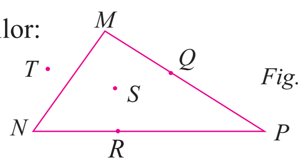


Fig. 9

a) $Q \in \Delta MNP$; b) $S \in \text{int}(\Delta MNP)$;
c) $R \notin \Delta MNP$; d) $T \in \text{int}(\Delta MNP)$;
e) $T \notin \text{ext}(\Delta MNP)$; f) $S \in \text{ext}(\Delta MNP)$.

6. Când spunem că un triunghi este isoscel? Dar echilateral? Dar dreptunghic? Dar obtuzunghic? Dar ascuţitunghic?

1.5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi

PE-PP

Definiţie: **Mediatoarea unui segment** este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia.

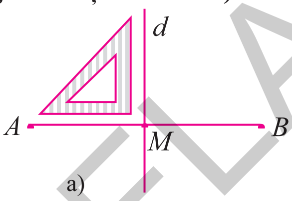
Observaţii:

- **Mediatoarea unui segment se poate construi cu rigla gradată și echerul a)**

– se construiește segmentul AB, se măsoară și se notează cu M mijlocul acestuia;

– se ridică perpendiculara în punctul M pe dreapta AB cu ajutorul echerului;

– se prelungește perpendiculara dincolo de M și se notează cu d. Dreapta d este mediatoarea segmentului AB.



a)

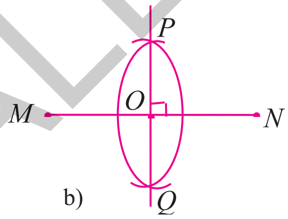
- **Mediatoarea unui segment se poate construi cu rigla negradată și compasul b)**

– luăm între vârfurile compasului mai mult de jumătate din lungimea segmentului şi trasăm un arc de cerc cu centrul în unul dintre capetele segmentului;

– repetăm procedeul pentru celălalt capăt al segmentului;

– cele două arce se intersectează în două puncte P și Q;

– unim cele două puncte P și Q și dreapta PQ este mediatoarea segmentului MN.

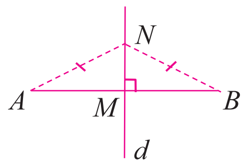


b)

TEOREMĂ: **Un punct aparţine mediatoarei unui segment dacă şi numai dacă este egal depărtat de capetele segmentului.**

Observaţii:

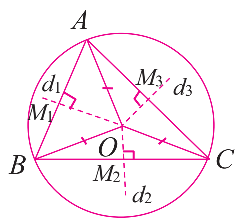
- Orice punct N de pe mediatoarea segmentului AB este egal depărtat de capetele acestuia (d este mediatoarea segmentului AB și $N \in d$ rezultă $NA = NB$).
- Orice punct N care se află la egală distanță de capetele segmentului AB, aparține mediatoarei segmentului ($NA = NB$ rezultă N se află pe mediatoarea segmentului cu extremitățile A și B).



TEOREMĂ: **În orice triunghi mediatoarele laturilor sunt concurente într-un punct *O*, care este centrul cercul circumscris triunghiului și este situat la aceeași distanță de vârfurile triunghiului.**

Observaţii:

- Mediatoarele d_1, d_2 și d_3 sunt concurente în punctul O care este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
- Distanțele de la centrul cercului circumscris la vârfurile triunghiului sunt egale cu raza cercului circumscris triunghiului (d_1, d_2, d_3 mediatoarele laturilor triunghiului ABC și $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$ rezultă $OA = OB = OC = R$, unde R este raza cercului circumscris).



• Centrul cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic se află în interiorul triunghiului.
• Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.
• Centrul cercului circumscris unui triunghi obtuzunghic se află în exteriorul triunghiului.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Desenaţi un segment AB.
a) Construiţi mediatoarea segmentului, folosind rigla negradată şi compasul.
b) Construiţi mediatoarea segmentului, folosind rigla negradată şi echerul.

2. Completaţi spaţiile punctate:
a) Mediatoarea unui segment este … .
b) Punctele de pe mediatoarea unui segment au proprietatea că sunt … .
c) Mediatoarele unui triunghi sunt … .
d) Punctul de concurenţă a mediatoarelor unui triunghi este … de vârfurile triunghiului.
e) Cercul care trece prin vârfurile unui triunghi se numeşte … .
f) Centrul cercului circumscris unui triunghi este … .

3. Construiţi un triunghi ABC, mediatoarele laturilor şi cercul circumscris triunghiului, ştiind că:
a) $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $\sphericalangle B = 120°$; b) $AB = 5$ cm, $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 90°$;
c) $AB = 5$ cm, $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 100°$; d) $AB = 4$ cm, $BC = 3{,}5$ cm, $AC = 3$ cm;
e) $AB = AC = 5$ cm, $BC = 3$ cm.

4. Construiţi cercul circumscris unui triunghi ABC în fiecare dintre cazurile:
a) triunghiul ABC este ascuţitunghic;
b) triunghiul ABC este dreptunghic;
c) triunghiul ABC este obtuzunghic.
Ce observaţi?

