Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Ed. a 12-a, reviz. – Pitești : Paralela 45, 2023
2 vol.
ISBN 978-973-47-3885-4
Partea 2. – 2023. – ISBN 978-973-47-3918-9

I. Negrilă, Maria

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tipărit la R.A. „Monitorul Oficial“

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VII-a

partea a II-a

ediţia a XII-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

Algebră

Capitolul I
Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare

PP **Competențe specifice**

- C_1. Identificarea unei situaţii date rezolvabile prin ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare
- C_2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluţiilor unor ecuaţii sau sisteme de ecuaţii liniare
- C_3. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare
- C_4. Redactarea rezolvării ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii liniare
- C_5. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuaţiilor sau a sistemelor de ecuaţii liniare
- C_6. Transpunerea matematică a unor situaţii date, utilizând ecuaţii şi/sau sisteme de ecuaţii liniare

PE-PP 1. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută

Ecuațiile sunt propoziții matematice cu una sau mai multe variabile, în care apare o singură dată semnul egal („=”).

Exemple:

1. $2x - 7 = x + 2$; **2.** $3y + 2y - 8 = 0$; **3.** $3(z + 2) = 3z + 6$.

Observații:

- $x, y, z, \ldots$ poartă denumirea de variabile (necunoscute).
- Ceea ce este scris în stânga semnului egal se numește membrul stâng al ecuației, iar ceea ce este scris în dreapta semnului egal poartă denumirea de membrul drept al ecuației.

DEFINIŢII: Un număr real se numește **soluție** pentru o ecuație dacă, înlocuind necunoscuta cu acel număr în ecuația dată, propoziția obținută este adevărată. Mulțimea soluțiilor unei ecuații se notează cu S.

O ecuație de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**. Numerele reale a și b se numesc **coeficienți** (a este **coeficientul necunoscutei**, iar b se numește **termen liber**), iar x se numește **necunoscută** sau **variabilă**.

Se numește **soluție** a ecuației $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziția $ax_0 + b = 0$ este adevărată.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează mulțimea soluțiilor ecuației date și se notează, de regulă, cu S.

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea M (sau că se rezolvă în mulțimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M = \mathbb{R}$.

Exemple:

- Numărul 9 este soluție a ecuației $2x - 7 = x + 2$ pentru că, înlocuind în ecuație pe x cu 9, se obține o propoziție adevărată: $2 \cdot 9 - 7 = 9 + 2$ (A) .
- Orice număr real este soluție pentru ecuația $3(z + 2) = 3z + 6$; din această cauză, ecuația se mai numește și **identitate**.
- Există ecuații care nu au nicio soluție reală.
  Exemple: $4(x - 3) = 4x + 10$; $2z + 5 = 2(z + 9)$ etc.
  Mulțimea soluțiilor acestor ecuații este $\varnothing$.

1.1. ECHIVALENȚA ECUAȚIILOR

Înlocuind necunoscuta x cu numărul 3 în ecuația $3x + 2 = 11$, constatăm că obținem o propoziție adevărată: $3 \cdot 3 + 2 = 11$. Deci, numărul 3 este soluție a ecuației. Putem spune că am rezolvat ecuația? Nu încă, deoarece nu suntem siguri că am aflat toate soluțiile. Să presupunem că numărul a este soluție (și el) a ecuației $3x + 2 = 11$. Atunci, înlocuind necunoscuta x cu numărul a, obținem propoziția adevărată (egalitatea) $3a + 2 = 11$. Vom scădea din ambii membri ai ei numărul 2, de unde rezultă că $3a + 2 - 2 = 11 - 2$, adică $3a = 9$. Vom împărți ambii membri cu 3 și obținem $a = 9 : 3$. Deci, $a = 3$.

Numai acum putem afirma că am rezolvat ecuația; ea are o singură soluție, și anume numărul 3. Și ecuația $x = 3$ are ca soluție doar numărul 3.

Deci, ecuațiile: $3x + 2 = 11$ și $x = 3$ au aceeași soluție, ele fiind **echivalente**.

Două ecuații sunt echivalente în cazul în care au aceleași soluții. O ecuație simplă de forma $x = a$, unde a este număr real dat, are ca soluție doar numărul a. Atunci când rezolvăm o ecuație oarecare, încercăm să găsim o alta, de forma $x = a$, care să fie echivalentă cu cea dată. Putem folosi următoarele reguli, care conduc la ecuații echivalente:

1) Se pot trece termenii dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
2) Se pot înmulți (împărți) ambii membri ai ecuației cu numere diferite de zero.

1.2. ECUAȚII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ. ECUAȚII REDUCTIBILE LA ECUAȚII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

În general, o ecuație de forma $ax + b = 0$, unde a și b sunt numere reale (iar $a \neq 0$), va fi numită *ecuație de gradul I cu o necunoscută*.

O asemenea ecuație se rezolvă în două etape:

1. Scădem din ambii membri pe b și obținem $ax = -b$.
2. Împărțim ambii membri cu a și obținem $x = -\frac{b}{a}$. Această ultimă ecuație are evident ca unică soluție numărul real $-\frac{b}{a}$ și este echivalentă cu ecuația $ax + b = 0$.

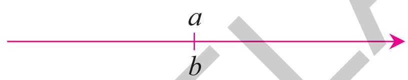
Observații:

● Dacă $a = 0$ și $b = 0$, atunci propoziția cu o variabilă $ax = -b$ se scrie $0x = 0$, deci orice număr real este soluție a ecuației.

● Dacă $a = 0$, $b \neq 0$, atunci propoziția cu o variabilă $ax = -b$ devine $0x = -b$, ceea ce este imposibil, deoarece produsul niciunui număr real cu zero nu este un număr real diferit de zero. În general, ecuațiile nu se prezintă sub această formă simplă, însă le putem aduce la aceasta folosind regulile care conduc la ecuații echivalente.

1.3. Relația de egalitate în mulțimea numerelor reale. Proprietăți

Spunem că două numere reale a și b sunt egale dacă se reprezintă în același punct pe axa numerelor.



Exemple:

1. Dacă $a = 3$ și $b = \sqrt{9}$, atunci $a = b$, deoarece $\sqrt{9} = 3$.

2. Dacă $a = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$ și $b = 7-4\sqrt{3}$, atunci $a = b$, deoarece $\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 7-4\sqrt{3}$.

Proprietățile relației de egalitate pe mulțimea numerelor reale:

1. **Reflexivitatea:** $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. **Simetria:** dacă $x = y$, atunci $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. **Tranzitivitatea:** dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Egalitatea se păstrează dacă adunăm (scădem) din ambii membri ai unei egalități același termen sau dacă înmulțim (împărțim) o egalitate printr-un factor nenul. Adică au loc următoarele echivalențe, numite proprietăți de compatibilitate între relația de egalitate și operațiile cu numere reale:

$a = b \Leftrightarrow a + x = b + x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

$a = b \Leftrightarrow a - x = b - x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

$a = b \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$;

$a = b \Leftrightarrow a : x = b : x$, $(\forall)\ a, b, x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$.

Pe scurt, putem spune că:

● dacă două egalități se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru, se obține tot o egalitate. Altfel spus, avem:

$$\text{dacă } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}, \text{ atunci } \begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \end{cases} \text{ și } \begin{cases} a \cdot c = b \cdot d \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}\ (c \neq 0;\ d \neq 0) \end{cases}.$$

Exemplu: Demonstrați că dacă $x^2 + y^2 = 2xy$, atunci $x = y$.

Adunând în ambii membri ai egalității numărul real $-2xy$, obținem egalitatea $x^2 + y^2 - 2xy = 2xy - 2xy$, care este echivalentă cu egalitatea $(x - y)^2 = 0$. Deoarece pătratul unui număr real este zero doar când numărul dat este zero, rezultă $x - y = 0$. Adunând în ambii membri ai egalității numărul y, rezultă $x = y$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Determinați valorile reale ale lui x pentru care egalitățile de mai jos sunt adevărate:

a) $2x + 3 = 7$; b) $4x - 7 = 9$; c) $2x - 1 = -9$; d) $6x - 5 = 7$;
e) $3x + 14 = 23$; f) $4x - 3 = -19$; g) $2x - 9 = -17$; h) $2x + 13 = 5$;
i) $2x + 5 = 13$; j) $3x + 7 = 16$; k) $2x - 1 = x + 3$; l) $3x - 2 = x + 6$;
m) $4x + 7 = 31$; n) $-2x + 5 = 11$; o) $5x + 6 = -14$; p) $-6x + 11 = -25$.

2. Stabiliți mulțimea soluțiilor pentru fiecare ecuație în parte:

a) $3x + 8 = 14$; b) $2x - 3 = x + 2$; c) $3x + 2 = x - 6$; d) $4x + 3 = x - 15$;
e) $3x - 8 = x + 4$; f) $3x - 11 = x - 23$; g) $4x + 5 = 2x + 13$; h) $5x - 9 = 3x + 1$;
i) $3x + 11 = -10$; j) $-7x + 19 = -16$; k) $5(x + 3) = -20$; l) $3x = x - 18$;
m) $-6x + 22 = -20$; n) $-11x - 91 = 30$; o) $4x + 15 = -5$; p) $8x = x + 49$.

3. Rezolvați ecuațiile:

a) $-9x + 17 = -10$; b) $3(x + 2) = 27$; c) $(x + 2) : 3 = -6$; d) $2(x + 1) - 3 = 5$;
e) $7 - 2(x + 3) = -11$; f) $15 + 3(x - 1) = -6$; g) $7(x - 2) - 13 = 8$; h) $6(x - 3) + 7 = -35$;
i) $4 - 3(x + 5) = -17$; j) $(3x + 1) : 5 = 5$; k) $3x - 8 = 13$; l) $-9 + 7x = 5x + 11$;
m) $6x - 13 = 2x - 1$; n) $2{,}5x - 3(1{,}5x + 2) = 4{,}8$; o) $5x - 9 + 2x = 19$;
p) $2x + \frac{1}{3} = -0{,}(6)$; r) $2x + \frac{1}{2} = -0{,}75 + \frac{1}{3}x$; s) $\frac{3(x - 5)}{2} = 5x - 18$.

4. Arătați că următoarele ecuații sunt echivalente:

a) $2x + 1 = 7$ și $3x - 4 = 5$; b) $3(x - 2) = 12$ și $3(x + 5) = 33$;
c) $7(x + 1) = 6x$ și $3(x + 1) = -18$; d) $3x + 24 = -6$ și $-2(x - 1) = 22$;
e) $5(x + 4) = 25$ și $-6(2x - 5) = 18$; f) $4x - 13 = 11$ și $7(x + 3) = 63$.

