Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene, Andreea Roșca
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu, Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Ed. a 12-a, reviz. – Pitești : Paralela 45, 2023
2 vol.
ISBN 978-973-47-3887-8
Partea 2. – 2023. – ISBN 978-973-47-3919-6

I. Negrilă, Maria

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tipărit la R.A. „Monitorul Oficial"

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VIII-a

partea a II-a

ediția a XII-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

Algebră

Capitolul I
Calcul algebric în $\mathbb{R}$

PP **Competenţe specifice**

- C_1. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- C_2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- C_3. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat şi a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor
- C_4. Exprimarea matematică a unor situaţii concrete prin calcul algebric
- C_5. Interpretarea unei situaţii date utilizând calcul algebric
- C_6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuaţiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

PE-PP 1. Operaţii cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere

PE-PP 1.1. Adunarea şi scăderea

Suma (**diferența**) a două **rapoarte** algebrice este tot un **raport** algebric. Operația de adunare (scădere) a două rapoarte algebrice se poate face în două situații:

a) dacă ambele rapoarte au **același numitor**, suma lor este un raport algebric care are ca numitor numitorul comun al celor două rapoarte și ca numărător suma (diferența) numărătorilor celor două rapoarte;

b) dacă cele două rapoarte au **numitori diferiți**, se amplifică, aducându-se la același numitor și se adună (se scad) conform regulii de mai sus.

Observaţie:

Operația de adunare (scădere) a rapoartelor algebrice are aceleași proprietăți ca operația de adunare (scădere) a fracțiilor ordinare.

Exemple:

a) $\dfrac{5x-3}{4}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2+12}{4}=\dfrac{5x-3+x+x^2+12}{4}=\dfrac{x^2+6x+9}{4}=\dfrac{(x+3)^2}{4}$;

b) $\dfrac{2x+7}{3x}+\dfrac{x-3}{2x^2}+\dfrac{4x+5}{6}=\dfrac{2x(2x+7)}{6x^2}+\dfrac{3(x-3)}{6x^2}+\dfrac{x^2(4x+5)}{6x^2}=\dfrac{4x^3+9x^2+17x-9}{6x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Efectuați:

a) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}$; b) $\dfrac{3x+2}{7}+\dfrac{4x+5}{7}$; c) $\dfrac{2-3x}{11}+\dfrac{9-8x}{11}$;

d) $\dfrac{4x+6}{3}+\dfrac{x+3}{3}$; e) $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{3x+4}{2}+\dfrac{4x+7}{2}$; f) $\dfrac{x+5}{3}+\dfrac{2-7x}{2}+\dfrac{2x-4}{5}$.

2. Efectuați calculele:

a) $\dfrac{7x-6}{x-2}+\dfrac{2-5x}{x-2}$; b) $\dfrac{17x+9}{x+1}+\dfrac{8}{x+1}$;

c) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{2x-14}{x-3}$; d) $\dfrac{6x}{3x-2}+\dfrac{5-3x}{3x-2}-\dfrac{7}{3x-2}$.

3. Efectuați calculele:

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x+2}{3x}-\dfrac{5x^2+4}{6x^2}$; b) $\dfrac{2x}{x^2+x}+\dfrac{2}{x^2+x}$; c) $\dfrac{2x+3}{x^2-1}+\dfrac{3x+2}{x^2-1}$;

d) $\dfrac{x(x-1)}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2-4}$; e) $\dfrac{x^2}{x^2-2x}+\dfrac{2-3x}{x^2-2x}$; f) $\dfrac{x^2+3}{x^2+2x-3}+\dfrac{4x}{x^2+2x-3}$;

g) $\dfrac{x(x-3)}{x^2-16}+\dfrac{2x-5}{x^2-16}-\dfrac{11-x}{x^2-16}$.

PE Aplicare și exersare **

4. Efectuați:

a) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{4}{x^2-1}$; b) $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{16}{x^2-4}$;

c) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2}{x^2-4}$; d) $\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{x+10}{x^2-4}+\dfrac{3}{x-2}$;

e) $\dfrac{1-3x}{x^2-x}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{3x}$; f) $\dfrac{3x+1}{2x^2-6x}-\dfrac{x+2}{3x-9}+\dfrac{2x-1}{6x}$.

5. Calculați:

a) $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}-\dfrac{x-1}{x+2}$; b) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1-x}{x+1}$;

c) $\dfrac{2x+1}{x-2}+\dfrac{1-2x}{x+2}+\dfrac{x^2+16}{x^2-4}$; d) $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{5-x^2}{x^2+3x+2}$.

PE-PP

2. Ecuaţii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) este echivalentă cu ecuația

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\text{, adică:}$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \text{ sau } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Putem descompune membrul stâng în produs de factori numai dacă numărul $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$. Semnul acestui număr este același cu semnul numărătorului $b^2 - 4ac$. De aceea, numărul $b^2 - 4ac$ este numit **discriminantul ecuației**. El se notează, de obicei, cu litera grecească Δ (se citește „delta”).

Distingem trei cazuri:

1. $\Delta > 0$. În acest caz, ecuația are două soluții:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\text{, unde } \Delta = b^2 - 4ac;$$

2. $\Delta = 0$. În acest caz, ecuația are cele două soluții confundate: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

3. $\Delta < 0$. În acest caz, ecuația nu are nicio soluție reală.

Exemple:

1. Determinați numărul real a pentru care ecuația $(a + 1)x^2 + (2a + 3)x - a = 0$ are soluția $x = \frac{1}{3}$. Determinați cea de-a doua soluție pentru valoarea lui a determinată anterior.

Soluție: Dacă $x = \frac{1}{3}$, înlocuind în ecuație, se obține ecuația $\frac{a+1}{9} + \frac{2a+3}{3} - a = 0$, care are ca soluție $a = 5$. Prin înlocuirea lui a în ecuație se obține ecuația $6x^2 + 13x - 5 = 0$. Se calculează $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 289$, iar $\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17$. Atunci soluțiile ecuației sunt: $x_1 = \frac{-13-17}{12} = {}^{(6}\frac{-30}{12} = -\frac{5}{2}$ și $x_2 = \frac{-13+17}{12} = {}^{(4}\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

2. Rezolvați ecuația $\frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x+4}{x+1}$.

Soluție: Ecuația este definită pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Se înmulțește ecuația cu $(x^2 - 1)$ și se obține ecuația echivalentă $6 - 2(x + 1) = 2(x - 1)(x + 1) - (x + 4)(x - 1)$. Prin desfacerea parantezelor și trecerea termenilor în același membru se obține ecuația echivalentă $x^2 - x - 2 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ și, cum $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, rezultă doar soluția $x = 2$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Rezolvați ecuațiile:

a) $x(x + 7) = 0$;
b) $(x - 1)(x + 2) = 0$;
c) $(x - 3)(x + 4) = 0$;
d) $(x + 1)(x - 6) = 0$;
e) $(x + 3)(x - 2) = 0$;
f) $(2x - 1)(2x + 3) = 0$;
g) $(2x + 5)(5x + 2) = 0$;
h) $(3x - 8)(2x + 9) = 0$;
i) $(4x + 3)(7x - 2) = 0$.

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 + 3x = 0$;
b) $x^2 - 2x = 0$;
c) $3x^2 + 9x = 0$;
d) $4x^2 - 8x = 0$;
e) $6x^2 - x = 0$;
f) $-5x^2 + 8x = 0$;
g) $-0{,}6x^2 + 3{,}6x = 0$;
h) $-0{,}5x^2 - 2{,}5x = 0$;
i) $0{,}4x^2 - 2{,}4x = 0$.

3. Determinați mulțimea soluțiilor reale pentru fiecare dintre ecuațiile:

a) $x^2 - 1 = 0$;
b) $x^2 - 4 = 0$;
c) $4x^2 - 9 = 0$;
d) $25x^2 - 16 = 0$;
e) $64x^2 - 81 = 0$;
f) $36x^2 - 25 = 0$;
g) $5x^2 - 45 = 0$;
h) $3x^2 - 12 = 0$;
i) $6x^2 - 216 = 0$;
j) $x^2 + 4 = 0$;
k) $-x^2 - 16 = 0$;
l) $x^2 + 25 = 0$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$;
b) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
c) $x^2 + 5x - 14 = 0$;
d) $x^2 - 8x - 20 = 0$;
e) $x^2 + 4x - 12 = 0$;
f) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
g) $x^2 - 9x + 14 = 0$;
h) $x^2 - 10x + 16 = 0$;
i) $x^2 + 7x + 10 = 0$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
b) $x^2 + x - 6 = 0$;
c) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
d) $x^2 + x - 12 = 0$;
e) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
f) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
g) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
h) $x^2 + 2x - 24 = 0$;
i) $x^2 - 4x - 21 = 0$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x - 1)^2 - 4 = 0$;
b) $(x + 2)^2 - 9 = 0$;
c) $(x - 3)^2 - 16 = 0$;
d) $(x + 4)^2 - 25 = 0$;
e) $(x - 2)^2 - 100 = 0$;
f) $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 - 12 = 0$.