5. Completaţi spaţiile punctate:
a) Centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic se află în … triunghiului.
b) Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este … triunghiului.
c) Centrul cercului circumscris unui triunghi obtuzunghic se află în … triunghiului.

6. a) Desenaţi un triunghi echilateral.
b) Construiţi mediatoarele triunghiului.
c) Desenaţi cercul circumscris triunghiului.

PE Aplicare şi exersare **

7. Dacă vârful A al triunghiului ABC se află pe mediatoarea segmentului BC, stabiliţi natura triunghiului ABC.

8. Dacă vârfurile A şi B ale triunghiului ABC se află pe mediatoarele laturilor BC respectiv, AC, stabiliţi natura triunghiului ABC.

9. a) Construiţi cercul înscris şi cercul circumscris unui triunghi isoscel. Ce observaţi?
b) Construiţi cercul înscris şi cercul circumscris unui triunghi echilateral. Ce observaţi?

PE

Nume ______________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.*

I. Completaţi pe fişa de evaluare spaţiile punctate cu răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Triunghiul ABC este congruent cu triunghiul BCA şi are perimetrul de 24 cm. Atunci latura care se opune unghiului B are lungimea egală cu .... cm.

(0,5p) **2.** Un triunghi ABC, isoscel şi cu BC = 10 cm, este congruent cu triunghiul MNP. Dacă $MN + MP$ = 28 cm, atunci segmentul AB are lungimea egală cu .... cm.

(0,5p) **3.** Se desenează un cerc cu centrul în O şi raza de 4 cm şi două drepte perpendiculare în O care intersectează cercul în punctele A şi B, respectiv C şi D. Dacă se consideră că $AC = 5,6$ cm, atunci perimetrul triunghiului ADB este egal cu ....

(0,5p) **4.** Se consideră un segment MN şi un punct P egal depărtat de capetele segmentului. Dacă O este mijlocul segmentului şi $O \neq P$, atunci măsura unghiului MOP este egală cu... .

II. Încercuiţi pe fişă doar răspunsul corect, ştiind că numai unul dintre cele patru răspunsuri este corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Orice triunghi ABC cu proprietatea că $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$ este:

A. echilateral B. isoscel C. dreptunghic D. obtuzunghic

(0,5p) **2.** Orice triunghi cu proprietatea că are un unghi exterior cu măsura de 40° este:

A. echilateral B. isoscel C. dreptunghic D. obtuzunghic

(0,5p) **3.** Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare, cu vârful în punctul O, se intersectează cu o dreaptă în punctele M şi N. Atunci triunghiul MON este:

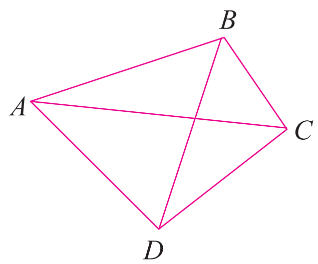
A. isoscel B. ascuţitunghic C. dreptunghic D. obtuzunghic

(0,5p) **4.** Două segmente AB şi CD au acelaşi mijloc în punctul O, AB = 12 cm, CD = = 16 cm şi AC = 10 cm. Atunci perimetrul triunghiului BOD este egal cu:

A. 32 cm B. 36 cm C. 28 cm D. 24 cm

III. Uniţi prin săgeţi fiecare enunţ, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta. (2 puncte)

În figura alăturată admitem că AC este bisectoare pentru $\sphericalangle BAD$ şi CA este bisectoare pentru $\sphericalangle BCD$. Atunci următoarele perechi de laturi distincte sunt congruente:

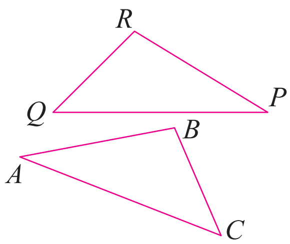


(0,5p)	a) AB	1) BD
(0,5p)	b) BC	2) DA
(0,5p)	c) CD	3) CD
(0,5p)	d) DA	4) BC
		5) AB

La problemele IV şi V scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete. (3 puncte)

(1p) **IV.** Se consideră un triunghi oarecare OMN şi un punct L, astfel încât punctele L şi O să fie de o parte şi de alta a dreptei MN. Dacă $LM = OM$, $LN = ON$ şi $\sphericalangle OML = 120°$, folosind metoda triunghiurilor congruente, calculaţi măsurile unghiurilor OMN şi LMN.

(2p) **V.** Fie două triunghiuri congruente: ΔABC şi ΔPRQ.
Se ştie că $AB = 4$ cm, $PQ = 5$ cm şi că perimetrul triunghiului ABC este de 12 cm.
a) Aflaţi lungimea segmentului BC.
b) Folosiţi rigla şi compasul şi construiţi triunghiul ABC, respectând lungimile laturilor lui.



Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.	IV.	V.
Punctajul											
Nota											

PE-PP 1.13. Proprietăţile triunghiului isoscel

Definiţie: Un triunghi cu două laturi congruente se numeşte **triunghi isoscel**.

Dacă triunghiul ABC este un triunghi isoscel cu laturile congruente AB şi AC (fig. 1), atunci latura BC se numeşte ***baza*** triunghiului isoscel, $\sphericalangle A$ se numeşte ***unghiul opus bazei***, iar unghiurile B şi C se numesc ***unghiurile alăturate bazei***.