5. a) Determinați valoarea numărului real m, știind că 3 este soluție a ecuației:

$$4(m + 1)x - 5mx + 7 = 2m - 6.$$

b) Determinați valoarea numărului real m, știind că -2 este soluție a ecuației:

$$3(m - 2)x - 2mx + 9 = 5m + 56.$$

c) Calculați valoarea numărului real m, pentru care 2 este soluție a ecuației:

$$7mx - 3(2m + 5)x - 11 = 4m - 17.$$

d) Aflați valoarea numărului real m, pentru care -3 este soluție a ecuației:

$$-9mx + 8(3m - 4)x + 18 - m = 36 + 6m.$$

e) Determinați valoarea numărului real m, pentru care -4 este soluție a ecuației:

$$3mx - 2(3m - 4)x + 13 + 7m = 14 + 8m.$$

6. a) Determinați valoarea reală a numărului a, știind că -3 este soluție a ecuației:

$$4x - a(x + 5) = 2ax + 16.$$

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că 4 este soluție a ecuației: $a(7 - x) - 2x = 5ax + 26$.

c) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2x + a = 4x + 3$ are soluția -2.

d) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2ax + 5(x - 1) = 7x + 13 - 3a$ are soluția 1.

e) Determinați numărul real a pentru care ecuația $a(x + 2) + 3(x - 1) = ax - 3$ are soluția 2.

f) Determinați numărul real a pentru care ecuația $2x - a(x + 3) = 7ax + 27$ are soluția -5.

PE Aprofundare și performanță ***

27. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $\dfrac{x}{10}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{2}-\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{5}\right]=\dfrac{1-x}{4}$;

b) $x-\dfrac{1}{15}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{4-3x}{5}\right)=\dfrac{7x-\dfrac{x-3}{2}}{5}-\dfrac{11}{150}$;

c) $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{2x-1\dfrac{1}{2}}{3}\right]=\dfrac{1}{4}$;

d) $1-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{x+1}{3}\right)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x-\dfrac{10-7x}{3}}{2}+\dfrac{8}{9}$.

28. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $x\cdot 3^{2020}=\left(3^{2020}-1\right):\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{1}{3^{2019}}\right)$;

b) $x\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{2020}\right)=\dfrac{1}{2020}$;

c) $x\left(-\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}-\dfrac{1}{3\cdot 4}-\dfrac{1}{4\cdot 5}-\ldots-\dfrac{1}{2019\cdot 2020}\right)=-\dfrac{2019}{2020}$.

29. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $|x-3|=4$; b) $|x+2|=5$; c) $|2x-1|=5$; d) $\left|\dfrac{2x+1}{3}\right|=3$;

e) $|2x+5|+|4x+10|=21$; f) $|2x-3|+|6x-9|=36$.

30. Scrieți elementele mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Q}\mid |x-3|+|2x-6|+|3x-9|+|4x-12|=50\}$.

31. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $|x|=3$; b) $8-|x|=3$; c) $|-x|=1$; d) $-7+|-x|=-2$;
e) $|x-1|=11$; f) $5-|x-4|=2$; g) $|2-x|=5$; h) $9-|5-x|=-3$;
i) $|2x+3|=7$; j) $11-|2x+1|=-4$; k) $-16+|2x-1|=-5$;
l) $-17+|-2x-7|=-8$; m) $13-|-2x-5|=4$; n) $-14+|-x-4|=-6$.

32. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $||x+3|-7|=4$; b) $||x+2|-5|=8$; c) $||x+1|-4|=7$; d) $|9-|x+4||=12$;
e) $|10-|x-3||=6$; f) $|9-|x-4||=11$; g) $||x+4|-3|=5$; h) $||x+6|-8|=7$;
i) $||x+2|-4|=6$; j) $||x+7|-10|=14$; k) $||x+12|-9|=6$; l) $||x+8|-13|=10$.

33. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $|2x-7|=11$; b) $|2x+5|=13$; c) $|2x+3|=9$; d) $|2x-13|=17$;
e) $|2x-11|=19$; f) $|2x-9|=7$; g) $|2x+15|=13$; h) $|2x-15|=21$;
i) $|5-|2x-1||=8$; j) $|7-|2x-3||=6$; k) $|9-|2x+5||=8$;
l) $|13-|2x+3||=10$; m) $|15-|2x+7||=12$; n) $|19-|2x-9||=16$;
o) $||2x-11|-7|=10$; p) $||2x-3|-5|=8$; r) $||2x+5|-9|=14$;
s) $||2x+7|-13|=12$; ș) $||2x-9|-15|=18$; t) $||2x+13|-11|=6$.

4. Verificați dacă ecuația $2x - 6y + 4 = 0$ are ca soluție perechea de numere:

a) $(1; 1)$; b) $(0; -1)$; c) $(-5; -1)$; d) $(-2; 0)$; e) $(-3; 3)$.

5. Care dintre punctele următoare se află pe dreapta de ecuație $x - 2y + 6 = 0$?

a) $A(-6; 0)$; b) $B(2; -2)$; c) $C(-2; 2)$; d) $D(3; 1)$; e) $E(6; 6)$.

6. Arătați că punctul $A(0; 2)$ este punctul de intersecție a dreptelor de ecuații $2x - 3y + 6 = 0$ și $5x + y - 2 = 0$, unde $(x, y) \in \mathbb{R}$.

7. Aduceți ecuațiile la forma generală:

a) $2(2x + y) - 3(x + 2y) = -5$; b) $2(y + 3) - 4(x + 1) = 8$;

c) $2(x + y + 1) - 3(y + 2x + 1) = 0$; d) $5(x - y + 1) = 4(x + y + 2)$;

e) $\frac{x+3}{2} - \frac{y-4}{3} = \frac{x+y+3}{6}$; f) $\frac{x+y-1}{3} + \frac{x-y+2}{2} = 1\frac{1}{6}$.

8. Scrieți două perechi de numere naturale, soluții ale ecuației $5x - 4y + 20 = 0$.

9. Determinați numărul real a, astfel încât perechea $(a; a - 3)$ să fie soluție a ecuației

$$x + 2y - 12 = 0, (x, y) \in \mathbb{R}.$$

10. Determinați numărul real a, astfel încât $(4; -2a + 5)$ să fie soluție a ecuației

$$7x + 5y - 13 = 0, (x, y) \in \mathbb{R}.$$

11. Determinați numărul real m, astfel încât $(-1; 3)$ să fie soluție pentru ecuația

$$(m + 2)x - 3y + 15 = 0.$$

12. Determinați numărul real m pentru care ecuația $mx + (2m - 1)y + 18 = 7 + 3m$, $(x, y) \in \mathbb{R}$, are ca soluție $(-2; 3)$.

PE-PP 3. Sisteme de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute

Forma generală a unui sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute	(1) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	**$x, y \in \mathbb{R}$ sunt necunoscutele, iar $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sunt coeficienții**

Prin rezolvarea sistemului de ecuații se înțelege determinarea tuturor perechilor ordonate (x, y) pentru care sunt verificate atât prima, cât și a doua ecuație, deci trebuie aflată intersecția S a mulțimii soluțiilor S_1 cu mulțimea soluțiilor S_2, ale celor două ecuații.

Avem următoarele cazuri:

1. $S = S_1 \cap S_2 = \{(a, b)\}$. Sistemul are soluție unică.
2. $S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Ecuațiile sunt incompatibile, deci sistemul nu are soluție în $\mathbb{R}$.
3. $S = S_1 \cap S_2 = S_1$ sau S_2. Sistemul nu are soluție unică, ci o infinitate de soluții în $\mathbb{R}$.

Două sisteme se numesc echivalente dacă au aceeași mulțime de soluții.

Metodele de rezolvare a sistemelor de forma (1) sunt: metoda substituției, metoda reducerii și metoda grafică. Aceasta din urmă, însă, conduce numai la estimarea soluțiilor.

Metoda substituţiei

Metoda substituției în rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute constă în exprimarea unei necunoscute dintr-una dintre ecuații în funcție de cealaltă necunoscută și înlocuirea ei în cealaltă ecuație, obținând astfel o ecuație cu o singură necunoscută, pe care o rezolvăm. Se află apoi valoarea celeilalte necunoscute.

Metoda reducerii

● Dacă într-un sistem se aplică proprietățile egalităților pentru una sau ambele ecuații (presupunem că necunoscutele sunt numere reale), obținem un sistem echivalent cu cel dat.

● Dacă înlocuim una dintre ecuațiile sistemului cu o ecuație obținută prin adunarea membru cu membru a celor două ecuații, obținem un sistem echivalent cu cel dat.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Rezolvați prin metoda substituției următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x-y=8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=7 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x+4y=7 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x-2y=-14 \end{cases}$.

2. Rezolvați prin metoda substituției următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 4x+y=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-3y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x-2y=10 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x-2y=-2 \\ 3x+y=-9 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 4x-3y=6 \\ 5x-7y=1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+3y=-1 \\ 2x-y=5 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ x+5y=-13 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x-5y=-19 \\ x+4y=10 \end{cases}$.

3. Rezolvați prin metoda reducerii următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-y=-4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-y=4 \\ x+2y=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-y=9 \\ x+2y=2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+y=-2 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 4x+2y=-2 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ x+4y=2 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x-6y=8 \end{cases}$.

4. Rezolvați prin metoda reducerii următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+4y=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ 4x+6y=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x-3y=20 \\ 5x+2y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 6x-2y=-14 \\ 7x+y=-13 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+y=-2 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 4x+2y=-2 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 4x-3y=17 \\ 2x+5y=-11 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x-5y=-19 \\ 4x+y=-5 \end{cases}$.

5. Rezolvați prin metoda substituției sistemele:

a) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+3y=-3 \\ -x+2y=5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+y=-7 \\ 3x-4y=-5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x-2y=-8 \\ 3x+4y=-4 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 3x-4y=-15 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 4x-5y=23 \\ 3x-y=9 \end{cases}$.

Capitolul II
Elemente de organizare a datelor

PP **Competențe specifice**

- **C1.** Identificarea unor informaţii din tabele, grafice şi diagrame
- **C2.** Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării şi prezentării acestora
- **C3.** Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependenţe funcţionale şi reprezentări ale acestora
- **C4.** Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
- **C5.** Analizarea unor situaţii practice prin elemente de organizare a datelor
- **C6.** Transpunerea unei situaţii date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)

PE-PP 1. Produsul cartezian a două mulţimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale. Distanţa dintre două puncte din plan

Fie o mulțime nevidă formată din două elemente, notate a și b. Dacă stabilim o ordine de scriere a lor în mulțime, spunem că am format o **pereche ordonată**, pe care o notăm $(a; b)$.

Observaţii:

- Perechea ordonată $(a; b)$ este o mulțime distinctă de $\{a; b\}$.
- În timp ce $\{a; b\} = \{b; a\}$, în general $(a; b) \neq (b; a)$.

Exemple: $(2; 5) \neq (5; 2)$.

