ARTUR BĂLĂUCĂ

CĂTĂLIN BUDEANU GABRIEL MÎRŞANU

ALGEBRĂ
GEOMETRIE

Clasa a VIII-a

- Itemi cu note
- Modele de teste pentru recapitulare și aprofundare ce conţin itemi cu note şi bareme de notare
- Teste iniţiale
- Variante de teste pentru lucrarea scrisă semestrială

EDITURA TAIDA
– IAŞI, 2020 –

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

– CUPRINS –

ALGEBRĂ

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

CAPITOLUL II. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. RECAPITULARE ŞI APROFUNDARE. NUMERE REALE

I. 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Probleme de recunoaştere a numerelor naturale, întregi, raţionale, iraţionale. Probleme rezolvate.

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_{-} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_{+}$;

$n = 0{,}020020002000020000020000002000000020000000002...$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419 71...$

Observaţii: Ecuaţia $x^2 = 6$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}$.

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}^*$ şi $(m, n) = 1$, astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 6$. Din $\frac{m^2}{n^2} = 6$ rezultă $m^2 = 6n^2$, de unde $2/m$. Deci $m = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}^*$) şi $4k^2 = 6n^2$ sau $2k^2 = 3n^2$.

1. Cum $(2, 3) = 1$ rezultă $2/n^2$, adică $2/n$. Contradicţie, pentru că $(m, n) = 1$.

2. $\sqrt{6} = 2{,}4494897427831...$

3. Un număr este **raţional** dacă şi numai dacă se poate scrie sub formă de fracţie zecimală cu un număr finit de zecimale sau cu o infinitate de zecimale care se succed periodic.

4. Numărul $0{,}010010001000010000010000001000000001...$ nu este fracţie zecimală periodică. (are o infinitate de zecimale care nu se succed periodic)

5. Un număr este **iraţional** dacă poate fi scris ca o fracţie zecimală cu o infinitate de zecimale dar care nu se succed periodic.

6. Mulţimea numerelor raţionale reunită cu mulţimea numerelor iraţionale formează mulţimea numerelor reale pe care o notăm cu $\mathbb{R}$.

7. Orice număr real pozitiv se reprezintă printr-o fracţie zecimală de forma $x = \overline{a_0, a_1a_2a_3...}$, unde a_0 este **partea întreagă** a lui x şi se notează cu $[x]$, iar $\overline{0, a_1a_2a_3...}$ este **partea fracţionară** a lui x şi se notează $\{x\}$. Avem $x = [x] + \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

8. Orice număr real negativ x ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) se reprezintă printr-o fracţie zecimală de forma $x = \overline{a_0, a_1a_2a_3...}$, unde $a_0 - 1$ este partea întreagă a lui x, iar $1 - \overline{0, a_1a_2a_3...}$ este partea fracţionară a lui x. Avem $x = [x] + \{x\}$. Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[x] = x$ şi $\{x\} = 0$.

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

Probleme rezolvate:

1. Un număr raţional poate fi reprezentat prin fracţii ordinare echivalente sau printr-o fracţie zecimală finită sau periodică.

Exemple: **a)** $^{2/}\frac{48}{5}=\frac{96}{10}=9,6$ fracţie **zecimală finită**;

b) $\frac{28}{12}^{\backslash 4}=\frac{7}{3}=2,33...=2,(3)$, fracţie **zecimală periodică simplă**;

c) $\frac{125}{12}=10,41(6)$, fracţie **zecimală periodică mixtă**.

2. Reprezentaţi sub formă de fracţie ordinară fiecare dintre numerele:

a) 2,75; **b)** 0,124; **c)** 3,(4); **d)** 14,(18); **e)** 2,(234); **f)** 0,1(62); **g)** 12,0(45); **h)** 4,1(345).