Capitolul II
Funcţii

PP Competenţe specifice

C1. Identificarea unor dependenţe funcţionale în diferite situaţii date

C2. Descrierea unor dependenţe funcţionale într-o situaţie dată, folosind diagrame, tabele sau formule

C3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcţii cu scopul caracterizării acestora

C4. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependenţe funcţionale

C5. Analizarea unor funcţii în context intra şi interdisciplinar

C6. Modelarea cu ajutorul funcţiilor a unor fenomene din viaţa reală

Fie A și B două mulțimi nevide. Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca *fiecărui* element din mulțimea A să-i corespundă *un singur* element din mulțimea B, spunem că am definit o funcție de la A la B.

Mulțimea A se numește **domeniu de definiție** al funcției, iar mulțimea B se numește **codomeniul** sau mulțimea în care funcția ia valori. În general, o funcție f definită pe A cu valori în mulțimea B va fi notată $\boldsymbol{f : A \to B}$. Citim „f definită pe A cu valori în B”. Funcțiile se notează de obicei cu f, g, h, … .

Fiind dată o funcție $f : A \to B$, dacă aceasta face ca elementului $a \in A$ să-i corespundă elementul $b \in B$, scriem $f(a) = b$ și spunem că b este valoarea funcției în a.

Legătura pe care o stabilește funcția între elementele $x \in A$ și valorile corespunzătoare $f(x)$ din B se numește **lege de corespondență**. O funcție se descrie prin trei componente:
- domeniul de definiție;
- codomeniul;
- legea de corespondență.

Legea de corespondență a unei funcții poate fi dată în mai multe moduri:

a) se poate descrie cu ajutorul **diagramelor**;

b) se poate exprima prin indicarea într-un **tabel** a valorilor corespunzătoare elementelor din domeniul de definiție;

c) se poate descrie cu ajutorul unei **formule** prin care se precizează valoarea $f(x)$ pentru oricare x din domeniul de definiție.

Fiind dată o funcție $f : A \to B$, mulțimea punctelor din plan având coordonatele (x, y), unde $x \in A$, iar $y = f(x)$, va fi numită **graficul funcției**. Această mulțime se scrie $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$.

Egalitatea $y = f(x)$, adevărată pentru oricare element $x \in A$, va fi numită **ecuația graficului** funcției f. Se obișnuiește să se noteze $y = f(x)$, $x \in A$.

Fie $f: A \to B$ o funcție. **Imaginea** (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\mathrm{Im}\, f \subset B$.

Se mai poate scrie și astfel:

$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in B \mid \text{există } x \in A, \text{ astfel încât } y = f(x)\}.$$

O funcție ale cărei domeniu de definiție și codomeniu sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere) se numește **funcție numerică**.

Două funcții $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Se notează $f = g$.

În general, o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descrisă de formula $f(x) = ax + b$ (unde a și b sunt numere reale) se numește **funcție liniară**. Reprezentarea geometrică a mulțimii grafic pentru o funcție liniară este o dreaptă.

Pentru a trasa graficul unei funcții liniare este suficient să dăm variabilei x două valori distincte.

Observaţii:

1. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = ax$, ale căror grafice conțin originea axelor de coordonate.

2. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = b$, ale căror grafice sunt drepte paralele cu axa Ox. Funcțiile de acest fel sunt numite funcții constante nenule.

3. Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = b = 0$, se obține o funcție $f(x) = 0$, al cărei grafic coincide cu axa Ox.

4. Uneori, pentru trasarea graficului unei funcții liniare este mai comod să se stabilească punctele în care graficul intersectează axele de coordonate.

$$G_f \cap Oy = A(0; f(0)) \Leftrightarrow G_f \cap Oy = A(0; b);\ G_f \cap Ox = B\left(-\frac{b}{a};\ 0\right).$$

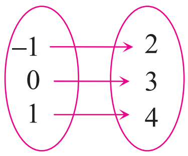
PE-PP 1. Funcţii definite pe mulţimi finite

Exemple:

1. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel funcția următoare:

$$f: \{-1, 0, 1\} \to \{2, 3, 4\},\ f(x) = x + 3.$$

Soluție: $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(0) = 0 + 3 = 3$, $f(1) = 1 + 3 = 4$.



x	-1	0	1
$f(x)$	2	3	4

2. Explicitați domeniul de definiție pentru funcția

$$f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x} \text{ și } A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 3\}.$$

Soluție: Cum $x \neq 0 \Rightarrow A = \{-1, 1, 2\}$.

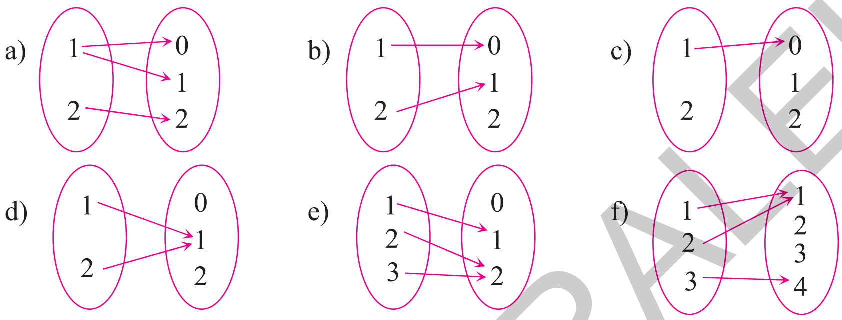
3. Fie funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 2$ și $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \le 2\}$. Determinați valoarea lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care punctul $B(1; -1)$ aparține graficului funcției.

Soluție: $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Dacă $B(1; -1) \in G_f \Rightarrow f(1) = -1$. Cum $f(1) = a + 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$.

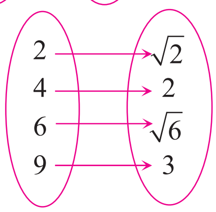
● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

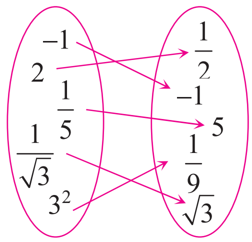
1. Precizați care dintre diagramele de mai jos definesc funcții:



2. Diagrama alăturată definește o funcție.
a) Precizați domeniul și codomeniul funcției.
b) Reprezentați printr-un tabel funcția definită de diagramă.
c) Stabiliți legea de corespondență printr-o formulă.



3. În diagrama alăturată este descrisă o funcție $f: A \to B$.
a) Precizați elementele mulțimilor A și B.
b) Realizați tabelul de valori al funcției f.
c) Descrieți corespondența $x \to f(x)$ printr-o formulă.



4. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel, funcțiile următoare:
a) $f: \{0, 2, 4\} \to \{0, 2, 4, 6\}, f(x) = x + 2$;
b) $g: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}, g(x) = x^2$.

5. Prețul unui kilogram de mere este 2 lei. Completați tabelul:

Cantitatea (kg)	3	4,5	7	10	13	35	96
Prețul total (lei)					26		

a) Stabiliți o formulă pentru corespondența realizată între elementele din tabel.
b) Realizați o diagramă corespunzătoare valorilor din tabel.
c) Definiți o funcție cu formula de la subpunctul a), stabilind domeniul și codomeniul acesteia, conform tabelului.

PE

Nume ______________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Fie funcția $f: \{-3, -2, -1, 0, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Im f este {..........................}.

(0,5p) **2.** Fie funcția $f: [-2; 5) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$. Dacă punctul $A(1; y) \in G_f$, atunci $y =$ ....

(0,5p) **3.** Fie funcția $f: [-3; 6] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$. Dacă punctul $A(x; -5) \in G_f$, atunci $x =$ .... .

(0,5p) **4.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}x + 3$. Ordonata punctului de intersecție a graficului funcției cu axa Oy este egală cu ....

(0,5p) **5.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 1$. Dacă punctul $M(-1; -1) \in G_f$, atunci $a =$ ....

(0,5p) **6.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3}x + 1$. Măsura unghiului format de axa absciselor cu graficul funcției este egală cu ....°.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă se dau punctele $A(2; 1)$ și $B(5; 5)$, atunci lungimea segmentului AB este de:

A. 4 B. 6 C. 5 D. 3,5

(0,5p) **2.** Fie $f: [-3; 4] \to \mathbb{R}, f(x) = ax - 2$. Dacă punctul $A(-3; -5) \in G_f$ și punctul $B(4; y) \in G_f$, atunci y este egal cu:

A. 3 B. 1 C. 2 D. –2

(0,5p) **3.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$. Aria triunghiului determinat de graficul funcției cu axele de coordonate este egală cu:

A. $\frac{4}{3}(u^2)$ B. $\frac{2}{3}(u^2)$ C. $\frac{1}{6}(u^2)$ D. $3\ (u^2)$

(0,5p) **4.** Funcția liniară al cărei grafic este determinat de punctele $A(1; -2)$ și $B(-1; 6)$ are forma:

A. $f(x) = -4x + 2$ B. $f(x) = 3x - 6$ C. $f(x) = 2x - 4$ D. $f(x) = x - 3$

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Rezolvați ecuația $f(x + 1) + f(x - 2) = f(x) + 5$.

(1p) **2.** Determinați valoarea reală a lui m pentru care punctele $A(1; 3)$, $B(-1; 7)$ și $C(m+1; 2m-5)$ sunt coliniare.