DEFINIŢIE: Produsul cartezian al mulțimilor nevide A și B este mulțimea formată din toate perechile ordonate $(a; b)$, unde $a \in A$ și $b \in B$.

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Într-o pereche ordonată, ordinea scrierii elementelor contează, adică, în general avem $(a; b) \neq (b; a)$ și $A \times B \neq B \times A$. De fapt, perechile ordonate $(a; b)$ și $(c; d)$ sunt **egale** dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$.

Exemplu:

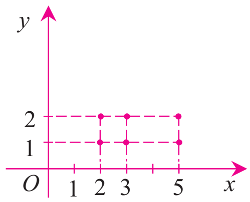
$A = \{2; 3; 5\}$ și $B = \{1; 2\}$

$A \times B = \{(2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2), (5; 1), (5; 2)\}$

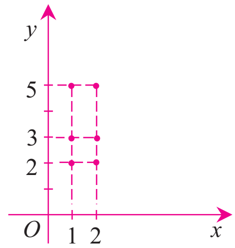
$B \times A = \{(1; 2), (1; 3), (1; 5), (2; 2), (2; 3), (2; 5)\}$

Se observă că $A \times B \neq B \times A$.

Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $A \times B$ din exemplul anterior este:



Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $B \times A$ din exemplul anterior este:



Se observă și din cele două reprezentări că $A \times B \neq B \times A$.

Regula produsului: Dacă mulțimile A și B sunt finite (au un număr finit de elemente), iar card $A = p$ și card $B = q$, atunci card$(A \times B) = p \cdot q$.

Exemplu: Dacă într-o clasă de 30 de elevi sunt 20 de băieți și 10 fete, atunci numărul perechilor distincte băiat-fată din clasă este 200.

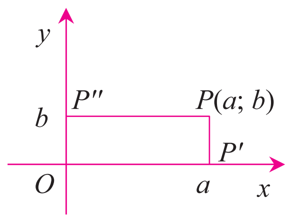
Într-adevăr, notând cu B mulțimea băieților și cu F mulțimea fetelor, orice pereche (băiat; fată) este element al produsului cartezian $B \times F$, iar card$(B \times F)$ = card $B \cdot$ card $F = 20 \cdot 10 =$ $= 200$.

Numerele reale se reprezintă pe o dreaptă numită axa numerelor. Elementele produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pot fi reprezentate în plan într-un sistem ortogonal de axe.

Prin **sistem de axe ortogonale** înțelegem figura formată din două axe ale numerelor care sunt perpendiculare și care au un punct de intersecție, numit **origine**.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu:

– **originea** O;
– **unitatea de măsură** AB;
– axa Ox se numește **axa absciselor**;
– axa Oy se numește **axa ordonatelor**.



Un astfel de sistem se mai numește și **sistem cartezian**.

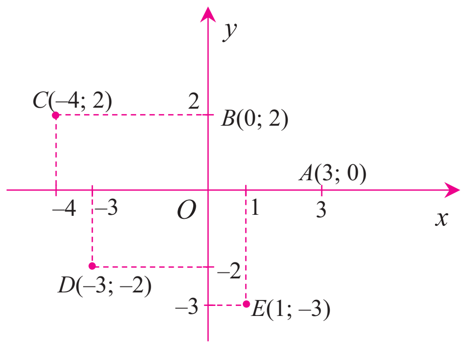
Planul în care se reprezintă un sistem cartezian este împărțit de acesta în patru **cadrane**.

Asociem fiecărei perechi $(a; b)$ de numere reale un punct în plan obținut astfel: pe axa Ox reprezentăm punctul P' de coordonată a, iar pe axa Oy punctul P'' de coordonată b. Prin punctul P' ducem o paralelă la axa ordonatelor, iar prin punctul P'' ducem o paralelă la axa absciselor. Intersecția celor două paralele este punctul P căutat, pe care îl notăm $P(a; b)$ și citim „punctul P de abscisă a și ordonată b".

Punctele de forma $A(0; y)$ se află pe axa Oy și se numesc puncte de abscisă 0 (zero).

Punctele de forma $B(x; 0)$ se află pe axa Ox și se numesc puncte de ordonată 0 (zero).

În figura alăturată sunt reprezentate în sistemul ortogonal de axe xOy punctele $A(3; 0)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 2)$, $D(-3; -2)$; $E(1; -3)$.



Exemple:

1. Mijlocul segmentului AB, unde $A(3; 8)$ și $B(1; 2)$, este punctul $M(2; 5)$, deoarece $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ și $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{8+2}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$.

2. Determinați coordonatele simetricului punctului $A(-1; 2)$ față de punctul $M(1; 4)$.

Simetricul lui A față de M este punctul $B'(a; b)$ cu proprietatea că M este mijlocul segmentului AB'. Atunci $x_M = \dfrac{x_A + x_{B'}}{2}$ și $y_M = \dfrac{y_A + y_{B'}}{2}$, de unde se obține $x_M = \dfrac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a = 3$ și $y_M = \dfrac{2+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 6$. Deci, $B'(3; 6)$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Se dau mulțimile $A = \{-3; -1; 1\}$ și $B = \{1; 2; 3\}$.
a) Determinați produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.
b) Determinați produsele carteziene $A \times A$ și $B \times B$.
c) Reprezentați geometric cele patru produse carteziene.

2. Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid 2x + 3 \leq 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid 3x + 7 \geq 1\}$, calculați $A \cap B$ și produsele carteziene $A \times B$ și $B \times A$.

3. Reprezentați geometric produsele $A \times B$ și $B \times A$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 2\}$ și $B = \{-1; 0; 1\}$.

4. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele:
$A(2; 5)$, $B(3; 0)$, $C(-1; 3)$, $D(4; -4)$, $E(-3; -2)$, $F(-3; 0)$, $G(0; -1)$.

5. Fie punctele $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$ și $C(4; 1)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.
b) Fie A', B' și C' simetricele punctelor A, B și C față de axa Ox. Determinați coordonatele punctelor A', B' și C'.

6. Fie punctele $M(-3; 3)$, $N(2; 5)$, $P(4; -3)$, $Q(0; 2)$, $R(-2; 0)$.
a) Reprezentați punctele M, N, P, Q, R într-un sistem de axe ortogonale.
b) Calculați distanțele MN, PQ și PR.
c) Reprezentați punctele următoare și scrieți coordonatele lor:
i) punctul A este simetricul punctului P față de dreapta Ox;
ii) punctul B este simetricul punctului P față de dreapta Oy;
iii) punctul C este simetricul punctului P față de punctul O.

7. Fie punctele $A(0; 2)$, $B(2; 6)$ și $C(0; -3)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A, B și C.
b) Calculați lungimea segmentului AB.
c) Calculați aria triunghiului ABC.

8. Fie punctele $A(0; -1)$ și $B(3; -4)$.
a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele A și B.
b) Dacă A' și B' sunt simetricele punctelor A și B față de Ox, aflați aria patrulaterului astfel format.

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

✱ TESTUL 1 ✱

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(1,5p) **1.** Se consideră punctele $A(3; 2)$ și $B(-5; -4)$. Calculați lungimea segmentului AB.

(1,5p) **2.** Se consideră punctele $A(4; -6)$ și $B(-2; 2)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

(1,5p) **3.** Se consideră punctele $A(12; 16)$, $B(9; 12)$ și $C(8; 13)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

(1,5p) **4.** Se consideră punctele $A(11; 6)$ și $M(1; 7)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că punctul M este mijlocul segmentului AB.

(1,5p) **5.** Se consideră punctele $A(a; 3)$ și $B(2; 7)$. Determinați valorile reale ale lui a, pentru care lungimea segmentului AB este egală cu 5.

(1,5p) **6.** Fie punctele $M(1; 2)$, $N(2; 2)$ și $P(2; 1)$, vârfurile triunghiului MNP. Verificați dacă triunghiul MNP este isoscel și calculați perimetrul și aria triunghiului.

✱ TESTUL 2 ✱

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(1,5p) **1.** Se consideră punctele $A(4; 3)$ și $B(-4; -3)$. Determinați lungimea segmentului AB.

(1,5p) **2.** Fie punctul $A(6; -4)$ și $M(-5; 3)$. Determinați coordonatele punctului $B(a, b)$ știind că punctul M este mijlocul segmentului AB.

(1,5p) **3.** Se consideră punctele $A(2; 2)$, $B(4; 0)$ și $C(2; -2)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC.

(1,5p) **4.** Verificați dacă punctele $A(1; 1)$, $B(2; -1)$ și $C(3; -3)$ sunt coliniare.

(1,5p) **5.** Se consideră punctele $M(1; 1)$, $N(2; 3)$ și $P(0; 4)$ care sunt vârfurile triunghiului MNP. Calculați aria triunghiului MNP.

(1,5p) **6.** Se consideră punctele $A(11; -5)$, $M(-1; 3)$ și $B(-2m + 3; 2n + 7)$. Determinați valorile numerelor reale m și n pentru care punctul M este mijlocul segmentului AB.

✱ TESTUL 3 ✱

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(1,5p) **1.** Se consideră punctele $A(-6; -9)$ și $B(-1; 3)$. Calculați lungimea segmentului AB.

(1,5p) **2.** Se consideră punctele $A(a; -7)$ și $B(3; -2)$. Determinați valorile numărului real a, pentru care $AB = 13$.

(1,5p) **3.** Fie punctele $A(9; -5)$ și $M(-1; 7)$, iar punctul $B(a; b)$ este simetricul punctului A față de punctul M. Determinați coordonatele punctului B.

(1,5p) **4.** Se consideră punctele $A(-5; 7)$ și $B(3; -1)$. Determinați coordonatele punctului $M(x_M; y_M)$, care este mijlocul segmentului AB.

(1,5p) **5.** Se consideră punctele $M(0; 8)$; $N(-6; 0)$; $P(0; -3)$ și $Q(4; 0)$. Calculați perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

(1,5p) **6.** Se consideră punctele $A(0; 12)$, $B(16; 0)$, $C(0; -12)$ și $D(-9; 0)$. Calculați aria patrulaterului $ABCD$.

Geometrie

Capitolul I
Asemănarea triunghiurilor

PP **Competențe specifice**

- **C1.** Identificarea triunghiurilor asemenea în configuraţii geometrice date
- **C2.** Stabilirea relaţiei de asemănare între triunghiuri
- **C3.** Utilizarea asemănării triunghiurilor în configuraţii geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri şi arii
- **C4.** Exprimarea în limbaj matematic a proprietăţilor unor figuri geometrice folosind asemănarea
- **C5.** Interpretarea asemănării triunghiurilor în configuraţii geometrice
- **C6.** Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situaţii date, utilizând asemănarea triunghiurilor

PE-PP 1. Raportul a două segmente. Teorema lui Thales

1.1. Raportul a două segmente

Definiţie. Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor, exprimate cu aceeași unitate de măsură.