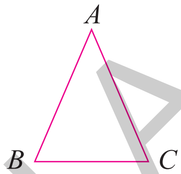


Fig. 1

TEOREMA 1: Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

TEOREMA 2: Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

TEOREMA 3: Bisectoarea unghiului opus bazei unui triunghi isoscel este înălţime.

TEOREMA 4: Dacă bisectoarea unui unghi al unui triunghi este şi înălţime a triunghiului, atunci triunghiul este isoscel.

TEOREMA 5: Bisectoarea unghiului opus bazei unui triunghi isoscel este înălţime, mediană şi mediatoare.

TEOREMA 6: Dacă mediana bazei este şi bisectoarea unghiului opus bazei, atunci triunghiul este isoscel.

TEOREMA 7: Dacă unul dintre vârfurile unui triunghi aparţine mediatoarei laturii opuse, atunci triunghiul este isoscel, iar mediatoarea este bisectoare, mediană şi înălţime.

TEOREMA 8: Oricare ar fi un triunghi isoscel, mediatoarea bazei triunghiului este axă de simetrie a triunghiului.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Construiţi un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$, ştiind că:

a) $AB = 5$ cm şi $BC = 6$ cm;

b) $\sphericalangle A = 60°$ şi $AC = 4$ cm;

c) $BC = 7$ cm şi $\sphericalangle A = 70°$.

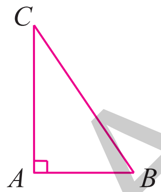
2. Se consideră triunghiul isoscel ABC.

a) Dacă $AB = 3$ cm şi $AC = 4$ cm, calculaţi BC.

b) Dacă $AB = 3$ cm şi $AC = 7$ cm, calculaţi BC.

PE-PP 1.16. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

TEOREMA LUI PITAGORA. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.



Observaţii:

- Dacă triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$, atunci $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Dacă triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, atunci $c^2 + b^2 = a^2$.

Exemple:

1. **În triunghiul ABC se știe că $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 18$ cm și $AC = 24$ cm. Calculați lungimea segmentului BC.**

Rezolvare:

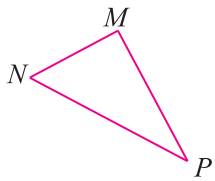
În ΔABC aplicăm teorema lui Pitagora și avem $AB^2 + AC^2 = BC^2$, adică $18^2 + 24^2 = BC^2$. Efectuând calculele se obține $BC^2 = 900 = 30^2$, adică $BC = 30$ cm.

2. **În triunghiul ABC se știe că $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 20$ cm și $BC = 25$ cm. Calculați lungimea segmentului AC.**

Rezolvare:

În ΔABC aplicăm teorema lui Pitagora și avem $AB^2 + AC^2 = BC^2$, adică $20^2 + AC^2 = 25^2$. Efectuând calculele se obține $AC^2 = 225 = 15^2$, adică $AC = 15$ cm.

RECIPROCA TEOREMEI LUI PITAGORA. Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.



Observaţii:

- Dacă în triunghiul MNP, $PN^2 = MN^2 + MP^2$, atunci triunghiul este dreptunghic cu $\sphericalangle NMP = 90°$.
- Dacă în triunghiul MNP avem că $MN^2 + MP^2 < NP^2$ atunci $\sphericalangle M > 90°$.
- Dacă în triunghiul MNP avem că $MN^2 + MP^2 > NP^2$ atunci $\sphericalangle M < 90°$.

Exemplu:

Într-un triunghi MNP se cunosc lungimile laturilor: $MN = 24$ cm, $MP = 7$ cm și $NP = 25$ cm. Verificați dacă triunghiul este dreptunghic și specificați unghiul cu măsura de 90°.

Rezolvare:

Calculăm pătratele lungimilor laturilor și obținem: $MN^2 = 24^2 = 576$; $MP^2 = 7^2 = 49$ și $NP^2 = 25^2 = 625$. Se observă că $576 + 49 = 625$ și conform reciprocei teoremei lui Pitagora se obține că triunghiul este dreptunghic. Cum $MN^2 + MP^2 = NP^2$ rezultă că MN și MP sunt catete, respectiv NP este ipotenuză și ca urmare unghiul M are măsura de 90°, adică este unghiul drept.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Se consideră un triunghi ABC, dreptunghic în A. Calculați lungimea laturii BC dacă:

a) $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm; b) $AB = 15$ cm și $AC = 20$ cm;

c) $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm; d) $AB = 18$ cm și $AC = 24$ cm.

2. Triunghiul ABC are $AB = 13$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 5$ cm. Care este măsura unghiului C?

3. Se consideră triunghiul MNP cu $\sphericalangle P = 90°$.

a) Dacă $MP = 5$ cm și $NP = 12$ cm, calculați MN.

b) Dacă $MN = 20$ cm și $MP = 16$ cm, calculați NP.

c) Dacă $NP = 40$ cm și $MN = 41$ cm, calculați MP.

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$. Determinați lungimea medianei AM, M aparține laturii BC, știind că $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm.

5. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AM = 10$ cm, unde M aparține laturii BC și $BM = CM$ și $AB = 12$ cm. Calculați lungimea catetei AC.