(1p) **3.** Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și reprezentați-o grafic, știind că îndeplinește condiția $f(x-1) = 3x - 8$, pentru orice x real.

(1p) **4.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 3$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Arătați că suma $S = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2013)$ este divizibilă cu 12.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

PE-PP 3. Elemente de statistică

Populația statistică este o mulțime definită de obiecte de aceeași natură. Acestea formează obiectul unei analize statistice.

Numărul tuturor indivizilor unei populații se numește **efectiv total**.

Caracteristica populației este trăsătura comună a tuturor indivizilor populației.

Elementele unei populații statistice se numesc **unități statistice** sau **indici**.

Se numește **frecvență absolută** a unei valori x a caracteristicii numărul de unități ale populației corespunzătoare acelei valori.

Media aritmetică simplă a n valori este dată de relația: $M_a = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$.

Media aritmetică ponderată a x_i de ponderi p_i, unde $1 \le i \le n$, este dată de relația:

$$M_p = \frac{X_1 \cdot p_1 + X_2 \cdot p_2 + ... + X_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}.$$

Mediana este acea valoare care împarte seria (ordonată crescător sau descrescător) în două părți egale.

Metoda de calcul al medianei:

1. se ordonează crescător sau descrescător elementele seriei;
2. se calculează valoarea mediană într-una dintre următoarele situații:
   – dacă seria are un număr impar de termeni, atunci $M_e = X_{\frac{n+1}{2}}$;
   – dacă seria are un număr par de termeni, atunci mediana este semisuma termenilor centrali de rang $\dfrac{n}{2}$ și $\dfrac{n}{2} + 1$, adică $M_e = \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

Exemplu: Fie seria de date $\{16, 25, 14, 33, 36, 43, 12\}$. Ordonăm crescător: $\{12, 14, 16, 25, 33, 36, 43\}$. $M_e = 25$, pentru că 25 se află pe locul $\dfrac{7+1}{2} = 4$. Pentru seria $\{16, 25, 14, 33, 36, 43, 12, 57\}$, ordonată crescător $\{12, 14, 16, 25, 33, 36, 43, 57\}$, $M_e = \dfrac{25+33}{2} = 29$.

Modulul (dominanta) reprezintă valoarea caracteristicii care are frecvența cea mai mare. Un set de date poate conține o singură valoare modală, mai multe valori modale (frecvența cea mai mare corespunde la două sau mai multe variabile) sau nu conține valori modale (toate variabilele au aceeași valoare de apariție).

Principalii **indicatori ai tendinței centrale** sunt **valoarea medie**, **valoarea mediană** și **valoarea dominantă** (D) sau modulul.

Exemplu: Notele obținute de șapte elevi la teza la matematică sunt 9, 5, 7, 6, 8, 10, 9. Calculați principalii indicatori ai tendinței centrale.

Soluție: Seria ordonată crescător este $\{5, 6, 7, 8, 9, 9, 10\}$.

$$M_a = \frac{5+6+7+8+9+9+10}{7} = 7{,}71.$$

$M_e = 8$ (se observă că trei elevi au luat note mai mici decât 8 și trei elevi au luat note mai mari decât 8).

$D = 9$ (pentru că apare de două ori).

Reprezentarea grafică a unei serii statistice se realizează prin diagrame.

Amplitudinea unei caracteristici este $A = X_{\max} - X_{\min}$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Notele obținute de elevii unei clase la o lucrare de verificare la matematică sunt trecute în tabelul următor:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de note	3	4	6	6	3	2	1

Calculați media clasei la această lucrare.

2. Calculați media aritmetică ponderată a numerelor 1, 2, 3, 4 și 5 cu ponderile 1, 2, 3, 4 și, respectiv, 5.

3. Șase muncitori au avut într-o lună următoarele venituri brute: 2160, 1890, 2200, 2250, 3150, 2600. Determinați salariul mediu pe muncitor în acea lună.

4. Măsurându-se greutatea corporală a unui grup de șapte elevi, s-au obținut următoarele date în kilograme: 66, 56, 63, 53, 57, 60, 65.

a) Calculați greutatea medie a unui elev din grupul considerat.
b) Calculați amplitudinea valorilor măsurate.
c) Calculați mediana valorilor înregistrate prin aceste măsurători.

5. Măsurându-se înălțimea unui grup de opt fete, s-au înregistrat următoarele valori în centimetri: 164, 162, 168, 170, 158, 156, 155, 163.

a) Calculați înălțimea medie a unei fete din acest grup.
b) Calculați amplitudinea valorilor măsurate.
c) Calculați mediana valorilor înregistrate prin aceste măsurători.

6. În tabelul următor sunt redate notele obținute de elevii unei clase la o lucrare de verificare la fizică.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de note	2	2	4	5	4	4	4

a) Stabiliți câți elevi au note mai mici decât 6 și calculați ce procent reprezintă din total.
b) Câți elevi au note între 6 și 8 (procent)?
c) Câți elevi au note mai mari sau egale cu 8 (procent)?
d) Reprezentați aceste date printr-o diagramă sub forma unui disc, cu rezultatele subpunctelor a), b), c) indicate prin sectoare de cerc.
e) Calculați media clasei la această lucrare.
f) Determinați mediana valorilor înregistrate.

7. Distribuția familiilor într-un bloc după numărul copiilor, la un moment dat, este reprezentată în tabelul următor:

Numărul de copii	0	1	2	3	4	5	6
Numărul de familii	4	15	8	6	5	1	1

Calculați media, mediana și dominanta.

Capitolul III
Teme pentru recapitularea finală în vederea Evaluării Naţionale

PE-PP

1. Numere naturale. Puteri cu exponent număr natural. Divizibilitate

1. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că este îndeplinită condiția:
$$\overline{ab} + 5a = 3(a + b + c).$$
2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că este îndeplinită condiția:
$$\overline{abc} - \overline{ab} = 13c.$$
3. Determinați numerele naturale a și b, știind că numărul a este prim și $a + 6b = 56$.

4. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, știind că:
$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 444.$$
5. Determinați numărul natural de trei cifre $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că:
$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}.$$
6. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, cu $a > b > c$, știind că este îndeplinită condiția $\overline{abc} - \overline{bc} = 40(b + c + 5)$.

7. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, scris în baza 10, cu $a \neq b$, știind că:
$$\overline{ab} - \overline{ba} = a(b - 1).$$
8. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care are loc egalitatea:
$$\overline{abc} = 3\overline{cba} + a + b + c.$$
9. Determinați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$, știind că sunt divizibile cu 5 și suma cifrelor lor este egală cu 20.

10. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că $\overline{ba} + 5(2a + 3b) = 202$.

11. Calculați suma numerelor naturale $\overline{ab}$ pentru care este îndeplinită condiția:
$$\overline{ab} = 2a + 5b.$$
12. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$, $a \neq b$, care îndeplinesc condiția $\overline{ab} + \overline{ba} = 66$.

13. Arătați că $37 \mid A$, unde $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

14. Arătați că numărul $a = 2 \cdot 3^{12n+5} + 4 \cdot 3^{12n+4} - 14 \cdot 3^{12n+3}$ este divizibil cu 48, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Arătați că numărul $a = 3^{2n+2} \cdot 2^{n+3} + 3^{2n+1} \cdot 2^{n+4} - 9^n \cdot 2^{n+5}$ este divizibil cu 88, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Arătați că numărul $a = 4 \cdot 5^{6n+4} + 6 \cdot 5^{6n+6} - 2 \cdot 5^{6n+5}$ este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Numere reale

1. Determinați $x \in \mathbb{N}$ din proporția $\dfrac{\sqrt{48}}{4} = \dfrac{x+1}{\sqrt{3}}$. Pentru x determinat anterior, comparați numerele x^{75} și 3^{50}.

2. Determinați-l pe x din proporțiile:

a) $\dfrac{x}{2\sqrt{3}+3} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{13+\sqrt{1296}}}{x} = \dfrac{3^3-3^2-3-3^0}{\sqrt{23+\sqrt{1681}}}$.

3. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor x și y, în fiecare dintre cazurile:

a) $x = \sqrt{(5+3\sqrt{3})^2}$ și $y = |5-3\sqrt{3}|$; b) $x = |3-2\sqrt{3}|$ și $y = \sqrt{21+12\sqrt{3}}$;

c) $x = \dfrac{4}{6-\sqrt{32}} - \sqrt{8} - 5$ și $y = \dfrac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} + \sqrt{6} - 1$;

d) $x = \dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$ și $y = \dfrac{6(3+\sqrt{3})}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}$.

4. Dacă $a = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+2)$ și $b = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-2)$, calculați media geometrică a celor două numere.

5. Se consideră numerele:

$$a = \left[\frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{5}{\sqrt{75}} + \left(\frac{4}{\sqrt{192}} - \frac{12}{\sqrt{108}}\right) : 2\right] \cdot \frac{12}{\sqrt{6}} \text{ și } b = \left(\frac{3}{\sqrt{12}} - \frac{2}{\sqrt{75}} + \frac{3}{2\sqrt{48}} - \frac{21}{5\sqrt{27}}\right) : \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

a) Calculați valorile reale ale numerelor a și b.
b) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

6. Se consideră numerele:

$$a = 2\sqrt{6}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) + \frac{18}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \text{ și } b = \frac{10}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}} - 3\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2} + 1.$$

Calculați $(a-b)^{2019}$.