Exemplu: $AB = 45$ cm, $CD = 2{,}7$ dm, $\frac{AB}{CD} = \frac{45 \text{ cm}}{2{,}7 \text{ dm}} = \frac{45}{27} = \frac{5}{3}$.

Observaţie: Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură aleasă.

Dacă a, b, c, a', b', c' sunt numere reale nenule și $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, atunci a, b, c sunt proporționale cu a', b', c', iar k este coeficientul de proporționalitate.

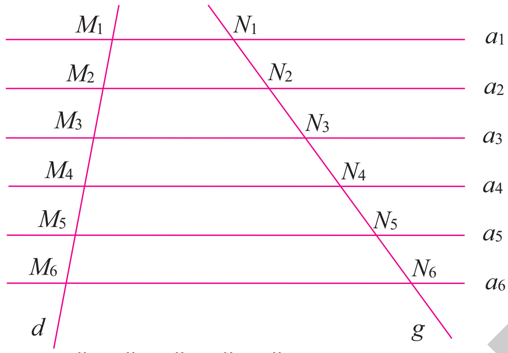
Definiţie. Segmentele AB, BC și CD sunt proporționale cu segmentele $A'B'$, $B'C'$ și, respectiv, $C'D'$ dacă lungimile lor, exprimate cu aceeași unitate de măsură, sunt proporționale.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Observaţie: Se consideră segmentele: $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 1{,}25$ cm, $DE = 2{,}5$ cm. Atunci: $\frac{AB}{BC} = 2$; $\frac{DE}{CD} = 2$ și $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD}$, deci segmentele considerate sunt proporționale.

Teorema paralelelor echidistante

Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.



În figura de mai sus, din $a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel a_4 \parallel a_5 \parallel a_6$ ... și $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5 = M_5M_6$ ..., rezultă $N_1N_2 = N_2N_3 = N_3N_4 = N_4N_5 = N_5N_6$ ... .

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Desenați segmentele AB, CD, EF, știind că $AB = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $EF = 10$ cm. Calculați valoarea rapoartelor:

a) $\frac{AB}{CD}$; b) $\frac{CD}{EF}$; c) $\frac{AB}{EF}$; d) $\frac{EF}{CD}$; e) $\frac{CD}{AB}$.

2. Două segmente MN și PQ sunt congruente. Cât este $\frac{MN}{PQ}$? Dar $\frac{PQ}{MN}$?

3. Fie A, B, C puncte coliniare, în această ordine, cu $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm. Calculați $\frac{AB}{BC} + \frac{AC}{AB}$.

4. În triunghiul ABC, segmentul EF este linie mijlocie, $E \in AB$ și $F \in AC$. Calculați valoarea rapoartelor:

a) $\frac{AE}{EB}$; b) $\frac{AF}{AC}$; c) $\frac{AB}{EB}$; d) $\frac{EF}{BC}$; e) $\frac{AC}{FC}$.

5. Fie punctele E și F situate pe segmentul AB astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{5}$ și $\frac{AF}{AB} = \frac{3}{7}$. Determinați valoarea rapoartelor:

a) $\frac{AE}{AB}$; b) $\frac{AF}{FB}$; c) $\frac{AE}{AF}$; d) $\frac{EF}{AE}$; e) $\frac{AF}{EB}$.

6. Dacă A, B, C sunt puncte coliniare, $AB = 32$ cm și $\frac{BC}{AB} = \frac{7}{8}$, aflați AC.

7. Se dă segmentul AB, cu $AB = 36$ cm. Construiți punctele E și F pe dreapta AB, astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} = \frac{AF}{FB}$.

PE

Nume ________________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă $P \in AB$ astfel încât $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{5}$ și $PB = 1$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu .... cm.

(0,5p) **2.** Fie $P \in AB$ astfel încât $\frac{PB}{AP} = \frac{3}{11}$. Dacă $AB = 35$ cm, lungimea segmentului AP este egală cu .... cm.

(0,5p) **3.** În interiorul unui segment AB se consideră punctele M și P, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{7}$ și $\frac{AP}{PB} = \frac{7}{4}$. Valoarea raportului $\frac{MP}{PB}$ este egală cu ....

(0,5p) **4.** Punctele M și N sunt situate pe segmentul AB astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$ și $\frac{AN}{AB} = \frac{3}{7}$. Valoarea raportului $\frac{AM}{AN}$ este egală cu ....

(0,5p) **5.** Fie punctele E și F pe segmentul AB astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{5}{11}$ și $\frac{AF}{FB} = \frac{3}{5}$. Valoarea raportului $\frac{EF}{BE}$ este egală cu ....

(0,5p) **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$ cm și $AC = 18$ cm, iar M un punct pe latura AB astfel încât $AM = 8$ cm și paralela prin M la latura BC intersectează latura AC în punctul N. Lungimea segmentului CN este egală cu .... cm.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Într-un trapez lungimea bazei mari este de 24 cm. Dacă diferența dintre lungimea bazei mari și lungimea liniei mijlocii este de 5 cm, atunci lungimea bazei mici este:
A. 10 cm; B. 12 cm; C. 14 cm; D. 16 cm.

(0,5p) **2.** Un trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, are $AB = 52$ cm și $CD = 36$ cm. Lungimea segmentului de pe linia mijlocie cuprins între diagonale este de:
A. 6 cm; B. 8 cm; C. 9 cm; D. 10 cm.

(0,5p) **3.** Într-un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$ avem $AB = 24$ cm, $CD = 12$ cm și $BD = 27$ cm. Lungimea segmentului BO este egală cu:
A. 14 cm; B. 16 cm; C. 18 cm; D. 20 cm.

(0,5p) **4.** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar $BG \cap AC = \{D\}$. Dacă $CD = 9$ cm, atunci lungimea laturii AC este egală cu:
A. 12 cm; B. 14 cm; C. 16 cm; D. 18 cm.

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** În trapezul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar $BD = 56$ cm și $\frac{CO}{AO} = \frac{3}{5}$. Calculați lungimile segmentelor OD și OB.

(1p) **2.** În patrulaterul $ABCD$, paralela prin B la latura CD taie diagonala AC în M, iar paralela prin C la latura AB taie diagonala BD în N. Arătați că $MN \parallel AD$.

(1p) **3.** Din punctul M, mijlocul ipotenuzei BC a unui triunghi dreptunghic ABC, construim perpendicularele pe laturile AB și AC care se intersectează cu laturile respective în punctele D și, respectiv, E. Arătați că $\frac{ME}{MD} = \frac{AB}{AC}$.

(1p) **4.** În triunghiul ABC se ia punctul M pe latura AC. Fie $MP \parallel BC$, cu $P \in AB$ și $MN \parallel AB$, cu $N \in BC$. Arătați că $\frac{NB}{BC} + \frac{PB}{AB} = 1$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

PE-PP

2.2. Criterii de asemănare a două triunghiuri

• **Criteriul U.U.:** Două triunghiuri care au două perechi de unghiuri congruente sunt **asemenea**.

• **Criteriul L.U.L.:** Două triunghiuri care au două perechi de laturi corespondente proporționale și unghiurile dintre ele congruente sunt **asemenea**.

• **Criteriul L.L.L.:** Două triunghiuri care au laturile corespondente proporționale sunt **asemenea**.

Observații:

1. Raportul înălțimilor, medianelor, bisectoarelor ce pornesc din vârfurile corespondente a două triunghiuri asemenea este egal cu **raportul de asemănare** a celor două triunghiuri.

2. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu **pătratul** raportului de asemănare.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Stabiliți dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt asemenea în fiecare dintre următoarele situații:

a) $\sphericalangle B = 65°$, $\sphericalangle C = 70°$, $\sphericalangle A' = 45°$, $\sphericalangle B' = 65°$;

b) $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle A' = 45°$, $\sphericalangle C' = 75°$;

c) $\sphericalangle A = 38°$, $\sphericalangle C = 62°$, $\sphericalangle B' = 80°$, $\sphericalangle C' = 62°$;

d) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle A' = 42°$, $\sphericalangle C' = 78°$.

2. Stabiliți dacă triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea în fiecare dintre următoarele situații:

a) $AB = MN$, $AC = 2$ dm, $PM = 20$ cm, $\sphericalangle M = 40°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle P = 70°$;

b) $AB = \dfrac{4}{5}MN$, $AC = 0{,}8MP$ și $BC = 80\%NP$;

c) $\sphericalangle A = 0{,}(6) \cdot 90°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle P = 80°$, $\sphericalangle M = 0{,}(3) \cdot 180°$;

d) $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle B$, $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{MN}{4}$, $\dfrac{BC}{18} = \dfrac{NP}{24}$.

3. Stabiliți dacă triunghiurile MNP și EFG sunt asemenea în fiecare dintre următoarele situații:

a) $MN = 12$ cm, $NP = 16$ cm, $MP = 20$ cm, $EF = 6$ cm, $FG = 10$ cm, $EG = 4$ cm;

b) $MN = 15$ cm, $NP = 24$ cm, $MP = 18{,}6$ cm, $EF = 5$ cm, $FG = 8$ cm, $EG = 6{,}2$ cm.

4. Se consideră triunghiurile asemenea ABC și MNP. Dacă $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $NP = 18$ cm și $MP = 22{,}5$ cm, calculați lungimile segmentelor AC și MN.

5. În figura 1, $M \in AB$ și $N \in AC$ astfel încât $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ABC$.

a) Demonstrați că $\Delta ANM \sim \Delta ABC$.

b) Dacă $AB = 20$ cm, $AC = 25$ cm, $BC = 30$ cm și $MN = 18$ cm, calculați lungimile segmentelor AM și AN.

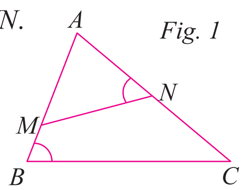


Fig. 1

Capitolul II
Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

PP **Competențe specifice**

C1. Recunoaşterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configuraţie geometrică dată

C2. Aplicarea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

C3. Deducerea relaţiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

C4. Exprimarea în limbaj matematic a relaţiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

C5. Interpretarea unor relaţii metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

C6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situaţii date, utilizând relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

PE-PP **PROIECŢII ORTOGONALE PE O DREAPTĂ**

DEFINIŢIE: Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

TEOREMĂ: Proiecția ortogonală a unui segment AB pe o dreaptă d este segmentul $A'B'$, unde A' și B' sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor A și B pe d (este un punct sau un segment, după cum AB este sau nu perpendicular pe d).

PROPRIETĂŢI:

1. Dacă $AB \parallel d$, atunci proiecția ortogonală a lui AB pe dreapta d este un segment congruent cu AB.

2. Dacă $C'D'$ este proiecția ortogonală a lui CD pe d și $CD \nparallel d$, atunci $C'D' < CD$.

3. Dacă $M'N'$ este proiecția ortogonală a lui MN pe dreapta d, atunci mijlocul lui $M'N'$ este proiecția ortogonală a mijlocului lui MN pe d.