6. Stabiliți în care dintre următoarele cazuri, triunghiul ABC este dreptunghic și în caz afirmativ indicați unghiul drept:

a) $AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 7$ cm;

b) $AB = 8$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 17$ cm;

c) $AB = 30$ cm, $AC = 24$ cm, $BC = 18$ cm.

7. Stabiliți dacă triunghiul DEF este dreptunghic în următoarele cazuri:

a) $DE = 15$ cm, $DF = 20$ cm, $EF = 25$ cm;

b) $EF = 5$ cm, $DF = 12$ cm, $DE = 13$ cm;

c) $DE = 20$ cm, $EF = 21$ cm, $DF = 29$ cm.

8. Triunghiul dreptunghic ABC are ipotenuza BC egală cu 20 cm și cateta AC egală cu 12 cm. Stabiliți dacă propoziția „$AC > AB$” este adevărată.

9. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în B. Calculați lungimea laturii AB, știind că:

a) $AC = 10$ cm, $BC = 6$ cm; b) $AC = 17$ cm, $BC = 15$ cm;

c) $AC = 20$ cm, $BC = 16$ cm; d) $AC = 29$ cm, $BC = 20$ cm.

10. Se consideră triunghiul PQR. Stabiliți dacă triunghiul este dreptunghic în următoarele cazuri:

a) $PQ = 30$ cm, $PR = 16$ cm, $RQ = 34$ cm;

b) $PQ = 45$ cm, $PR = 27$ cm, $RQ = 36$ cm;

c) $PQ = 45$ cm, $PR = 50$ cm, $RQ = 20$ cm.

PE Aplicare şi exersare **

11. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$.

a) Verificați dacă numerele naturale 3, respectiv 4 și 5 pot reprezenta lungimile laturilor triunghiului ABC.

b) Găsiți două triplete de numere naturale care să poată reprezenta lungimile laturilor triunghiului ABC.

c) Câte astfel de triplete puteți găsi?

Teste recapitulative

✹ TESTUL 1 ✹

Precizări pentru toate variantele:
• *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completaţi spaţiile punctate. **(30p)**

1. Numărul x pentru care are loc egalitatea $\left[\left(\frac{27}{18}\right)^3\right]^{12} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ este egal cu … .

2. Dintre numerele –237 şi –273 mai mare este numărul … .

3. Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu … .

4. Unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic sunt … .

II. Încercuiţi răspunsul corect. **(30p)**

5. Rezultatul calculului $\left(\frac{7}{6}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(1\frac{5}{12}\right)^{-1}$ este egal cu:

A) $\frac{17}{12}$; B) 1; C) –1; D) $-\frac{17}{12}$.

6. Elementele mulţimii $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x^2 \leq 2^2\}$ sunt:

A) {–1; 0; 1; 2}; B) {–2; –1; 1; 2}; C) {–2; –1; 0; 1; 2}; D) {–2; –1; 0; 1}.

7. Media aritmetică a măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi este egală cu:

A) 180°; B) 120°; C) 360°; D) 240°.

8. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 4$ cm. Dacă mediatoarea laturii AB intersectează latura BC în punctul E şi perimetrul triunghiului ABE este egal cu 14 cm, atunci lungimea segmentului BE este egală cu:

A) 4 cm; B) 5 cm; C) 6 cm; D) 7 cm.

III. Uniţi prin săgeţi fiecare enunţ, aflat în coloana din stânga, cu răspunsul corespunzător, aflat în coloana din dreapta.

9. O carte de matematică costă 9 lei. În coloana A sunt scrise modificări ale preţurilor, iar în coloana B sunt scrise preţurile obţinute după modificări. **(20p)**

A	B
1. ieftinire cu 10%	a) 9,9 (lei)
2. scumpire cu 10%	b) 8,91 (lei)
3. două scumpiri succesive cu 10%	c) 8,10 (lei)
4. ieftinire cu 10% urmată de scumpire cu 10%	d) 10,89 (lei)
	e) 9,82 (lei)

IV. Scrieţi rezolvările complete. **(10p)**

10. Fie $E(n) = (-1)\cdot 1 + (-1)^2\cdot 2 + (-1)^3\cdot 3 + \ldots + (-1)^n\cdot n$. Calculaţi:

a) $E(10)$; b) $E(2018) - E(2017)$.

11. Fie triunghiul ABC şi AD bisectoarea unghiului A. Paralela prin D la AB intersectează latura AC în E, iar paralela prin E la AD intersectează BC în F.

a) Demonstraţi că triunghiul ADE este isoscel.

b) Demonstraţi că EF este bisectoarea unghiului DEC.

Modele de teste finale

ALGEBRĂ

TESTUL 1

1. Lungimea unui teren în formă de dreptunghi este de 20 hm, iar lăţimea de 80 dam.
a) Care este raportul dintre lungimea şi lăţimea terenului?
b) Ce reprezintă valoarea acestui raport?

2. Raportul dintre măsurile volumelor $\mathcal{V}_1$ şi $\mathcal{V}_2$ a două vase este $\frac{5}{2}$. Volumul primului vas este de 100 ℓ. Aflaţi volumul celui de-al doilea vas.