7. Dacă $x = \sqrt{3-\sqrt{3}}$ și $y = \sqrt{3+\sqrt{3}}$, arătați că $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \sqrt{6}$.

8. Se consideră numerele reale:

$$a = \frac{1}{2\sqrt{3}+3} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right) : \frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{12}} + \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} \text{ și } b = \sqrt{3} - \frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$$

a) Calculați valorile numerelor reale a și b.
b) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

9. Calculați produsul $a \cdot b$, unde:

$$a = \left(\frac{12}{\sqrt{3}} - \sqrt{108} + \sqrt{147}\right) \cdot \frac{12}{5\sqrt{6}} \text{ și } b = \left(\frac{16}{\sqrt{2}} + \sqrt{72} - \sqrt{162}\right) \cdot \frac{3}{10\sqrt{6}}.$$

29. Un bibliotecar observă că, dacă așază câte 5 cărți pe un raft, pe ultimul raft îi rămân doar 4 cărți. Așezând același număr de cărți câte 6 pe raft, îi rămâne un raft cu două cărți și un raft gol. Câte cărți sunt în bibliotecă?

30. Numărul fetelor dintr-o clasă este de 6 ori mai mare decât numărul băieților. Dacă ar pleca 10 fete și ar veni 5 băieți, atunci numărul băieților ar fi jumătate din numărul fetelor. Câți elevi sunt în clasă?

31. S-a constatat că într-o zi, la o clasă a VIII-a, numărul elevilor absenți reprezenta $\frac{1}{7}$ din numărul celor prezenți. A doua zi, numărul elevilor absenți a crescut cu 2, fiind egal, astfel, cu $\frac{3}{13}$ din numărul elevilor prezenți în clasă. Câți elevi sunt în acea clasă?

PE-PP 8. Inecuaţii

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $3x + 7 \leq 2(x + 1)$; b) $5x + 11 \leq 3(x + 7)$; c) $2x + 5 \geq 3(x + 3)$;
d) $4x + 9 < 5(x + 1)$; e) $2(x + 3) \geq 4x + 10$; f) $5(x + 1) > 6x + 13$.

2. Rezolvați inecuațiile în $\mathbb{R}$:

a) $2(x + 5) < 3(x + 1) + 5$; b) $5(x - 4) < 3(x + 2)$; c) $5x + 7 < 3(x + 3) + 2$;
d) $4(x + 2) \geq 2x + 4$; e) $2\sqrt{3}x < \sqrt{27}x - 6$; f) $\sqrt{18}x - 4 < \sqrt{72}x + 2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $\frac{3(x+1)-5}{7} > 1$; b) $\frac{2(x-5)+11}{3} < 3$; c) $\frac{3(x-4)-4}{8} \leq 1$;
d) $\frac{2x+7}{-3} > 5$; e) $\frac{4x+9}{-5} < 3$; f) $\frac{3x+5}{-4} \geq 1$.

4. Rezolvaţi inecuaţiile în $\mathbb{R}$:

a) $\frac{8-3x+2(x+1)}{-2} < 3$; b) $\frac{3(x-2)-2(x-4)}{-2} \leq 1$;
c) $\frac{2(3-x)+4x-7}{-2} < 1$; d) $\frac{2-5x+3(2x+1)}{-4} < 2$.

5. Rezolvați inecuațiile în $\mathbb{R}$:

a) $6x + 2(9 - 2x) < x + 23 - 3(x - 5)$; b) $3(3x - 8) \leq 6(2x - 1) - 5(5x + 8)$;
c) $15(x + 2) - 4(2x + 3) \geq 6(2x + 7) - 5(x + 8)$; d) $8(2x + 9) - 3x < 5(2 - 3x) + 90$;
e) $4(x - 2) - 3(2x + 13) \geq 37 - 6(12 + x) + 5(x + 8)$.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $(x + 1)^2 \geq x(x + 3)$; b) $(x - 2)^2 \geq x(x - 5)$;
c) $(x + 2)^2 > x(x - 1) - 6$; d) $(x - 3)^2 < x(x - 5) + 11$;
e) $(2x + 1)^2 < 4x(x - 1) - 7$; f) $9x(x + 1) \leq (3x - 1)^2 + 29$;
g) $(x + 4)^2 > x(x + 7) + 13$; h) $(x - 5)^2 \leq x(x - 9) + 21$.

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

✹ TESTUL 1 ✹

Subiectul I

1. Rezultatul calculului $3^2 \cdot 7 - 5 \cdot 2^2$ este … .

2. Media geometrică a numerelor 8 și 18 este … .

3. Cei 9 băieți dintr-o clasă reprezintă 30% din elevii clasei. Numărul de elevi din clasă este egal cu … .

4. Valoarea reală a lui x din proporția $\frac{x}{45} = \frac{36}{60}$ este … .

5. Rezultatul calculului $2\sqrt{3}(\sqrt{27} - \sqrt{75})$ este … .

6. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 15\}$. Probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să fie număr prim este egală cu … .

Subiectul al II-lea

1. După o reducere de 15%, prețul unui obiect este de 119 lei. Care ar fi fost prețul obiectului, dacă acesta nu s-ar fi redus, ci s-ar fi majorat cu 15%?

2. Rezolvați ecuația $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(x+3)(x-3)}{3} = \frac{2x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{6}$.

3. Calculați media geometrică a numerelor $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ și $b = 2-\sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Subiectul al III-lea

1. a) Descompuneți în produs de factori ireductibili: $x^2 + 5x + 6$ și $x^2 + 2x - 8$.

b) Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, -2, 2, 4\}$, aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{x^2-4}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2+6x+9}{x^2+2x-8} - \frac{x+1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16}.$$

c) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 4$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = bx + 1$.

a) Determinați numerele reale a și b, știind că punctul $A(1; -2)$ este punctul de intersecție a graficelor celor două funcții.

b) Pentru $a = 2$ și $b = -3$, reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.

c) Dacă $G_f \cap Ox = \{B\}$ și $G_g \cap Ox = \{C\}$, calculați aria triunghiului ABC.

Geometrie

Capitolul I
Arii şi volume

PP Competenţe specifice

C_1. Identificarea corpurilor geometrice şi a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

C_2. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

C_3. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

C_4. Utilizarea unor termeni şi expresii specifice pentru descrierea proprietăţilor figurilor şi corpurilor geometrice

C_5. Analizarea condiţiilor necesare pentru ca o configuraţie geometrică spaţială să verifice anumite cerinţe date

C_6. Interpretarea informaţiilor referitoare la distanţe, arii şi volume după modelarea printr-o configuraţie spaţială a unei situaţii date de cotidian

PE-PP 1. Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. O prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are la bază un pătrat de latură $AB = 4$ cm, iar înălțimea $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. Aflați:

a) măsura unghiului format de muchiile CC' și AB;

b) măsura unghiului format de diagonala BC' cu latura AD;

c) măsura unghiului format de diagonala AC cu planul (ADD').

2. Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are la bază un pătrat cu latura $AB = 6\sqrt{2}$ cm și diagonala $BD' = 15$ cm. Aflați:

a) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul (ABC);

b) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu fața (ADD').

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{3}$ cm și înălțimea $AA' = 6$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (ABC);

b) măsura unghiului format de diagonala $D'C$ cu planul (ADD');

c) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (ADD') și (BDD').

4. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm și diagonala $BD' = 25$ cm. Aflați:

a) distanța de la punctul C la diagonala AC';

b) sinusul unghiului format de diagonala AC' cu planul (BCC');

c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(C'AB)$ și (ABC).

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 6$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul C' la diagonala BD;

b) măsura unghiului format de diagonalele BC' și AB';

c) distanța de la C la planul $(C'BD)$.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 12$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD');

b) sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul (ABC);

c) distanța de la A la diagonala BD'.

7. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $AA' = 6$ cm. Calculați:

a) distanța de la A' la latura BC;

b) măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ și (ABC).

8. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei $AB = 18$ cm și înălțimea $VO = 3\sqrt{6}$ cm. Calculați:

a) sinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;

b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAD), unde D este mijlocul laturii BC;

c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de o față laterală cu planul bazei.

9. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are $AB = VA = 12$ cm. Calculați:

a) măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;

b) măsura unghiului format de muchia VB cu planul (VAC);

c) măsura unghiului format de latura BC cu planul (VAC).

10. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 20$ cm și măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei egală cu $45°$.

a) Calculați măsura unghiului diedru format de planele (VAC) și (VBD).

b) Calculați distanța de la B la planul (VAC).

c) Dacă $P \in VO$, astfel încât distanța de la P la planul (ABC) este egală cu distanța de la P la fața (VBC), aflați lungimea segmentului PO.

PE Aplicare și exersare **

11. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă regulată dreaptă cu latura bazei $AB = 6\sqrt{2}$ cm și diagonala $BC' = 12$ cm. Aflați:

a) distanța de la punctul D' la diagonala AC;

b) distanța de la punctul D la planul $(D'AC)$;

c) tangenta unghiului diedru format de planele $(D'AC)$ și (ABC).