PE-PP
1. Teorema înălţimii

Teorema înălţimii

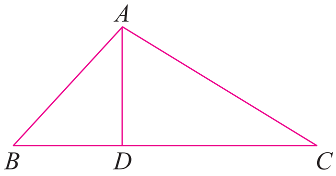
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălţimii din vârful unghiului drept este media geometrică a lungimilor proiecţiilor ortogonale ale catetelor pe ipotenuză.

Observație:

Cu notațiile din figura alăturată, se poate spune:

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii duse din vârful unghiului drept este egală cu raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.

În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, avem: $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$.

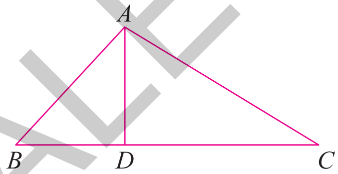


Reciproca teoremei înălțimii

Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$, astfel încât $AD \perp BC$ și $AD^2 = DC \cdot DB$. Atunci $\sphericalangle BAC = 90°$.

Demonstrație:

Din $AD^2 = DC \cdot DB$ rezultă că $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DB}{AD}$, iar cum $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle ADC$, rezultă că $\Delta ADC \sim \Delta BDA$, deci $\sphericalangle BAD \equiv$ $\equiv \sphericalangle DCA$. Dar $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD = 90°$, atunci rezultă că $\sphericalangle DCA + \sphericalangle ABD = 90°$, adică $\sphericalangle BAC = 90°$.



● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $pr_{BC} A = D$; b) $pr_{BC} AB = BD$; c) $pr_{BC} AC = DC$; d) $pr_{AB} BC = AB$;
e) $pr_{BC} AD = BD$; f) $pr_{AC} AB = AC$; g) $pr_{AC} BC = AC$.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $AD \perp BC$, cu $D \in (BC)$, iar $BC =$ $= 75$ cm. Determinați lungimile proiecțiilor catetelor AB, respectiv AC pe ipotenuza BC, știind că proiecțiile sunt invers proporționale cu numerele 0,(6) și 0,375.

3. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E, F și, respectiv, G situate pe latura AC astfel încât să avem: $AD = DE = EF = FG = GC$. Dacă punctele M, N, P, Q și, respectiv, R sunt proiecțiile punctelor A, D, E, F și, respectiv, G pe latura BC, determinați valorile rapoartelor: $\dfrac{MN}{NP}$; $\dfrac{RC}{RQ}$; $\dfrac{MP}{CQ}$; $\dfrac{NP}{NC}$; $\dfrac{MC}{NR}$; $\dfrac{MQ}{NC}$; $\dfrac{PC}{MQ}$.

4. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este egală cu 20,8 dm, iar lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt direct proporționale cu numerele 0,1(6) și 0,375. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

5. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ se dau:

a) $AD = 24$ cm și $BD = 18$ cm. Calculați CD și BC.

b) $BD = 8$ cm și $CD = 0,18$ m. Calculați AD și BC.

6. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ se dau:

a) $BD = 3,6$ dm și $CD = 6,4$ dm. Calculați BC și AD.

b) $CD = 7,2$ dm și $AD = 9,6$ dm. Calculați BD și BC.

PE-PP 3. Teorema lui Pitagora

Teorema lui Pitagora

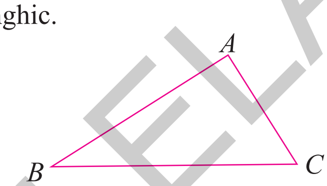
Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.

Exemplu: ΔABC: $\sphericalangle A = 90°$; atunci $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

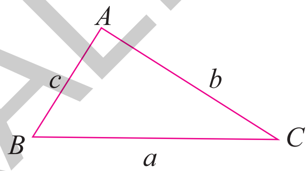
Reciproca teoremei lui Pitagora

Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii celei mai mari, atunci triunghiul este dreptunghic.

Dacă $AB^2 + AC^2 = BC^2$, atunci $\sphericalangle A = 90°$.



Observație: Dacă în triunghiul ABC avem $AB^2 + AC^2 < BC^2$, atunci $\sphericalangle A > 90°$, iar dacă $AB^2 + AC^2 > BC^2$, atunci $\sphericalangle A < 90°$.



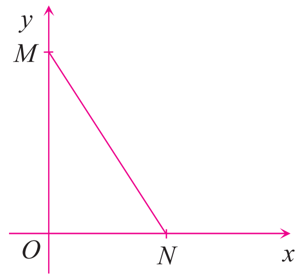
Demonstrația reciprocei teoremei lui Pitagora:

Notăm $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Se știe că:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \ (a^2 = b^2 + c^2).$$

Se consideră sistemul rectangular xOy, pe axele căruia se iau două puncte $M \in [Oy$ și $N \in [Ox$, astfel încât $OM \equiv AC$ și $ON \equiv AB$. Atunci avem:

ΔOMN: $\sphericalangle MON = 90° \Rightarrow MN^2 = OM^2 + ON^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow MN^2 = b^2 + c^2$ și, cum $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow MN^2 = a^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow MN = a \Rightarrow MN \equiv BC$.

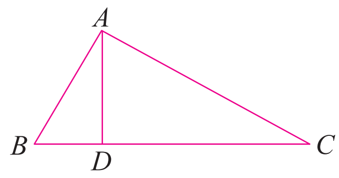


$$\Delta MON \equiv \Delta CAB \text{ (cazul L.L.L.) } \begin{cases} OM \equiv AC \text{ (constr.)} \\ ON \equiv AB \text{ (constr.)} \\ MN \equiv BC \text{ (dem.)} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sphericalangle MON \equiv \sphericalangle CAB \Rightarrow \sphericalangle BAC = 90°$.

Teorema lui Pitagora generalizată (extindere)

Fie ΔABC și $D = \text{pr}_{BC} A$ ($AD \perp BC$, $D \in (BC)$).



Dacă $\sphericalangle C < 90°$, atunci:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Dacă $\sphericalangle C > 90°$, atunci:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Demonstrație: Dacă $\sphericalangle C < 90°$, atunci $BD = |BC - CD|$. În ΔABD, $\sphericalangle D = 90°$, avem: $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + |BC - CD|^2$. Rezultă că: $AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$, deoarece $AD^2 + CD^2 = AC^2$. Rezultă că: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$.

Dacă $\sphericalangle C > 90°$, atunci $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC + CD)^2$, de unde rezultă că: $AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$, de unde rezultă: $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$.

Se observă că dacă $\sphericalangle C = 90°$, atunci $C = D$, adică $2 \cdot BC \cdot CD = 0$, adică se obține teorema lui Pitagora: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. În tabelul de mai jos sunt elementele unui triunghi ABC, $\measuredangle A = 90°$, cu $AB \equiv AC$. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	AB	AC	BC
a)			$24\sqrt{6}$
b)	$18\sqrt{2}$		
c)		$12\sqrt{6}$	

2. În tabelul de mai jos sunt elementele unui triunghi ABC, $\measuredangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	BD	CD	AD	AB	AC	BC
a)				15	20	
b)				24		40
c)					16	20
d)	18	32				

3. În tabelul de mai jos sunt elementele unui triunghi ABC, $\measuredangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	BD	CD	AD	AB	AC	BC
a)				12	16	
b)			12	15		
c)				18		30
d)	12	27				

4. În tabelul de mai jos sunt elementele unui triunghi ABC, $\measuredangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

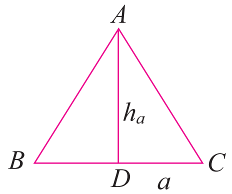
	BD	CD	AD	AB	AC	BC
a)	18	24				
b)		16	12			
c)	9			15		
d)			36		60	

5. În tabelul de mai jos sunt elementele unui triunghi ABC, $\measuredangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	BD	CD	AD	AB	AC	BC
a)	27			45		
b)				36		60
c)		32			50	
d)			48		80	
e)	16	36				

6. Aria triunghiului. Rezolvarea triunghiului dreptunghic

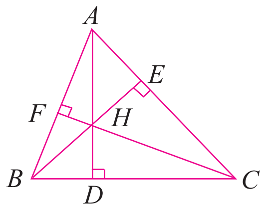
DEFINIȚIE: Prin **aria unui triunghi** înțelegem jumătate din produsul dintre lungimea unei laturi a triunghiului și lungimea înălțimii corespunzătoare acelei laturi. Cu alte cuvinte, aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul dintre „bază” și „înălțime”.



$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

LEMĂ: Într-un triunghi, produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare ei este același pentru toate cele trei laturi.



$$BC \cdot AD = AC \cdot BE = AB \cdot CF$$

Observaţii:

1. Aria unui triunghi se poate calcula cu ajutorul lungimilor a două laturi și a sinusului unghiului cuprins între ele: $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$.

2. Dacă se cunosc lungimile tuturor laturilor unui triunghi ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$), atunci aria triunghiului se poate exprima prin formula:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, unde } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

• Această formulă este cunoscută sub numele de **formula lui Heron**.

3. Dacă triunghiul ABC este echilateral, cu $AB = AC = BC = l$, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

4. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$, atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$ sau $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{c_1 \cdot c_1}{2}$, unde c_1, c_2 sunt lungimile catetelor. Dacă $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, avem:

$$\frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$

5. Dacă în triunghiul ABC, AM este mediană, atunci $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{ACM}$.

TEOREMĂ: Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare:

$$\Delta ABC \sim \Delta MNP \text{ și } \frac{AB}{MN} = k \text{, atunci } \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{MNP}} = k^2.$$

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Calculați aria triunghiului ABC, dacă:
a) $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm, $\sphericalangle B = 60°$;
b) $AC = 10$ cm, $BD = 6$ cm, unde $D = pr_{AC} B$;
c) $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm, $BC = 12$ cm.

2. Calculați aria triunghiului ABC, dacă:
a) $AB = AC = BC = 8\sqrt{3}$ cm;
b) $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $AC = 6\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle A = 90°$;
c) $AC = 12\sqrt{6}$ cm, $AB = BC$, $\sphericalangle B = 90°$;
d) $AB = 6{,}4$ cm, $AC = 15$ cm, $\sphericalangle A = 150°$.

3. Aflați aria unui:
a) triunghi dreptunghic isoscel cu o catetă de 4 cm;
b) triunghi cu o latură de 8 cm și înălțimea corespunzătoare ei de 12 cm;
c) triunghi dreptunghic cu catetele de 6 cm și 8 cm;
d) triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 24 cm și înălțimea corespunzătoare ei de 6 cm.

4. Aflați aria unui triunghi:
a) echilateral cu latura de 6 cm;
b) isoscel cu laturile congruente de 15 cm și baza de 18 cm.