3. Verificaţi dacă următoarele egalităţi sunt proporţii:

a) $\dfrac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot 2}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}$; b) $\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{8}$; c) $\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{16}$;

d) $\dfrac{6}{7}=\dfrac{9:2}{21:4}$; e) $\dfrac{1+\frac{5}{9}}{2}=\dfrac{3}{2+\frac{13}{7}}$; f) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{\frac{23}{12}}{\frac{1}{6}}$.

4. Fie proporţiile: $\dfrac{b}{3}=\dfrac{2}{a}$ şi $\dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{a+c}$. Calculaţi bc.

5. Aflaţi x din: a) $\dfrac{0{,}2}{\frac{37}{10}}=\dfrac{x}{30\cdot\left(2\frac{2}{3}+3{,}5\right)}$; b) $\dfrac{x}{1{,}2}=\dfrac{\left(2{,}5-1\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{5}{24}}$;

c) $\dfrac{8\frac{8}{15}\cdot\left\{\left[0{,}2+x\cdot\left(1\frac{1}{3}-1{,}2\right)\right]\cdot 1,(6)\right\}}{2{,}1(3)}=\dfrac{2^{32}}{4^{15}}$.

6. Se dă numărul $a=2^{1990}-2^{1989}-2^{1988}$. Aflaţi x din proporţia: $\dfrac{a}{x}=\dfrac{4^{993}}{0{,}25}$.

7. Aflaţi x din proporţia $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\overline{4a6}}{5}$, ştiind că $\overline{4a6}$ este un număr natural de trei cifre divizibil cu 9.

8. Aflaţi numerele x şi y, ştiind că: $3x-y=12$ şi $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$.

9. Se dă proporţia $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. Arătaţi că $\dfrac{5a+2b}{13a+7b}=\dfrac{5c+2d}{13c+7d}$.

10. Determinaţi x, y şi z, ştiind că: $\frac{x-y}{2}=\frac{y+z}{8}=\frac{z}{6}$ şi $x+2z=48$.

11. Perimetrul unui triunghi ABC este 54. Dacă $\frac{AB}{8}=\frac{AC}{6}$ şi $\frac{BC}{2}=\frac{AC}{3}$, aflaţi lungimile laturilor triunghiului.

12. Determinaţi a, b, c, ştiind că $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{c}{8}$ şi $2a+5b-4c=108$.

13. 142 de piese trebuie împărţite la trei muncitori pentru a fi finisate. Împărţirea se face proporţional, în raport cu vechimea în muncă a muncitorilor, care este de 3, 5 şi respectiv 7 ani. Aflaţi câte piese primeşte spre finisare fiecare muncitor, ştiind că din anumite motive:

a) muncitorii care au o vechime mai mare trebuie să finiseze mai multe piese;
b) muncitorii care au o vechime mai mare trebuie să finiseze mai puţine piese.

14. Fie A, B, C trei localităţi. Distanţa, în linie dreaptă, între localităţile A şi B este de 4 824 km, iar pe hartă de 24 cm. Distanţa pe hartă între localităţile A şi C fiind de 9 cm, aflaţi care este distanţa reală:

a) cu ajutorul scării hărţii;
b) direct, utilizând regula de trei simplă.

TESTUL 2

1. Calculaţi:

a) 5% din 200; b) 10% din 250; c) 25% din 1 700;
d) 60% din 1 800; e) 120% din 265 400; f) 125% din 125;
g) $\frac{2}{3}$% din 60.

2. Aflaţi cât la sută reprezintă:

a) 10 din 70; b) 90 din 360; c) 8 din 240;
d) $\frac{5}{2}$ din 25; e) 20 din 200; f) $\frac{4}{5}$ din 100;
g) $\frac{1}{25}$ din 20 000; h) 400 din 80; i) 35 din 7.

3. Aflaţi numărul, ştiind că 16% din el reprezintă:

a) 20; b) 50; c) 458; d) $\frac{2}{3}$;
e) 32; f) 480; g) 256.

4. a) O societate comercială are 1 400 de muncitori, 60% din aceştia fiind muncitori tineri. Câţi muncitori tineri are societatea respectivă?

b) 85% din elevii unei şcoli participă la o manifestare sportivă. Câţi elevi are şcoala, dacă la manifestarea respectivă au participat 1 700 de elevi?

c) Dintr-o suprafaţă de 240 ha au fost arate 24 ha. Cât la sută din suprafaţa respectivă reprezintă suprafaţa arată?

14. Se notează cu S_A suma elementelor mulţimii $A = \{n \mid n = 3k$ şi $k \in M\}$ şi cu S_B suma elementelor mulţimii $B = \{n \mid n = 4k$ şi $k \in M\}$, unde $M = \{-1, -2, -3, \ldots, -100\}$. Calculaţi $S_A : S_B$.

15. Ştiind că $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}$, şi că numerele $a = (-3)^8 \cdot x^9 \cdot y^9 \cdot z^{3n+3}$, iar $b = (-2)^{13} \cdot x^6 \cdot y^{15} \cdot z^{3n+9}$ au acelaşi semn, aflaţi semnul numărului x.