PE-PP 4. Prisma triunghiulară regulată

Prisma triunghiulară regulată este prisma dreaptă cu baza un triunghi echilateral.

$$\mathcal{P}_b = 3l, \qquad \mathcal{A}_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}, \qquad \mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h, \qquad \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h.$$

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor am notat cu l, R, a_b, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ latura bazei unei prisme triunghiulare regulate, raza cercului circumscris bazei, apotema bazei, înălțimea prismei, aria laterală, aria totală și volumul prismei. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
l	12				9			
R		$6\sqrt{3}$				$4\sqrt{3}$		$2\sqrt{3}$
a_b			$2\sqrt{3}$					
h	8	6	10	10			$4\sqrt{3}$	
$\mathcal{A}_l$				540	324	324		360
$\mathcal{A}_t$								
$\mathcal{V}$							108	

PE Aplicare și exersare **

2. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are la bază triunghiul echilateral ABC de latură $AB = 8$ cm și muchia $AA' = 4$ cm. Punctul D este mijlocul laturii BC. Calculați:
a) aria totală și volumul prismei;
b) distanța de la D la dreapta $A'B'$;
c) măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele (DAA') și (ABB').

3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 18$ cm și înălțimea $AA' = 9$ cm. Calculați:
a) aria laterală și volumul prismei;
b) distanța de la A' la dreapta BC.

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu $AA' = 6\sqrt{3}$ cm și raza cercului circumscris bazei de $4\sqrt{3}$ cm. Calculați:
a) aria totală a prismei;
b) volumul prismei;
c) distanța de la B la planul $(B'AC)$.

5. Într-o prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ se cunosc latura bazei $AB = 8$ cm și $\sphericalangle(B'A, (ABC)) = 60°$.

a) Arătați că înălțimea prismei este egală cu $8\sqrt{3}$ cm.

b) Calculați aria totală și volumul prismei.

6. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are volumul egal cu $160\sqrt{3}$ cm^3 și înălțimea $AA' = 10$ cm. Calculați:

a) latura bazei; b) aria totală a prismei; c) distanța de la C' la latura AB.

7. Prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are aria totală de $162\sqrt{3}$ cm^2 și aria laterală de $108\sqrt{3}$ cm^2. Calculați:

a) latura bazei și înălțimea prismei;

b) volumul prismei;

c) tangenta unghiului diedru format de planele $(A'BC)$ și (ABC).

8. Prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ are latura bazei $AB = 12$ cm și aria laterală de 288 cm^2. Calculați:

a) înălțimea prismei; b) volumul prismei; c) diagonala unei fețe laterale.

PE Aprofundare și performanță ***

9. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghiul echilateral ABC. Se știe că $AB \equiv AA'$, iar volumul prismei este egal cu $432\sqrt{3}$ cm^3.

a) Calculați lungimea laturii AB.

b) Calculați aria totală a prismei.

c) Dacă D este mijlocul laturii BC, calculați distanța de la B' la AD.

d) Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planul $(B'AD)$ cu planul (BCC').

10. Volumul unei prisme triunghiulare regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ este de $54\sqrt{3}$ cm^3, iar înălțimea prismei este $AA' = 6$ cm.

a) Calculați aria totală a prismei.

b) Dacă M, N, P și Q sunt mijloacele muchiilor AA', AC, CC' și, respectiv, BC, calculați sinusul unghiului format de dreptele MN și PQ.

11. Se consideră prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, în care se cunosc $AB = 8$ cm și $AA' = 16$ cm. Calculați:

a) aria laterală și volumul prismei;

b) aria triunghiului BMC', unde $M \in AA'$ și $AM \equiv MA'$;

c) distanța de la C' la dreapta de intersecție a planelor (MBC') și (ABC).

12. Se dă prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu latura bazei de 8 cm și înălțimea de 6 cm. Calculați:

a) aria totală și volumul prismei;

b) cosinusul unghiului format de dreptele $A'C$ și BC'.

PE-PP 6. Trunchiul de piramidă regulată

Prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza se obține o piramidă asemenea cu piramida inițială.

Prin detașarea piramidei de la vârf se obține un poliedru numit **trunchi de piramidă**.

Dacă piramida secționată este o piramidă regulată, atunci trunchiul obținut se numește **trunchi de piramidă regulată**.

Notaţii:

L – latura bazei mari;
l – latura bazei mici;
h – înălțimea trunchiului;
a_{tr} – apotema trunchiului;
a_B – apotema bazei mari;
a_b – apotema bazei mici;
$\mathcal{P}_B$ – perimetrul bazei mari;
$\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei mici;
$\mathcal{A}_B$ – aria bazei mari;
$\mathcal{A}_b$ – aria bazei mici.

Formule utile:

$\mathcal{A}_l = \dfrac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot a_{tr}}{2}$ sau $\mathcal{A}_l = \dfrac{n\cdot(L+l)\cdot a_{tr}}{2}$, unde n este numărul de laturi ale poligonului de la bază;

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$;

$\mathcal{V} = \dfrac{h}{3}\cdot\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}\right)$.

Dacă trunchiul de piramidă are la bază un triunghi echilateral, atunci formula volumului se poate scrie:

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(L^2 + l^2 + Ll).$$

Dacă trunchiul este un trunchi de piramidă patrulateră regulată, atunci formula volumului se scrie:

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\cdot(L^2 + l^2 + Ll).$$

activităţi de învăţare

PE Înțelegere *

În tabelele următoare am notat cu L, l, h, a_{tr}, m, R_B, R_b, a_B, a_b, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ latura bazei mari a unui trunchi de piramidă, latura bazei mici, înălțimea trunchiului de piramidă, apotema trunchiului, muchia trunchiului, raza cercului circumscris bazei mari, raza cercului circumscris bazei mici, apotema bazei mari, apotema bazei mici, aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

1. Completați tabelul, știind că elementele sunt măsurate în centimetri, iar trunchiul este un trunchi de piramidă triunghiulară regulată.

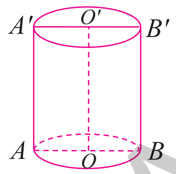
	L	l	h	a_{tr}	m	R_B	R_b	a_B	a_b	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
a)	18	12			6							
b)	$16\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$									

PE-PP

7. Cilindrul circular drept

Elementele unui cilindru circular drept:

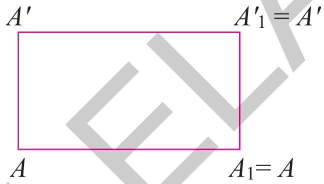
- bazele: două cercuri congruente situate în plane paralele;
- înălțimea cilindrului (distanța dintre cele două baze): $h = OO'$;
- generatoarea G a cilindrului: $G = AA' = OO'$.



Observație:

Suprafața laterală a cilindrului circular drept se desfășoară într-un plan după un dreptunghi cu dimensiunile:

$$L = AA_1 = 2\pi R \text{ și } l = AA' = G.$$



Dreptunghiul $ABB'A'$ se numește **secțiune axială** a cilindrului circular drept.

Formule utile:

$$\mathcal{A}_l = 2\pi RG; \qquad \mathcal{A}_t = 2\pi R(R + G); \qquad \mathcal{V} = \pi R^2 G.$$

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor am notat cu R, h, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ și d raza bazei, înălțimea, aria bazei, aria laterală, aria totală, volumul și diagonala secțiunii axiale ale unui cilindru circular drept. Completați tabelul, știind că elementele sunt măsurate în centimetri.

	R	h	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$	d
a)	6	8					
b)	10					600π	
c)	4			80π			
d)		7				63π	
e)				600π		4500π	
f)		15					25
g)				192π	264π		

PE Aplicare și exersare **

2. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $20\sqrt{2}$ cm. Aflați aria laterală și volumul cilindrului.

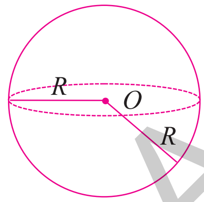
3. Un cilindru circular drept are aria bazei egală cu 36π cm^2 și aria secțiunii axiale egală cu 180 cm^2. Calculați:

a) raza; b) generatoarea; c) volumul cilindrului.

PE-PP

10. Sfera

DEFINIȚIE: Fiind date un număr real $R > 0$ și un punct fix O, numim sferă de centru O și rază R locul geometric al punctelor M din spațiu pentru care $OM = R$.



Formule utile:

$$\mathscr{A} = 4\pi R^2; \qquad \mathscr{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Aplicare și exersare **

1. Raza unei sfere este de 6 cm. Aflați aria și volumul sferei.

2. Aria unei sfere este de 500π cm^2. Aflați volumul sferei.

3. Volumul unei sfere este de 288π cm^3. Aflați aria sferei.

4. Un plan situat la distanța de 3 cm față de centrul unei sfere o intersectează după un cerc a cărui arie este de 16π cm^2. Aflați aria și volumul sferei.

5. Arătați că din 8 sfere de plastilină cu raza R se poate obține o singură sferă cu raza $2R$. Stabiliți o relație între aria sferei mari și suma ariilor sferelor mici.