5. Calculați aria triunghiului ABC, dacă:
a) $AB = 12$ cm, $AC = 8$ cm și $\sphericalangle BAC = 30°$;
b) $AC = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm și $\sphericalangle ACB = 45°$;
c) $AB = 8\sqrt{3}$ cm, $BC = 5$ cm și $\sphericalangle ABC = 60°$.

6. Calculați lungimea laturii BC a unui triunghi ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, și a laturilor congruente AB și AC, știind că are aria egală cu 72 cm^2.

7. În triunghiul ABC, cu $AB = 16$ cm și $AC = 12$ cm, punctul D este mijlocul laturii BC. Dacă $d(D, AC) = 8$ cm, calculați:
a) aria triunghiului ABC;
b) distanța de la punctul D la latura AB.

8. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și D mijlocul laturii BC. Dacă $GE \parallel AB$, $E \in BC$ și $\mathcal{A}_{GDE} = 60$ cm^2, atunci calculați aria triunghiului ABC.

9. Determinați lungimea înălțimii BD a unui triunghi ABC cu $AC = 12$ cm și $\mathcal{A}_{ABC} = 60$ cm^2.

10. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB \equiv AC$, în care $AB = 30$ cm și înălțimea $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $AD = 24$ cm. Calculați aria și perimetrul triunghiului.

11. În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 60°$, iar laturile $AB = 12$ cm și $AC = 15$ cm. Calculați latura BC, înălțimile triunghiului și aria acestuia.

Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.

✺ TESTUL 1 ✺

Subiectul I. ***Pe foaia de teză se scriu doar răspunsurile.*** **(3 puncte)**

(0,5p) **1.** Soluția ecuației $-2x + 5 = 9$ este egală cu … .

(0,5p) **2.** Soluția reală a ecuației $|2x - 3| = 7$ este egală cu … .

(0,5p) **3.** Dacă $A(4; -5)$ și $B(-2; 3)$, atunci lungimea segmentului AB este egală cu … .

(0,5p) **4.** În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 12$ cm și $AC = 16$ cm. Lungimea medianei AM, cu $M \in BC$, este egală cu … cm.

(0,5p) **5.** În rombul $ABCD$, diagonalele au următoarele lungimi: $AC = 8$ cm și $BD = 6$ cm. Aria rombului este egală cu … cm^2.

(0,5p) **6.** În triunghiul ABC, $AB = 20$ cm, $AC = 28$ cm și $BC = 24$ cm. Punctele $M \in AB$ și $N \in AC$, astfel încât $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$ și $MN = 12$ cm. Perimetrul triunghiului AMN este egal cu … cm.

Subiectul al II-lea. ***Pe foaia de teză se scriu rezolvările complete.*** **(6 puncte)**

(1p) **1.** a) Rezolvați ecuația $\frac{x+5}{3} - \frac{x+15}{6} = \frac{1}{3} - \frac{x+3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1p) b) O persoană, după ce a cheltuit 20 de lei și 60% din rest i-a mai rămas $\frac{1}{3}$ din suma inițială. Determinați suma inițială.

(1p) **2.** Rezolvați sistemul: $\begin{cases} 3x - 2(y-1) = 1 \\ 2(x-y) - 3(x-2y) = 7 \end{cases}$.

(1,5p) **3.** În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $\sphericalangle B = 60°$. Calculați:
a) lungimea ipotenuzei BC; b) aria triunghiului ABC.

(1,5p) **4.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, avem $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm și $BC = 10$ cm. Calculați:
a) perimetrul trapezului $ABCD$; b) aria trapezului $ABCD$.

✺ TESTUL 2 ✺

Subiectul I. ***Pe foaia de teză se scriu doar răspunsurile.*** **(3 puncte)**

(0,5p) **1.** Soluția ecuației $-3x + 8 = -4$ este egală cu … .

(0,5p) **2.** Soluția reală a ecuației $|2x - 5| = 9$ este egală cu … .

(0,5p) **3.** Dacă $A(3; -5)$ și $B(-1; -2)$, atunci lungimea segmentului AB este egală cu … .

(0,5p) **4.** Triunghiul dreptunghic cu ipotenuza egală cu 15 cm și o catetă egală cu 9 cm are perimetrul egal cu … cm.

(0,5p) **5.** Dreptunghiul $ABCD$ ($AB > AD$), cu $AC \cap BD = \{O\}$, are $AD = 6$ cm și $\sphericalangle BOC = 60°$. Lungimea diagonalei AC este egală cu … cm.

(0,5p) **6.** Trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 40$ cm, $CD = 16$ cm, $AD = 15$ cm și $BC = 18$ cm. Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, atunci perimetrul triunghiului MDC este egal cu ... cm.

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

• *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
• *Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.*

TESTUL 1

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Dacă $63 \cdot 84 = 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z$, atunci $x - y + z$ este:
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase a VII-a la un test de evaluare.

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	2	3	4	6	5	7	4

Numărul elevilor din clasă care au obținut note mai mari sau egale cu 8 este:
a) 11; b) 12; c) 15; d) 16.

(5p) **3.** Temperatura apei dintr-o piscină în timpul unei zile de vară este de 25°C. Pe timpul nopții, temperatura scade cu 4,5°C. Temperatura minimă a apei în cele 24 de ore ale acestei zile de vară este egală cu:
a) 20°C; b) 20,5°C; c) 21°C; d) 22°C.

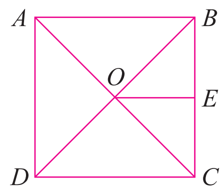
(5p) **4.** Inversul numărului $x = 0{,}08(3) + 0{,}75$ este egal cu:
a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{6}{5}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{12}{5}$.

(5p) **5.** Numărul real $a = \sqrt{2^6 + 2^9}$ este egal cu:
a) $2^3 \cdot 3$; b) $2^6\sqrt{2}$; c) $\sqrt{2^{15}}$; d) 2^{14}.

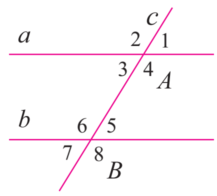
(5p) **6.** Matei pleacă cu trenul din Ploiești la ora 11:00 și ajunge în București la ora 12:10, în aceeași zi. Matei afirmă: „Deplasarea cu trenul de la Ploiești la București a durat 70 de minute.” Afirmația lui Matei este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

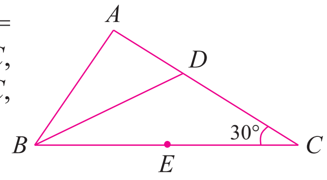
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ și $OE \perp BC$, $E \in BC$. Simetricul punctului B față de punctul E este:
a) A; b) D;
c) C; d) E.



(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele și intersectate de dreapta c în punctele A și, respectiv, B. Dacă $\sphericalangle B_5 = 65°$, atunci măsura unghiului A_2 este egală cu:
a) 105°; b) 110°;
c) 115°; d) 120°.

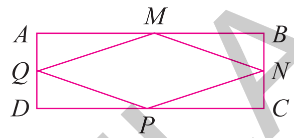


(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi dreptunghic ABC, cu $\measuredangle A = 90°$ și $\measuredangle ACB = 30°$, iar $AB = 6$ cm. Dacă BD este bisectoarea unghiului ABC, $D \in AC$, iar punctul E este mijlocul ipotenuzei BC, atunci DE are lungimea de:



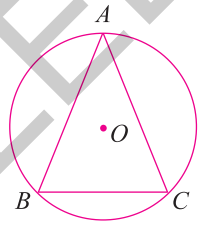
a) 3 cm; b) $2\sqrt{3}$ cm;
c) 6 cm; d) $4\sqrt{3}$ cm.

(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, având perimetrul egal cu 48 cm și lungimea egală cu triplul lățimii. Știind că mijloacele laturilor dreptunghiului sunt vârfurile rombului $MNPQ$, atunci aria rombului $MNPQ$ este egală cu:



a) 48 cm^2; b) 52 cm^2;
c) 54 cm^2; d) 56 cm^2.

(5p) **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și rază $R = 6$ cm, în care este înscris triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), cu $\measuredangle BAC = 30°$. Lungimea laturii BC este egală cu:



a) 3 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm;
c) $3\sqrt{3}$ cm; d) 6 cm.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată schița unui salon în formă de dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 12$ m și $AD = 9$ m. Proprietarul salonului vrea să acopere podeaua salonului cu plăci de parchet în formă de pătrat $AMNP$, având latura $AP = 60$ cm. Numărul necesar de plăci este egal cu:

a) 270; b) 300; c) 320; d) 360.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. (30 de puncte)

1. Diferența a două numere naturale este egală cu 45. Două treimi din cel mai mare număr este cu 48 mai mare decât trei cincimi din cel mai mic număr.

(2p) a) Determinați cel mai mare număr.

(3p) b) Determinați cel mai mic număr.

2. Se consideră punctele $A(-5, 7)$, $M(-3, 4)$ și $B(2m - 9, -3p + 10)$, unde $m, p \in \mathbb{Z}$.

(2p) a) Aflați lungimea segmentului AM.

(3p) b) Determinați valorile întregi ale lui m și p, pentru care punctul B este simetricul punctului A față de punctul M.

3. Se consideră numerele reale:

$$a = \sqrt{(2-3\sqrt{3})^2} - |3-2\sqrt{3}| \text{ și } b = |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}.$$

(2p) a) Determinați valorile numerelor reale a și b.

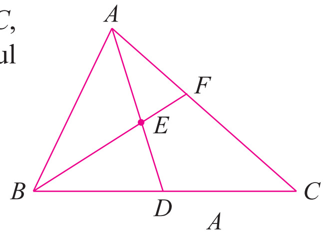
(3p) b) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

(5p) **4.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} \dfrac{2x+3y-7}{2} = \dfrac{4x+5y-8}{5} \\ \dfrac{3x-2y+6}{3} = \dfrac{5x-4y+10}{4} \end{cases}$.

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, în care AD este mediană, punctul E este mijlocul medianei AD, iar $BE \cap AC = \{F\}$.

(2p) a) Demonstrați că $BF = 4EF$.

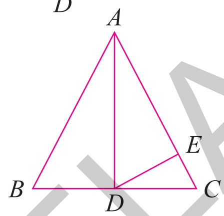
(3p) b) Arătați că $AC = 3AF$.



6. În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel ABC, cu $AB = AC$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $DE \perp AC$, $E \in AC$, iar $BC = 30$ cm și $DE = 12$ cm.

(2p) a) Determinați lungimea laturii AC.

(3p) b) Calculați sinusul unghiului BAC.



TESTUL 2

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $-3\sqrt{3} + 4\sqrt{6} : 2\sqrt{2}$ este egal cu:

a) $-2\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{3}$.