GEOMETRIE

TESTUL 1

1. Se consideră punctele M, N, P, Q distincte şi dreptele a, b. Ştiind că $\{M, N, P\} \subset a$ şi $\{N, P, Q\} \subset b$, arătaţi că M, N, P, Q sunt coliniare.

2. Fie punctele A, B, C cu B între A şi C. Notăm cu M şi N mijloacele segmentelor AB şi BC. Aflaţi MN, ştiind că:

a) $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm;

b) $AB = 20$ cm, $BC = 4$ dm;

c) $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm;

d) $AB = 120$ cm, $BC = 90$ cm;

e) $AB = 60$ mm, $AC = 8$ cm;

f) $AC = 14$ cm, $BC = 6$ cm.

[*Indicaţie*. Ne vom folosi de următorul desen (fig. 1) care, deşi ilustrează numai parţial datele din problemă, ne va ajuta în raţionament.]

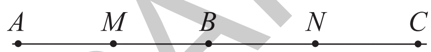


Fig. 1

3. Punctele A, B, C aparţin unei drepte astfel încât $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm şi $AC = 8$ cm.

a) Aflaţi distanţa dintre mijloacele segmentelor AB şi AC, precum şi distanţa dintre mijloacele segmentelor AB şi BC.

b) Aceleaşi cerinţe în cazul în care $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm şi $AC = 12$ cm.

4. Se consideră punctele coliniare A, B, C, D astfel încât B între A şi C şi C între B şi D. Demonstraţi că:

a) dacă M este mijlocul segmentelor AD şi BC, atunci $AC \equiv DB$;

b) dacă M este mijlocul unuia dintre segmentele AD, BC, iar $AC \equiv BD$, atunci M este şi mijlocul celuilalt segment.

5. Se consideră punctele B şi C care aparţin semidreptei AX astfel încât $AB = 120$ cm şi $AC = 40$ cm. Punctele D, E, F sunt mijloacele segmentelor AB, BC, AC, iar P şi Q mijloacele segmentelor DE şi BF. Arătaţi că $P = Q$.

6. Se consideră trei unghiuri congruente în jurul unui punct. Arătaţi că bisectoarea fiecăruia este semidreapta opusă laturii comune celorlalte două.

7. Se dau trei unghiuri a căror sumă este un unghi drept. Demonstraţi că suma complementelor celor trei unghiuri este un unghi alungit.

8. Un unghi are măsura 7/8 din măsura suplementului său. Arătaţi că 2/3 din măsura suplementului este cu 1° mai mare decât 3/4 din măsura unghiului.

9. Diferenţa a două unghiuri complementare este un unghi cu măsura de $13°14'16''$. Calculaţi măsura fiecărui unghi.

10. Se consideră două unghiuri ce au o latură comună şi a căror diferenţă este un unghi drept. Este adevărat că unghiul determinat de bisectoarele celor două unghiuri are măsura de 45°?

[*Indicaţie.* Sunt posibile două situaţii: 1) unghiurile sunt adiacente; 2) unghiurile nu sunt adiacente.]

11. Se consideră un triunghi ABC, dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$. Calculaţi lungimea laturii BC dacă:

a) $AB = 12$ cm şi $AC = 16$ cm; b) $AB = 9$ cm şi $AC = 40$ cm.

TESTUL 2

1. Fie următoarea listă cu noţiuni geometrice: unghi, unghi alungit, unghi nul, unghiuri congruente, unghi ascuţit, unghi drept, unghi obtuz, unghiuri complementare, unghiuri adiacente, unghiuri suplementare, unghiuri opuse la vârf, unghiuri în jurul unui punct, bisectoarea unui unghi, mediatoarea unui segment. Pentru fiecare dintre aceste noţiuni, scrieţi definiţia şi reprezentarea intuitivă cu notaţiile corespunzătoare.

2. Calculaţi măsura unghiului determinat de bisectoarele a două unghiuri adiacente oarecare, ştiind că suma măsurilor acestor unghiuri este de $\alpha°$. Caz particular când unghiurile sunt adiacente complementare, respectiv adiacente suplementare.

3. Unghiurile AOB şi COB sunt ascuţite şi adiacente, semidreapta OM este bisectoarea unghiului COB, iar $\sphericalangle COD$ este adiacent cu $\sphericalangle COB$ şi congruent cu $\sphericalangle AOB$. Demonstraţi că semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOD, iar $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

4. Unghiurile AOB şi COB sunt ascuţite şi adiacente, iar $\sphericalangle COD$ este adiacent cu $\sphericalangle COB$. Dacă unghiurile COB şi AOD au aceeaşi bisectoare, demonstraţi că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ şi $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

5. Unghiurile ACB şi ACD sunt adiacente, suma unghiurilor ACD şi BCA este un unghi alungit, iar semidreapta CE este bisectoarea unghiului ACB şi semidreapta CF bisectoarea unghiului ACD. Arătaţi că $\sphericalangle ECF$ este drept.

6. Fie un unghi ascuţit AOB. În semiplanul determinat de OA şi care conţine punctul B se consideră semidreapta $OA' \perp OA$, iar în semiplanul determinat de OB şi care conţine punctul A se consideră semidreapta $OB' \perp OB$. Demonstraţi că unghiurile AOB şi $A'OB'$ au aceeaşi bisectoare şi că aceste unghiuri sunt suplementare.