6. Arătați că raportul ariilor a două sfere este egal cu pătratul raportului razelor celor două sfere.

7. Arătați că raportul volumelor a două sfere este egal cu cubul raportului razelor celor două sfere.

8. Câte sfere cu raza $\frac{R}{3}$ se pot obține dintr-o sferă cu raza R, fără pierdere de material?

9. Se consideră o sferă de centru O. Aria unui cerc de centru O este egală cu 16π cm^2. Calculați aria și volumul sferei.

10. Un cilindru circular drept are raza bazei egală cu 10 cm, iar generatoarea de 20 cm. Aria laterală a cilindrului este egală cu aria unei sfere. Calculați aria și volumul sferei.

11. Se consideră trei sfere de raze 2 cm, 4 cm și 6 cm. Arătați că volumul celei mai mari dintre sfere este de trei ori mai mare decât suma volumelor primelor două sfere.

12. Un con circular drept are raza bazei de 4 cm, iar generatoarea egală cu 9 cm. Aria laterală a conului este egală cu aria unei sfere. Calculați volumul sferei.

13. Un con circular drept are raza bazei egală cu 12 cm și înălțimea de 6 cm. Volumul conului este egal cu volumul unei sfere. Calculați aria sferei.

14. Trei puncte A, B și C sunt situate pe o sferă astfel încât centrul sferei este conținut în planul (ABC). Știind că triunghiul ABC este echilateral de latură $12\sqrt{3}$ cm, calculați aria și volumul sferei.

Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

✸ TESTUL 1 ✸

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)-(-2)\cdot(-3)^2$ este egal cu:

A. –14 B. 20 C. 16 D. –20

(0,5p) **2.** Soluția sistemului $\begin{cases}2x+y=0\\x+2y=-3\end{cases}$ este:

A. (–1, 2) B. (1, 2) C. (–1, –2) D. (1, –2)

(0,5p) **3.** Soluția ecuației $3\cdot(4-6x)=-6$ este:

A. –2 B. 2 C. –1 D. 1

(0,5p) **4.** Un cub cu latura de 2 cm are aria egală cu:

A. 16 cm^2 B. 32 cm^2 C. 16 cm^2 D. 24 cm^2

(0,5p) **5.** Un con cu raza bazei de 8 cm și înălțimea de 6 cm are volumul egal cu:

A. 216π cm^3 B. 128π cm^3 C. 288π cm^3 D. 144π cm^3

(0,5p) **6.** Elevii unei clase au obținut la un test notele prezentate în tabelul următor:

Nota	10	9	8	7	6	5	4
Numărul de elevi	2	3	6	7	5	1	1

Media notelor obținute de elevii clasei la testul dat este:

A. 7,30 B. 7,32 C. 7,40 D. 7,25

Subiectul al II-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Desenați un trunchi de piramidă triunghiulară regulată.

(0,5p) **2.** Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ divizibile cu 3, pentru care $\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}}\in\mathbb{N}$, cu $a\neq b$.

(0,5p) **3.** Într-o clasă sunt 36 de elevi. Determinați numărul băieților din clasă, știind că numărul fetelor este cu 20% mai mic decât numărul băieților.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-4$.

(0,5p) a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.

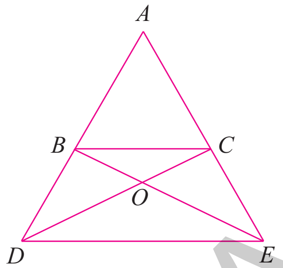
(0,5p) b) Calculați raza cercului circumscris triunghiului determinat de axele de coordonate și de dreapta ce reprezintă graficul funcției.

(0,5p) **5.** Fie expresia $E(x)=x\cdot\left(\frac{x+2}{x+3}:\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x+3}+\frac{4}{x+5}\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,-2,-1\}$.

Arătați că $E(x)=x$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,-2,-1\}$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete. (3 puncte)

1. În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral cu $AB = 18$ cm, D este simetricul lui A față de B, iar E este simetricul lui A față de C.



(0,5p) a) Arătați că perimetrul triunghiului ABC este de 54 cm.

(0,5p) b) Arătați că $DC \perp AE$.

(0,5p) c) Dacă $DC \cap BE = \{O\}$, arătați că $AO \perp DE$ și calculați aria triunghiului OCE.

2. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și diagonala $AC' = 13$ cm. Calculați:

(0,5p) a) aria totală și volumul paralelipipedului;

(0,5p) b) valoarea sinusului unghiului format de diagonala BD' cu planul (ADD');

(0,5p) c) valoarea sinusului unghiului format de planele (ADD') și (BDD').

✹ TESTUL 2 ✹

Subiectul I. Alegeți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $(-2)^2 \cdot (-5) - (-6)^2$ este egal cu:

A. –56 B. –16 C. 56 D. 16

(0,5p) **2.** Dacă 30% dintr-un număr este egal cu 60, atunci numărul este egal cu:

A. 200 B. 300 C. 400 D. 180

(0,5p) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $2x^2 - 9x + 4 = 0$ este:

A. $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$ C. $\left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$ D. $\left\{-\frac{1}{2}, -4\right\}$

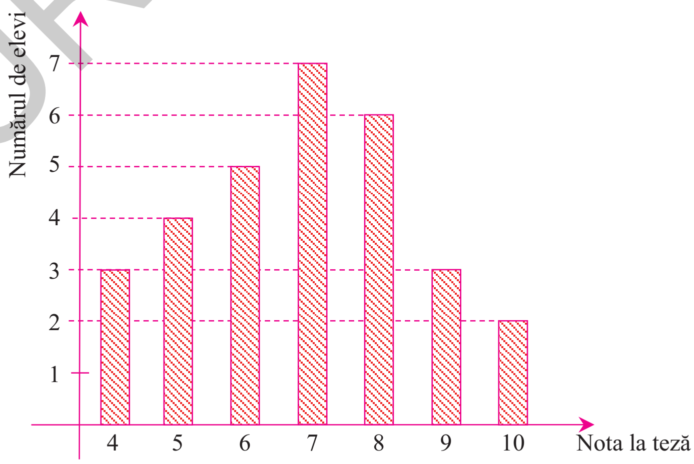
(0,5p) **4.** O sferă are volumul egal cu 288π cm^3. Raza sferei este egală cu:

A. 8 cm B. 12 cm C. 4 cm D. 6 cm

(0,5p) **5.** Un tetraedru regulat are aria egală cu $81\sqrt{3}$ cm^2. Muchia tetraedrului este egală cu:

A. 9 cm B. 18 cm C. 12 cm D. 6 cm

(0,5p) **6.** Rezultatele obținute de elevii unei clase la teza la matematică sunt reprezentate în următoarea diagramă:



Recapitulare şi evaluare finală

Exerciţii şi probleme recapitulative pentru evaluarea finală

ALGEBRĂ

A.

1. Efectuați calculele:

a) $\left(-\frac{1}{125}\right):0,008+0,(7)+0,(3)^2$; b) $\left[0,2(3)-1,2\right]:0,3(2)$.

2. Calculați media aritmetică a numerelor: $5\sqrt{3}-2\sqrt{5}$, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

3. Calculați media geometrică a numerelor $x=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{\sqrt{12}-\sqrt{3}}$ și $y=\frac{\sqrt{48}-\sqrt{3}}{\sqrt{18}-\sqrt{8}}$.

4. Descompuneți în produs de factori:

a) x^3-2x^2-4x+8; b) $(2x+1)^3-8x-4$;

c) $2(x^2-1)-(x+1)^2$; d) $x^2+5x+6-2(x^2-4)$.

5. Determinați numerele reale x și y, știind că:

a) $x^2+y^2+4x-8y+20=0$; b) $(x-2\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}y-6)^2=0$;

c) $(2x+y+4)^2+(x+2y-1)^2=0$; d) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{y^2+4y+13}=5$.

6. Arătați că expresia $E(x)=(x^2+2x+2)(x^2+2x+6)+7$ este strict pozitivă pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea minimă a expresiei.

7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\frac{x-2}{5}+\frac{x-1}{2}=\frac{3x-1}{10}$; b) $\left|\frac{2x-1}{3}\right|=1$;

c) $4(x+3)-2|x+3|=2(x+5)+2x$;

d) $(x-3)^2+(x-4)(x+4)=(x+2)^2+x(x-4)+1$;

e) $(2x+1)^2-4(x+3)(x-5)=5(x+3)+4$;

f) $\sqrt{(2x-1)^2}=7$; g) $(x+3)^2-4x=x(x+1)$;

h) $\sqrt{(x-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{50}$; i) $2x^2+x-10=0$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $-5(x+2)<25$; b) $(x+5)^2-7x<x(x+2)+21$;

c) $\sqrt{x^2-6x+9}\le 1$; d) $3(x+5)+2\sqrt{(x+2)^2}\le 3x+25$;

e) $(x+5)(x-5)+(x+2)^2<x(x+5)+(x-3)^2$;

A.

1. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile $a = 2\sqrt{11}$ cm, b = 10 cm și c = 9 cm. Calculați:
a) diagonala paralelipipedului;
b) aria totală și volumul paralelipipedului;
c) valoarea sinusului unghiului format de diagonala AC' cu planul (BCC').

2. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are volumul egal cu 512 cm^3. Calculați:
a) latura cubului și diagonala acestuia;
b) valoarea sinusului unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(D'AC)$ și $(B'AC)$;
c) măsura unghiului format de diagonala $D'C$ cu planul (BDD').