(5p) **2.** În tabelul alăturat sunt prezentate date referitoare la numărul elevilor de la fiecare nivel gimnazial dintr-o școală. Clasele pentru care raportul dintre numărul băieților și numărul fetelor este supraunitar este:

Clasa	Numărul băieților	Numărul fetelor
a V-a	26	28
a VI-a	29	23
a VII-a	23	27
a VIII-a	28	24

a) a V-a și a VII-a; b) a VI-a și a VIII-a;
c) a V-a și a VI-a; d) a VII-a și a VIII-a.

(5p) **3.** Într-o săptămână de iarnă, în două zile consecutive, s-a măsurat temperatura la aceeași oră a dimineții. Vineri dimineața temperatura a fost de $-17°C$, iar sâmbătă dimineața, la aceeași oră, temperatura a fost de $-5°C$. Temperatura măsurată în cele două dimineți a fost mai mare în ziua de sâmbătă față de ziua de vineri cu:

a) $-22°C$; b) $-17°C$; c) $-12°C$; d) $12°C$.

(5p) **4.** Dintre următoarele mulțimi de numere, cea care conține numai multipli de 5 este:

a) $\{2, 4, 8, 12\}$; b) $\{3, 6, 9, 18\}$; c) $\{5, 15, 25, 30\}$; d) $\{7, 21, 35, 49\}$.

(5p) **5.** Patru elevi au calculat media aritmetică a numerelor $-7\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 13\sqrt{2}$ și au obținut rezultatele înregistrate în tabelul următor:

David	Cristina	Matei	Ana
$4\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media aritmetică a celor patru numere este:

a) David; b) Cristina; c) Matei; d) Ana.

(5p) **6.** Un sportiv se deplasează pe un traseu în intervalul orar 9:30 – 10:50, apoi staționează. David afirmă că după 80 de minute de antrenament, de la plecare, sportivul staționează. Afirmația lui David este:

a) adevărată; b) falsă.

Recapitulare și evaluare finală

Exerciții și probleme recapitulative pentru evaluarea finală

ALGEBRĂ

A.

1. Calculați:

a) $\sqrt{20}:10^{-1}-\dfrac{50}{\sqrt{5}}+\sqrt{500}-4^{-1}\cdot\sqrt{2880}$;

b) $5^{-1}\cdot\sqrt{2000}+2\sqrt{180}-\sqrt{80}:3^{-1}-\dfrac{60}{\sqrt{5}}$;

c) $6^{-1}:\dfrac{1}{\sqrt{432}}+\left(\dfrac{12}{\sqrt{18}}-\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{6}+2\sqrt{27}-\sqrt{48}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{18}\left(\sqrt{108}-2\sqrt{48}\right)-\sqrt{12}\left(\sqrt{288}-\sqrt{72}\right)$;

b) $\sqrt{12}\left(3\sqrt{50}-\sqrt{162}\right)-\sqrt{18}\left(\sqrt{432}-\sqrt{192}\right)$;

c) $2\left(\sqrt{360}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{405}\right)+3\left(\sqrt{810}-\sqrt{20}\cdot\sqrt{162}\right)$.

3. Efectuați calculele:

a) $2\sqrt{72}\left(\sqrt{432}-\sqrt{75}-\sqrt{48}\right)$;

b) $3\sqrt{48}\left(\sqrt{288}-2\sqrt{50}-\sqrt{32}\right)$;

c) $\sqrt{108}\left(5\sqrt{8}-7\sqrt{32}+6\sqrt{18}-3\sqrt{50}\right)$;

d) $2\sqrt{242}\left(5\sqrt{27}-6\sqrt{48}-7\sqrt{12}+4\sqrt{75}\right)$.

4. Efectuați calculele:

a) $3\sqrt{3}+2\left(7\sqrt{3}-5\sqrt{3}\right)-\sqrt{108}$;

b) $2\sqrt{5}+3\left(8\sqrt{5}-6\sqrt{5}\right)-3\sqrt{80}$;

c) $3\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{5}\right)-4\left(7\sqrt{5}-11\sqrt{5}\right)$;

d) $6\left(5\sqrt{2}-6\sqrt{2}\right)+2\left(13\sqrt{2}-9\sqrt{2}\right)$;

e) $3\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)+2\left(2\sqrt{48}-3\sqrt{12}\right)-4\sqrt{3}$;

f) $5\left(\sqrt{18}-\sqrt{2}\right)-4\left(\sqrt{72}-\sqrt{50}\right)+6\sqrt{2}$.

5. Calculați $a\cdot b$, dacă:

a) $a=3\sqrt{48}-4\sqrt{18}-5\sqrt{108}+6\sqrt{72}$ și $b=2\sqrt{162}+5\sqrt{75}-2\sqrt{50}-11\sqrt{12}$;

b) $a=\sqrt{48}-\sqrt{108}+\sqrt{192}-\sqrt{243}+\sqrt{147}$ și $b=\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{180}-\sqrt{320}+\sqrt{125}$;

c) $a=\sqrt{32}-\sqrt{72}+\sqrt{128}-\sqrt{162}+\sqrt{50}$ și $b=\sqrt{150}-\sqrt{384}+\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{96}$.

30. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+4y-3}{3}-\dfrac{x-y+2}{2}=-9 \\ \dfrac{2x-y+3}{2}-\dfrac{x-3y+5}{3}=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y+9}{3}-\dfrac{2x+3y-5}{4}=2 \\ \dfrac{4x-3y-5}{2}-\dfrac{x-3y-1}{3}=3 \end{cases}$.

B.

1. Calculați:

a) $3\sqrt{5}:10^{-1}-\dfrac{60}{\sqrt{5}}+\sqrt{720}-5^{-1}\cdot\sqrt{4500}$; b) $6^{-1}\cdot\sqrt{1620}+3\sqrt{80}-\sqrt{180}:2^{-1}-\dfrac{90}{\sqrt{5}}$;

c) $4^{-1}:\dfrac{1}{\sqrt{972}}+\sqrt{6}\left(\dfrac{20}{\sqrt{32}}-\sqrt{18}\right)+2\sqrt{75}-\sqrt{108}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{32}\left(2\sqrt{75}-\sqrt{108}\right)-\sqrt{27}\left(\sqrt{242}-\sqrt{128}\right)$;

b) $\sqrt{27}\left(4\sqrt{32}-\sqrt{128}\right)-\sqrt{32}\left(\sqrt{363}-\sqrt{147}\right)$;

c) $3\left(\sqrt{250}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{320}\right)+4\left(\sqrt{640}-\sqrt{45}\cdot\sqrt{128}\right)$.

3. Efectuați calculele:

a) $3\sqrt{48}\left(\sqrt{450}-\sqrt{50}-\sqrt{32}\right)$; b) $3\sqrt{32}\left(\sqrt{432}-2\sqrt{75}-\sqrt{48}\right)$;

c) $\sqrt{72}\left(5\sqrt{12}-7\sqrt{48}+6\sqrt{27}-3\sqrt{75}\right)$; d) $3\sqrt{300}\left(5\sqrt{18}+6\sqrt{32}-7\sqrt{8}-4\sqrt{50}\right)$.

4. Efectuați calculele:

a) $5\sqrt{2}+2\left(8\sqrt{2}-6\sqrt{2}\right)-\sqrt{98}$; b) $3\sqrt{5}+3\left(9\sqrt{5}-7\sqrt{5}\right)-4\sqrt{45}$;

c) $8\left(3\sqrt{6}-4\sqrt{6}\right)-5\left(8\sqrt{6}-12\sqrt{6}\right)$; d) $6\left(6\sqrt{3}-7\sqrt{3}\right)+2\left(12\sqrt{3}-8\sqrt{3}\right)$;

e) $3\left(\sqrt{20}-\sqrt{5}\right)+2\left(2\sqrt{80}-3\sqrt{20}\right)-4\sqrt{5}$;

f) $5\left(\sqrt{54}-\sqrt{6}\right)-4\left(\sqrt{216}-\sqrt{150}\right)+\sqrt{216}$.

5. Calculați $a\cdot b$, dacă:

a) $a=3\sqrt{32}-4\sqrt{27}-5\sqrt{72}+6\sqrt{108}$ și $b=2\sqrt{243}+5\sqrt{50}-2\sqrt{75}-11\sqrt{8}$;

b) $a=\sqrt{32}-\sqrt{72}+\sqrt{128}-\sqrt{162}+\sqrt{98}$ și $b=\sqrt{80}-\sqrt{125}+\sqrt{245}-\sqrt{405}+\sqrt{180}$;

c) $a=\sqrt{48}-\sqrt{108}+\sqrt{192}-\sqrt{243}+\sqrt{75}$ și $b=\sqrt{216}-\sqrt{486}+\sqrt{96}-\sqrt{54}+\sqrt{150}$.

6. Calculați produsul $a\cdot b$ și raportul $\dfrac{a}{b}$ pentru următoarele numere:

a) $a=\sqrt{75}-\sqrt{32}+\sqrt{162}-\sqrt{147}$ și $b=\sqrt{200}-\sqrt{108}+\sqrt{192}-\sqrt{50}$;

b) $a=5\sqrt{12}-8\sqrt{27}+6\sqrt{48}-9\sqrt{75}+7\sqrt{108}$ și
$b=4\sqrt{24}-9\sqrt{54}+6\sqrt{216}-6\sqrt{294}+4\sqrt{150}$;

c) $a=\sqrt{27}\left(\sqrt{150}-\sqrt{162}-\sqrt{294}+\sqrt{242}\right)$ și $b=\sqrt{18}\left(\sqrt{486}-\sqrt{98}+\sqrt{200}-\sqrt{216}\right)$.

A.

1. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ avem $AB = 15$ cm și $BD = 9$ cm. Calculați:

a) perimetrul și aria triunghiului ABC;

b) valoarea raportului $\dfrac{\mathcal{A}_{ADB}}{\mathcal{A}_{CDA}}$;

c) cât la sută reprezintă aria triunghiului ADB din aria triunghiului ACD.

2. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ avem $AC = 60$ cm și $AD = 36$ cm. Calculați:

a) perimetrul și aria triunghiului ABC;

b) cât la sută reprezintă aria triunghiului ACD din aria triunghiului ABC.

3. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, cu $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ avem $BD = 36$ cm și $CD = 64$ cm. Calculați:

a) perimetrul și aria triunghiului ABC;

b) cât la sută reprezintă aria triunghiului ABD din aria triunghiului ABC.

4. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $\sphericalangle C = 60°$, $AB = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = AD = 12\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) lungimea bazei CD a trapezului;

b) lungimile diagonalelor trapezului, AC și, respectiv, BD;

c) distanța de la punctul C la dreapta BD.

5. În trapezul $ABCD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, iar bazele CD și AB sunt proporționale cu numerele 4 și, respectiv, 6. Știind că $AC \perp BC$, iar $AD = 12\sqrt{2}$ cm, calculați:

a) lungimile bazelor AB și CD;

b) aria trapezului $ABCD$;

c) lungimile diagonalelor trapezului, AC și BD.

6. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, având diagonalele perpendiculare. Știind că $AB = 12$ cm, iar $CD = 28$ cm, calculați:

a) aria trapezului;

b) perimetrul trapezului;

c) lungimile diagonalelor trapezului, AC și BD.

7. Triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, are cateta $AB = 24\sqrt{3}$ cm, iar unghiul dintre înălțimea și mediana corespunzătoare ipotenuzei are măsura de 30°. Știind că $AB < AC$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ și $M \in (BC)$ astfel încât $BM \equiv CM$, calculați:

a) perimetrul triunghiului; b) aria triunghiului.

8. În dreptunghiul $ABCD$, $AD < AB$, $AM \perp BD$, $M \in (BD)$ și $AM \cap CD = \{N\}$. Dacă $AD = 12$ cm și $BM = 18$ cm, calculați:

a) lungimea diagonalei BD; b) lungimea segmentului MN;

c) aria patrulaterului $BCNM$.

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută

1. a) 2; b) 4; c) –4; d) 2; e) 3; f) –4; g) –4; h) –4; i) 4; j) 3; k) 4; l) 4; m) 6; n) –3; o) –4; p) 6. **2.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{5\}$; c) $S = \{-4\}$; d) $S = \{-6\}$; e) $S = \{6\}$; f) $S = \{-6\}$; g) $S = \{4\}$; h) $S = \{5\}$; i) $S = \{-7\}$; j) $S = \{5\}$; k) $S = \{-7\}$; l) $S = \{-9\}$; m) $S = \{7\}$; n) $S = \{-11\}$; o) $S = \{-5\}$; p) $S = \{7\}$. **3.** a) 3; b) 7; c) –20; d) 3; e) 6; f) –6; g) 5; h) –4; i) 2; j) 8; k) 7; l) 10; m) 3; n) –5,4; o) 4; p) $-\frac{1}{2}$; r) $-\frac{3}{4}$; s) 3. **4.** a) $S = \{3\}$, da; b) $S = \{6\}$, da; c) $S = \{-7\}$, da; d) $S = \{-10\}$, da; e) $S = \{1\}$, da; f) $S = \{6\}$, da. **5.** a) 5; b) –5; c) –12; d) $\frac{3}{2}$; e) 3. **6.** a) 7; b) –2; c) –1; d) 4; e) –3; f) 1; g) 1; h) –1. **7.** a) –2; b) –9; c) –1; d) –3; e) –1. **8.** a) –25; b) –3; c) –1; d) 7; e) 7; f) –13; g) –1; h) –14; i) 4; j) 18; k) –4; l) $11\frac{1}{2}$; m) 5; n) 1; o) –3; p) 7; r) –13; s) 5. **9.** a) 2; b) –3; c) 5; d) 4; e) 6; f) 2; g) 9. **10.** a) –1; b) 21; c) 2; d) 7; e) 3; f) 1; g) –3; h) –13; i) 7; j) 5; k) 3; l) 8; m) 1; n) 4; o) 7. **11.** a) 2; b) –2; c) –3; d) 3; e) 1; f) 8; g) 13; h) 3; i) –4; j) –3; k) 10; l) 3. **12.** a) 3; b) 5; c) 6; d) 6; e) 4. **13.** a) 19; b) 2; c) –7; d) 4; e) 1; f) 3; g) 2; h) 3; i) –6; j) –1. **14.** a) 2; b) $-\frac{4}{3}$; c) –7; d) 1; e) 2; f) 3; g) –6; h) –1. **15.** a) –9; b) –2; c) 2; d) 20; e) 2; f) –3; g) 5. **16.** a) 1; b) –3; c) –5; d) 1; e) 1; f) 2. **17.** a) –2; b) 11; c) $\frac{10}{13}$; d) –2; e) –1; f) 1. **18.** a) 5; b) $\frac{31}{4}$; c) 2; d) $\frac{4}{5}$. **19.** a) $\frac{4}{3}$; b) –2; c) $-\frac{1}{5}$; d) 5; e) $\frac{31}{4}$; f) $-\frac{15}{32}$. **20.** a) 2; b) $2-\sqrt{2}$; c) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{5}$; e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; f) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; g) $-\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **21.** a) $\frac{3\left(1-2\sqrt{2}\right)}{7}$; b) $3\sqrt{3}$; c) –1; d) 5; e) $-\frac{5\sqrt{3}+6}{13}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; h) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; i) $\sqrt{3}$; j) $2\sqrt{3}-2$; k) $\frac{3\sqrt{5}+7}{2}$. **22.** a) –3; b) 10; c) 4; d) 8; e) –17; f) –5. **23.** a) 5; b) 2; c) 6; d) $\frac{1}{3}$; e) –2; f) 13; g) 29; h) 10; i) 12; j) $\frac{2}{3}$; k) 6. **24.** a) –25; b) $-\frac{3}{2}$; c) –6; d) 8; e) 5; f) –2; g) 5; h) 4; i) 8; j) –12; k) –4. **25.** a) 9; b) 2; c) 22; d) 19; e) –3; f) –1; g) 7; h) –7; i) 1. **26.** a) 5; b) 1; c) 11; d) 3; e) 1; f) 3; g) 2; h) –1; i) –3; j) 3. **27.** a) 1; b) $-\frac{13}{28}$; c) 2; d) 1. **28.** a) $\frac{2}{3}$; b) 1; c) 1. **29.** a) $x \in \{-1; 7\}$; b) $x \in \{-7; 3\}$; c) $x \in \{-2; 3\}$; d) $x \in \{-5; 4\}$; e) $x \in \{-6; 1\}$; f) $x \in \{-3; 6\}$. **30.** $x \in \{-2; 8\}$. **31.** a) $x \in \{-3; 3\}$; b) $x \in \{-5; 5\}$; c) $x \in \{-1; 1\}$; d) $x \in \{-5; 5\}$;

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

1. Raportul a două segmente. Teorema lui Thales

1.1. Raportul a două segmente

1. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{MN}{PQ}=1$; $\frac{PQ}{MN}=1$. **3.** $\frac{19}{6}$. **4.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 2; d) $\frac{1}{2}$; e) 2. **5.** a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{3}{5}$. **6.** a) $A-C-B$: $AC = 4$ cm; b) $A-B-C$: $AC = 60$ cm. **7.** $AE = 9$ cm; $EB = 27$ cm; $AF = 9$ cm; $FB = 27$ cm. **8.** a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{5}{9}$; c) $\frac{9}{5}$; d) $\frac{4}{9}$. **9.** $MA = 16$ cm; $MB = 32$ cm. **10.** $\mathscr{P} = 105$ cm. **11.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{13}{4}$; c) $\frac{1}{10}$; d) $\frac{5}{8}$. **12.** a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{14}{15}$; d) $\frac{4}{15}$; e) $\frac{7}{15}$; f) $\frac{4}{7}$. **13.** a) $\frac{DE}{AB}=\frac{1}{2}$ și $\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DE}{AB}=\frac{CD}{BC}$, unde $AB = 16$ cm; $BC = 64$ cm; $CD = 32$ cm; $DE = 8$ cm; b) $AB = 2$ cm; $BC = 30$ cm și $\frac{CD}{DE}=15$; cum $\frac{BC}{AB}=15 \Rightarrow \frac{BC}{AB}=\frac{CD}{DE}$; c) $AB = \frac{8}{3}$ dm; $BC = \frac{2}{3}$ dm; $CD = 20\%DE \Rightarrow \frac{CD}{DE}=\frac{1}{5}$ și $\frac{BC}{AB}=\frac{1}{4}$ nu sunt proporționale; d) $\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$ și $\frac{CD}{DE}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BC}{AB}=\frac{CD}{DE}$. **14.** a) *I.* $P \in AB$; $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{7} \Rightarrow \frac{AP}{2}=\frac{PB}{7}=k \Rightarrow AP = 2k$; $PB = 7k$; $AP + PB = AB \Rightarrow 9k = 135 \Rightarrow k = 15 \Rightarrow AP = 30$ cm; $PB = 105$ cm; *II.* $P \in AB$ astfel încât $A \in PB \Rightarrow PB - PA = AB \Rightarrow 5k = 135 \Rightarrow k = 27 \Rightarrow AP = 54$ cm; $PB = 189$ cm; b) $\frac{AP}{PB}=\frac{5}{4}$; *I.* $P \in AB \Rightarrow \frac{AP}{5}=\frac{PB}{4}=k \Rightarrow AP = 5k$; $PB = 4k$; $AP + PB = AB \Rightarrow 9k = 135 \Rightarrow k = 15 \Rightarrow AP = 75$ cm; $PB = 60$ cm; *II.* $P \in AB$ astfel încât $B \in AP \Rightarrow AB = PA - PB \Rightarrow k = 135$; $AP = 675$ cm; $PB = 540$ cm. **15.** $BM \parallel DD' \parallel EE' \parallel FF'$ și $BD = DE = EF = FC \Rightarrow MD' = D'E' = E'F' = F'C = 16$ cm (conf. Paralele echidistante). În ΔBCM: EE' este linie mijlocie $\Rightarrow EE' = \frac{BM}{2} = 12$ cm; în $\Delta CEE'$: FF' este linie mijlocie $\Rightarrow FF' = \frac{EE'}{2} = 6$ cm; în trapezul $BME'E$: DD' este linie mijlocie: $DD' = \frac{EE'+BM}{2} \Rightarrow DD' = 18$ cm; $ME' = 32$ cm; $MF' = D'C = 48$ cm. **16.** $\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}BE \parallel AD\\ CF \parallel AD\end{array}\right\} \Rightarrow BE \parallel CF\\ \text{cum } BD \equiv CD\end{array}\right\} \Rightarrow AD$ este linie mijlocie $\Rightarrow A] \equiv AF$.

17. În ΔABC: ED – linie mijlocie, deci: $ED \parallel BC$ (1) și $ED = \frac{BC}{2}$ (2). În ΔGBC: FH – linie mijlocie, deci $FH \parallel BC$ (3) și $FH = \frac{BC}{2}$ (4). $\left.\begin{array}{l}\text{Din (1) si (3)} \Rightarrow ED \parallel FH\\ \text{Din (2) si (4)} \Rightarrow ED = FH\end{array}\right\} \Rightarrow EFHD$ – paralelogram. **18.** $OA = OB = a$; Avem $AB = BC = a$, $AC = CD = 2a$, $BD = DE = 3a$, $CE = EF = 5a$; $\frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$; $\frac{BF}{AF} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{13}{12} > \frac{11}{12}$ (A) (*fig. 1*).

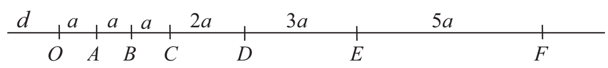


Fig. 1

Cuprins