7. Fie unghiurile adiacente suplementare AOB şi COB, iar D un punct ce nu aparţine semiplanului determinat de AC şi care conţine punctul B, astfel încât bisectoarele unghiurilor COB şi AOD sunt semidrepte opuse. Demonstraţi că punctele B, O, D sunt coliniare.

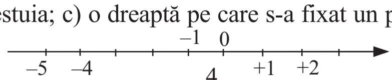
Indicații și răspunsuri

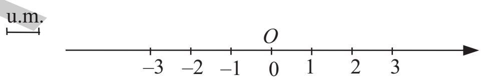
SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

ALGEBRĂ

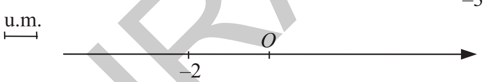
CAPITOLUL I. MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

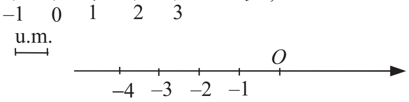
1.1. Număr întreg. Mulţimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi

1. a) număr întreg; b) acel număr întreg care se obține din numărul întreg considerat prin schimbarea semnului acestuia; c) o dreaptă pe care s-a fixat un punct numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură. **2.** a) 

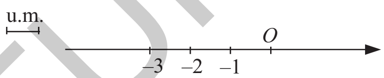
; b) analog; c) analog; d) se ia unitatea de măsură 0,5 mm. **3.** a) naturale sunt: 3; 0; $\frac{4}{2}=2$; 41 şi întregi sunt: –17; +3; 0; $\frac{4}{2}=2$; –13; 41; b) naturale sunt: 0; 83; +15; +43 şi întregi sunt: –3; 0; 83; +15; +43; –17. **4.** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ deoarece orice număr natural este şi întreg, iar $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, deoarece există numere întregi negative care nu sunt naturale. Exemple: $-4 \in \mathbb{Z}$ şi $-4 \notin \mathbb{N}$. **5.** {–3}; {0}; {2}; {–3, 0}; {–3, 2}; {0, 2}; {–3, 0, 2}; ∅. **6.** a) –3; 14; 0; –11; 13; –2; 3; –4; 7; –5; 12; b) 15; –13; 0; 17; –2; 1; –1; 7; –5; –4; 5; c) 3; –7; 0; –3; 14; –15; –13; 12; –4; 8; 17. **7.** a) +1; +2; +4; b) –4; –3; –1; c) –4 şi + 4; –1 şi +1; d) 0; 1; 2; 4. **8.** a) A = {+2, –3, 0, +444, +3, –7, –2}; b) A = {+4, +3, +2, +1, 0, –1, –2, –3}. **9.** +7, –5, +3, 0, –2, +1, –6, +4. **10.** De exemplu: a) 1, 5, 6; b) –1, 1, 3; c) –3, –4, –1; d) 0, 1, 2; e) –7, –2, –1; f) 2, 3, 7. **11.** a) –3, –2, –1, 0, 1, 2; b) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4; c) –3, –2, –1, 0, 1. **12.** a) 7, 14, 21; b) 14, 7, 0, –7, –14, –21, –28. **13.** Adevărate sunt: b), e), f), h), i). **14.** A = {–4; –7; 2; 0; +5}; B = {2; 0; +5}; C = {–4; –7}. **15.** a) A = {+5, 0, 2, +8, +3, 4}; b) B = {–4, 0, 2, +8, 4}; c) C = {–7, –9, –1}; d) D = {–4, 2, 8, 4}. **16.** A = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2}; B = {–2, –1, 1, 2, 3}. **17.** a) 

;

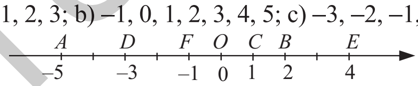
b) 

; c) 

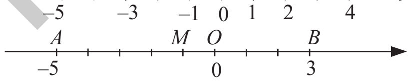
;

d) 

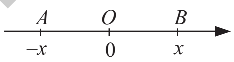
. **18.** a) –10, –8, –6, –4, –2; b) –15, –13, –11. **19.** a) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3; b) –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5; c) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. **20.** –7°.

21. a) 

; b) AE = 9 cm; BD = 5 cm; EF = 5 cm.

22. a) 

; b) $OA + OB + AM + AB = 5 + 3 + 4 + 8 = 20$ (u.m.).

23. 

a) Din $AB + 5OB = 14 \Rightarrow 2x + 5x = 14 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2$; b) Din $3OA + 5BO = 16 \Rightarrow 3x + 5x = 16 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$.

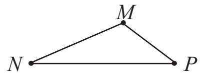
24. a) 

b) Punctele M şi N pot avea coordonatele 3 şi 5 sau –3 şi 5 sau –3 şi –5 sau 3 şi –5. **25.** a) AB =

GEOMETRIE

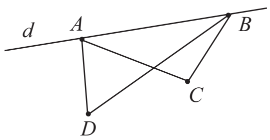
Capitolul I. TRIUNGHIUL

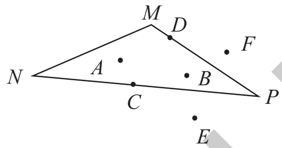
1.1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului

1. 

vârfuri: M, N, P; laturi: MN, PN, MP; unghiuri: MNP, MPN, NMP.