3. Un tetraedru regulat $ABCD$ are aria totală egală cu $144\sqrt{3}$ cm^2.
a) Calculați volumul tetraedrului.
b) Dacă M este mijlocul muchiei DC și N este mijlocul muchiei AB, calculați măsura unghiului format de dreapta MN cu muchia AD.
c) Aflați valoarea sinusului unghiului diedru format de planele (AMB) și (ABC).

4. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei egală cu 8 cm și apotema egală cu 5 cm. Calculați:
a) volumul piramidei;
b) distanța de la centrul bazei la o față laterală;
c) valoarea sinusului unghiului diedru format de fețele (VBC) și (VAD).

5. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată care are AB = 24 cm, $A'B'$ = 12 cm și apotema egală cu $4\sqrt{3}$ cm. Calculați:
a) volumul trunchiului de piramidă;
b) aria totală și volumul piramidei din care provine trunchiul;
c) tangenta unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(A'BC)$ și (ABC).

6. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AA' = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6\sqrt{7}$ cm și aria patrulaterului $ABC'D'$ egală cu 108 cm^2. Calculați:
a) lungimea laturii AB;
b) aria totală și volumul paralelipipedului;
c) valoarea sinusului unghiului format de diagonala AD' cu planul (BDD').

7. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are la bază un triunghi echilateral cu latura AB = 8 cm și înălțimea AA' = 6 cm. Se notează $AB' \cap BA' = \{O\}$ și $BC' \cap CB' = \{O'\}$. Aflați:
a) aria laterală și volumul prismei;
b) distanța de la punctul B' la dreapta OO';
c) poziția dreptei OO' față de planul (ABC);
d) sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(B'AC)$ și $(A'BC')$.

8. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu latura AB = 6 cm și M mijlocul laturii AC. Aflați:
a) aria totală și volumul tetraedrului;
b) distanța de la M la planul (DBC);
c) distanța de la M la muchia BD.

Modele de teste pentru Evaluarea Naţională

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.*

✹ TESTUL 1 ✹

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mic număr natural de patru cifre distincte, divizibil cu 4, este:
a) 1004; b) 1024; c) 4876; d) 2632.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos este prezentată componența claselor din ciclul gimnazial al unui colegiu.

Clasa	a V-a	a VI-a	a VII-a	a VIII-a
Numărul fetelor	47	41	32	33
Numărul băieților	34	37	40	51

Cei mai mulți băieți sunt în clasa:
a) a V-a; b) a VI-a; c) a VII-a; d) a VIII-a.

(5p) **3.** Numărul natural n verifică relația $\frac{1}{2} < \frac{n+1}{18} < \frac{7}{9}$, dacă și numai dacă:
a) $n \in \{8, 9, 10, 11\}$; b) $n \in \{7, 8, 9, 10\}$;
c) $n \in \{9, 10, 11, 12\}$; d) $n \in \{10, 11, 12, 13\}$.

(5p) **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine descrescătoare este:
a) 1,1(6); 1,166; 1,(16); 1,16; b) 1,(16), 1,166; 1,1(6); 1,16;
c) 1,16; 1,1(6); 1,(16); 1,166; d) 1,166; 1,(16); 1,1(6); 1,16.

(5p) **5.** Patru elevi au calculat media geometrică a numerelor $\left(\frac{5}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$ și $\sqrt{32}$. Rezultatele obținute sunt înregistrate în tabelul următor.

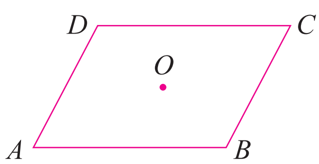
Ștefan	**Sofia**	**Matei**	**Mara**
2	4	5	6

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect este:
a) Ștefan; b) Sofia; c) Matei; d) Mara.

(5p) **6.** Matei a cumpărat 3 kg de pere cu 5 lei kilogramul și 2 kg de portocale cu 6 lei kilogramul. Matei spune că a plătit pe toată marfa cumpărată 27 de lei. Afirmația lui Matei este:
a) adevărată; b) falsă.

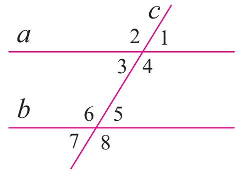
Subiectul al II-lea. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat un paralelogram de centru O. Simetricul punctului A față de punctul O este punctul:
a) E; b) B;
c) C; d) D.



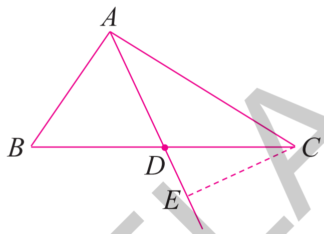
(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele paralele a și b sunt tăiate de secanta c. Dacă $\sphericalangle 8 = 132°$, atunci $\sphericalangle 1$ are măsura egală cu:

a) $132°$; b) $58°$;
c) $48°$; d) $42°$.



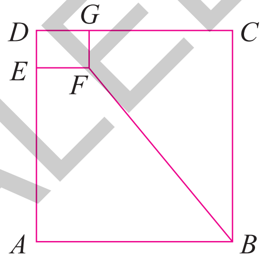
(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat un teren în formă de triunghi ABC dreptunghic în A, în care $AB = 60$ m, $AC = 80$ m și punctul D este mijlocul laturii BC. Ștefan se află în punctul C și vrea să ajungă la dreapta AD, parcurgând drumul cel mai scurt. Distanța parcursă de Ștefan este egală cu:

a) 36 m; b) 42 m;
c) 48 m; d) 50 m.



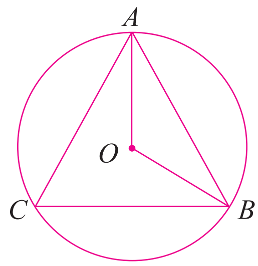
(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă schița unui salon pentru evenimente, în formă de dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 12$ m și $AD = 18$ m. Dreptunghiul $EFGD$, cu $ED = 2$ m și $EF = 4$ m reprezintă bucătăria salonului. Proprietarul acoperă suprafața $ABFE$ cu parchet. Aria suprafeței acoperite cu parchet este egală cu:

a) $84\ m^2$; b) $96\ m^2$;
c) $120\ m^2$; d) $128\ m^2$.



(5p) **5.** Pe cercul cu centrul în punctul O din figura alăturată sunt situate punctele A, B, C, astfel încât unghiul AOB are măsura egală cu $106°$ și măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu $120°$. Măsura unghiului BAC este egală cu:

a) $63°$; b) $65°$;
c) $67°$; d) $68°$.



(5p) **6.** Cătălin are un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile bazei egale cu 135 cm și 60 cm, iar înălțimea acvariului este egală cu 60 cm. Cătălin vrea să introducă pietre în formă de cuburi, având latura egală cu 15 cm. Numărul de cuburi ce poate fi introdus în acvariu, astfel încât să ocupe jumătate din volumul acestuia, este egal cu:

a) 54; b) 60; c) 68; d) 72.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările corecte. **(30 de puncte)**

1. Trei bluze și două rochii costă împreună 295 lei. Două bluze și cinci rochii costă împreună 490 lei.

(2p) a) Este posibil ca o bluză să coste 60 lei? Justificați răspunsul.

(3p) b) Determinați prețul unei rochii.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{2x^2 - 7x + 9}{x^2 - 7x + 10} - \dfrac{x+3}{x-5}\right) : \dfrac{1}{x^2 - 4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$.

(2p) a) Arătați că $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

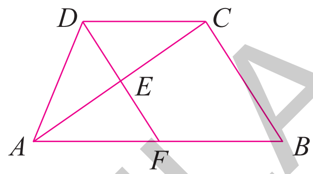
(3p) b) Demonstrați că $E(x) = (x-3)(x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 5\}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$.

(2p) a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe ortogonale xOy.

(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determinați coordonatele punctului $C(a, b)$ situat pe graficul funcției f, acesta fiind simetricul lui B față de punctul A.

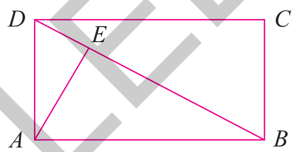
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $CD = 12$ cm, $BC = 16$ cm și $AD = 12$ cm. Paralela prin D la BC intersectează latura AB în F, astfel încât $AF = 20$ cm, iar diagonala AC în punctul E.



(2p) a) Arătați că $\sphericalangle ADF = 90°$.

(3p) b) Determinați lungimea segmentului DE.

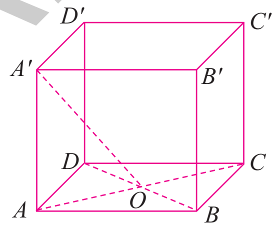
5. În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$, iar AE este distanța de la punctul A la dreapta BD, astfel încât $BE = 25$ cm și $DE = 16$ cm.



(2p) a) Determinați lungimea segmentului AE.

(3p) b) Demonstrați că perimetrul dreptunghiului este mai mic decât 117 cm.

6. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ reprezentat în figura alăturată are $AB = 12$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$.



(2p) a) Calculați lungimea segmentului $A'O$.

(3p) b) Determinați măsura unghiului dreptelor $A'O$ și $B'C$.

✹ TESTUL 2 ✹

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

(5p) **1.** Dacă $8^x = 512$, numărul natural x este egal cu:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

(5p) **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii zilnice înregistrate într-o localitate, în decursul unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	–3°C	–2°C	–1°C	+5°C	+6°C	+7°C	+9°C

Temperatura medie înregistrată în această săptămână a fost egală cu:

a) –1°C; b) 2°C; c) 3°C; d) 4°C.

(5p) **3.** Într-o clasă sunt 12 băieți și 18 fete. Probabilitatea ca o fată să fie scoasă la tablă este egală cu:

a) 0,4; b) 0,5; c) 0,6; d) 0,8.

(5p) **4.** Dintre numerele 2,(34), 2,344, 2,34 și 2,3(4), cel mai mic este:

a) 2,(34); b) 2,344; c) 2,34; d) 2,3(4).

(5p) **5.** Patru elevi au calculat valoarea numărului real x, știind că $xy - xz - 3x = 3 - 2\sqrt{2}$ și $y - z = \sqrt{8}$. Rezultatele obținute de fiecare elev sunt înregistrate în tabelul următor.

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

1. Operaţii cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere

1.1. Adunarea şi scăderea

1. a) $\frac{x+2}{5}$; b) $x+1$; c) $1-x$; d) $\frac{5x+9}{3}$; e) $4(x+1)$; f) $\frac{56-83x}{30}$. **2.** a) 2, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) 17, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; c) 3, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; d) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$. **3.** a) $\frac{2(x-1)}{3x^2}$, pentru $x \neq 0$; b) $\frac{2}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; c) $\frac{5}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; d) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; e) $\frac{x-1}{x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; f) $\frac{x+1}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$; g) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$. **4.** a) 2, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $\frac{8}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; c) $\frac{6}{(x+2)(x-2)}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; d) $\frac{6}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; e) $\frac{2}{3x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; f) $-\frac{1}{3x}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. **5.** a) $\frac{1}{x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$; b) $\frac{4}{x-1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) $\frac{x+8}{x-2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; d) $\frac{x+2}{x+1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. **6.** a) $\frac{9}{x-3}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; b) $\frac{4}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; c) $\frac{4}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$; d) $-\frac{8}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$. **7.** a) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; b) $-\frac{1}{x+1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) 1, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; d) $\frac{1}{x-5}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$. **8.** a) $x \in \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; b) $\frac{2}{2x-3}$; c) $n = 2$. **9.** a) $x \in \{-1, 1\}$; b) $F(x) = \frac{1}{x+1}$; $G(x) = 1 \in \mathbb{N}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2020}\cdot\frac{1}{2021} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2021} = \frac{1009}{3030}$. **10.** a) $x \in \{-3, 3\}$; b) $E(x) = -\frac{3}{x+3}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; c) $n \in \{-6, -4, -2, 0\}$. **11.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; b) $E(x) = \frac{6}{x-4}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; c) $n \in \{-2, +1, +2, +3, +5, +6, +7, +10\}$.

GEOMETRIE

Capitolul I. ARII ŞI VOLUME

1. Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

1. a) $\sphericalangle(CC', AB) = \sphericalangle(AA', AB) = 90°$; b) $\sphericalangle(BC', AD) = \sphericalangle(BC', BC) = 60°$; c) $\sphericalangle(AC, (ADD')) = \sphericalangle(AC, AD) = 45°$. **2.** a) $AA' = 9$ cm; $\sphericalangle(BD', (ABC)) = \sphericalangle(BD', BD)$; $\sin(\sphericalangle DBD') = \dfrac{3}{5}$; b) $pr_{(ADD')} BD' = AD' \Rightarrow \sphericalangle(BD', (ADD')) = \sphericalangle AD'B$; $\sin(\sphericalangle AD'B) = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **3.** a) $\sphericalangle(AD', (ABC)) = \sphericalangle(AD', AD) = \sphericalangle D'AD = 30°$; b) $\sphericalangle(D'C, (ADD')) = \sphericalangle(D'C, DD') = 60°$; c) $\sphericalangle((ADD'), (BDD')) = \sphericalangle(AD, BD) = 45°$. **4.** a) $d(C, AC') = 12$ cm; b) $\sphericalangle(AC', (BCC')) = \sphericalangle(AC', BC') = \sphericalangle AC'B$; $\sin(\sphericalangle AC'B) = \dfrac{12}{25}$; c) $\sphericalangle((C'AB), (ABC)) = \sphericalangle(C'B, CB) = \sphericalangle CBC'$; $tg(\sphericalangle CBC') = \dfrac{20}{9}$. **5.** a) $d(C', BD) = C'O = 3\sqrt{6}$ cm, unde $AC \cap BD = \{O\}$; b) $\sphericalangle(BC', AB') = \sphericalangle(BC', DC') = 60°$; c) Dacă $CQ \perp C'O$, $Q \in C'O \Rightarrow d(C, (C'BD)) = CQ = 2\sqrt{3}$ cm. **6.** a) $\sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle(AD', D'O) = \sphericalangle AD'O = 30°$; b) $\sphericalangle(BD', (ABC)) = \sphericalangle DBD'$; $\sin(\sphericalangle DBD') = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; c) Fie $AM \perp BD'$; $AM = 4\sqrt{6}$ cm. **7.** a) Dacă D este mijlocul laturii $BC \Rightarrow d(A', BC) = A'D = 12$ cm; b) $\sphericalangle((A'BC), (ABC)) = \sphericalangle A'DA = 30°$. **8.** a) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle(VA, AO) = \sphericalangle VAO$; $VA = 9\sqrt{2}$ cm; $\sin(\sphericalangle VAO) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sphericalangle(VB, (VAD)) = \sphericalangle(VB, VD) = 45°$; c) $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VDO$; $tg(\sphericalangle VDO) = \sqrt{2}$.
9. a) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO = 45°$; b) $\sphericalangle(VB, (VAC)) = \sphericalangle BVO = 45°$; c) $\sphericalangle(BC, (VAC)) = \sphericalangle BCO = 45°$.
10. $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VMO = 45°$ (figura 1). a) $\sphericalangle((VAC), (VBD)) = \sphericalangle AOB = 90°$; b) Cum $BO \perp (VAC) \Rightarrow d(B, (VAC)) = BO = 10\sqrt{2}$ cm; c) $\Delta VQP \sim \Delta VOM \Rightarrow \dfrac{PQ}{OM} = \dfrac{VP}{VM}$. Notăm $PQ = PO = x \Rightarrow \dfrac{x}{10} = \dfrac{10 - x}{10\sqrt{2}} \Rightarrow x = 10(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow PO = 10(\sqrt{2} - 1)$ cm.

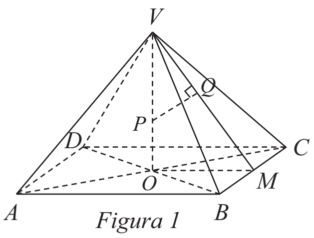


Figura 1

11. a) $DD' = 6\sqrt{2}$ cm; $d(D', AC) = D'O = 6\sqrt{3}$ cm, unde $AC \cap BD = \{O\}$; b) $d(D, (D'AC)) = DQ$, unde $DQ \perp D'O$, $DQ \subset (D'DO)$; $DQ = 2\sqrt{6}$ cm; c) $\sphericalangle((D'AC), (ABC)) = \sphericalangle D'OD$; $tg(\sphericalangle D'OD) = \sqrt{2}$. **12.** a) $DD' = 4$ cm, $AO \perp (BDD') \Rightarrow d(A, (BDD')) = 2\sqrt{6}$ cm; b) $pr_{(BDD')} AD' = D'O \Rightarrow \sphericalangle(AD', (BDD')) = \sphericalangle AD'O$; $tg(\sphericalangle AD'O) = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.
13. a) Dacă $DE \perp AC$, atunci $D'E \perp AC \Rightarrow d(D', AC) = D'E$; $DE = 3\sqrt{3}$ cm, $D'E = 9$ cm; b) $\sphericalangle((D'AC), (ABC)) = \sphericalangle DED'$; $tg(\sphericalangle DED') = \sqrt{2}$; c) Dacă $DQ \perp D'E$, $DQ \subset (D'DE) \Rightarrow d(D, (D'AC)) = DQ$; $DQ = 3\sqrt{2}$ cm. **14.** a) Dacă $DQ \perp D'A \Rightarrow DQ = d(D, (D'AB))$; $DQ = 4\sqrt{3}$ cm; b) $pr_{(D'AB)} DD' = D'Q \Rightarrow \sphericalangle(DD', (D'AB)) = \sphericalangle(DD', D'Q) = \sphericalangle DD'Q = 30°$ (figura 2). **15.** a) $DD' = 6\sqrt{3}$ cm; $BD' = 6\sqrt{15}$ cm.

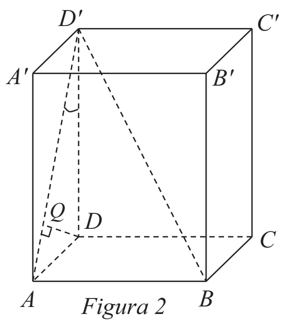


Figura 2

Cuprins