2. a) BC; b) $\sphericalangle C$; c) $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$. **3.** 4 triunghiuri: PQR, PQH, PRH, QRH. **4.** a) ABF, ABD, ABE, ABC; b) FBD, EBC. **5.** Adevărate: a), b), iar restul false. **6.** Are două laturi congruente; are toate laturile congruente; are un unghi drept; are un unghi obtuz; are toate unghiurile ascuțite. **7.** Ipotenuza este PR şi $\sphericalangle Q = 90°$. **8.** a) scalen; b) isoscel; c) echilateral. **9.** a) dreptunghic isoscel; b) obtuzunghic isoscel; c) ascuțitunghic.

10. 

11. 

12. a) 11,4 cm; b) 10,5 cm; c) 7,2 cm. **13.** a) $BC = 4$ cm; $AB = 2{,}4$ cm; $AC = 3{,}2$ cm; b) 6 cm, 8 cm, 10 cm. **14.** 3 cm. **15.** a) $7 < 5 + 8$, $5 < 7 + 8$ şi $8 < 7 + 5 \Rightarrow$ punctele A, B, C determină un triunghi, deci sunt necoliniare; b) $11 = 8 + 3$, adică $b = a + c \Rightarrow$ nu există ΔABC, deci punctele A, B, C sunt coliniare. **16.** $\mathcal{P}_{\Delta ABD} = 19$ cm $\Rightarrow AB + AD + BD = 19$ cm $\Rightarrow AB + BD = 11$ cm (1); $\mathcal{P}_{\Delta ACD} = 26$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow AC + AD + DC = 26$ cm $\Rightarrow AC + DC = 18$ cm (2). Atunci $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = AB + AC +$ $+ BD + DC \overset{(1),(2)}{=} 29$ cm. **17.** $AB = 16$ cm, $BC = 50$ cm, $CA = 40$ cm. **18.** a) obtuzunghic; b) dreptunghic isoscel; c) echilateral. **19.** În triunghiul ABC presupunem laturile AB şi AC congruente. <u>Cazul 1</u>: $AB = AC = 8$ cm rezultă $BC = 26$ cm $- 16$ cm $= 10$ cm. <u>Cazul 2</u>: $BC = 8$ cm rezultă $AB =$ $= (26$ cm $- 8$ cm$) : 2 = 9$ cm. **20.** Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului. Presupunem că $a \le b \le$ $\le c$. Atunci $a, b \le 4$ şi $c \ge 5$. Avem imediat $c < a + b \le 4 + 4 = 8$, adică $c \in \{5, 6, 7\}$ (1). În funcție de valorile lui c din (1) analizăm, pe rând, cazurile: i) $c = 5 \Rightarrow (a, b) \in \{(2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4)\}$, adică există două triunghiuri isoscele; ii) $c = 6 \Rightarrow (a, b) \in \{(3, 4); (4, 4)\}$, adică există un singur triunghi isoscel; iii) $c = 7 \Rightarrow a = b = 4$, adică există un singur triunghi isoscel. În total există 4 triunghiuri isoscele. **21.** $a = 15$, $b = 10$, $c = 6$; $c = 24\%$ din $(a + b)$. **22.** Fie A, B, C, D, E, F cele 6 puncte, astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Atunci sunt 5 segmente cu o extremitate în A: AB, AC, AD, AE şi AF. Aplicând principiul cutiei, oricum le-am colora cu roşu sau cu albastru, există cel puţin trei segmente de aceeaşi culoare. Presupunem AB, AC, AD colorate în roşu. Studiem ce culoare au laturile triunghiului BCD: i) Dacă una dintre laturile acestui triunghi are culoarea roşie, atunci triunghiul determinat de acea latură şi punctul A este roşu. ii) Dacă niciuna dintre laturile acestui triunghi nu are culoarea roşie, atunci ΔBCD este albastru, adică există cel puţin un triunghi de aceeaşi culoare.

1.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior

1. a) $\sphericalangle C = 180° - (64° + 59°) = 180° - 123° = 57°$; b) $\sphericalangle B = 180° - (58°29' + 74°35') = 180° -$ $- 132°64' = 179°60' - 133°04' = 46°56'$; c) $\sphericalangle A = 180° - (\alpha° + 3\alpha°) = 180° - 4\alpha°$. **2.** a) complementare; b) 60°; c) unghiurile interioare neadiacente cu el. **3.** a) 53°; b) 45°; c) 65°43′; d) 72°35′28″. **4.** a) 52°; b) 133°; 99°; 128°. **5.** 110°; 50°; 20°. **6.** a) Unghiul adiacent şi suplementar cu un unghi al triunghiului; b) suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el. **7.** 37°; 35°45′; 107°15′. **8.** 70°; 70°; 40°. **9.** a) Vezi definiţia; b) Sunt şase unghiuri şi unghiurile exterioare cu acelaşi vârf sunt congruente pentru că sunt opuse la vârf (vezi fig. 1). **10.** a) Vezi teoria; b) 720°.

Cuprins

GEOMETRIE