Rezolvare:

a) $2,75=\frac{275}{100}^{\backslash 25}=\frac{11}{4}$; **b)** $0,124=\frac{124}{100}^{\backslash 4}=\frac{31}{25}$; **c)** $3,(4)=3\frac{4}{9}=\frac{31}{9}$;

d) $14,(18)=14\frac{18}{99}=14\frac{2}{11}=\frac{156}{11}$; **e)** $2,(234)=2\frac{234}{999}^{\backslash 9}=2\frac{26}{111}=\frac{248}{111}$;

f) $0,1(62)=\frac{162-1}{990}=\frac{161}{990}$; **g)** $12,0(45)=12\frac{45}{990}^{\backslash 45}=12\frac{1}{22}=\frac{265}{22}$;

h) $4,1(345)=4\frac{1345-1}{9990}=4\frac{1344}{9990}^{\backslash 6}=4\frac{224}{1665}=\frac{6884}{1665}$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii şi daţi câte un contraexemplu pentru propoziţiile false:

a) „Orice număr întreg este număr natural.“
b) „Orice număr natural este număr întreg.“
c) „Orice număr real este număr iraţional.“
d) „Orice număr întreg este număr real.“
e) „Orice număr real este număr raţional.“
f) „Orice număr întreg este număr raţional.“
g) „Orice număr raţional este număr real.“
h) „Pătratul oricărui număr iraţional este un număr raţional.“
i) „Suma a două numere iraţionale este un număr iraţional.“

Rezolvare:

a) F ($-3\notin\mathbb{N}$); **b)** A ($\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$); **c)** F $\left(-\frac{3}{4}\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)$; **d)** A ($\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$); **e)** F $\left(\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}\right)$; **f)** A ($\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$);

g) A ($\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$); **h)** F $\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^2=7-4\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)$; **i)** F $\left(\left(2\sqrt{3}+5\right)+\left(5-2\sqrt{3}\right)=10\right)$.

4. Demonstraţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ numerele $\sqrt{5n+8}$ şi $\sqrt{5n+7}$ sunt iraţionale.

Rezolvare:

Presupunem că $\sqrt{5n+8}\in\mathbb{N}$. Atunci $5n+8=k^2$, $k\in\mathbb{N}^*$, deci numărul $5n+8$ este pătrat perfect. Dar $U(5n+8)\in\{3;8\}$, contradicţie!

Analog, $U(5n+7)\in\{2;7\}$ etc.

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

5. Determinaţi cifrele distincte a şi b în baza zece ştiind că $\sqrt{\overline{4ab}} \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

$\sqrt{\overline{4ab}} \in \mathbb{N}$ implică $\overline{4xy} = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Însă $20^2 \leq \overline{4ab} \leq 22^2$, de unde $\overline{4ab} \in \{20^2; 21^2; 22^2\}$ şi $\overline{4ab} \in \{400; 441; 484\}$. Cum $a \neq b$ rezultă că $\overline{4ab} \in \{441; 484\}$. Deci $a = 4$, $b = 1$ sau $a = 8$ şi $b = 4$.

6. Arătaţi că numărul $\sqrt{2005^{2012} + 2007^{2011}} \notin \mathbb{Q}$.

Rezolvare:

$U(2005^{2012}) = 5$ şi $U(2007^{2011}) = U(2007^{4 \cdot 502 + 3}) = U(2007^3) = U(7^3) = 3$.

Deci $U(2005^{2012} + 2007^{2011}) = U(5 + 3) = 8$ etc.

7. Arătaţi că numărul $a = \sqrt{5+15+25+...+2015+404^2} \in \mathbb{Q}$.

Rezolvare:

$a = \sqrt{5(1+3+5+...+403)+404^2} = \sqrt{5 \cdot 202^2 + 2^2 \cdot 202^2} = \sqrt{202^2 \cdot 9} = 3 \cdot 202 = 606 \in \mathbb{Q}$.

8. Aflaţi partea întreagă şi partea fracţionară a următoarelor numere reale:

a) 7,12; **b)** –9; **c)** –4,(3); **d)** $\frac{17}{3}$; **e)** $-14\frac{3}{7}$; **f)** $\frac{4n+7}{4n+3}$, $n \in \mathbb{N}^*$; **g)** $\sqrt{23}$.

Rezolvare:

a) $[7{,}12] = 7$; $\{7{,}12\} = 0{,}12$; **b)** $[-9] = -9$; $\{-9\} = 0$; **c)** $[-4{,}(3)] = -5$; $\{-4{,}(3)\} = \frac{2}{3}$;

d) $\left[\frac{17}{3}\right] = 5$; $\left\{\frac{17}{3}\right\} = \frac{2}{3}$; **e)** $\left[-14\frac{3}{7}\right] = -15$; $\left\{-14\frac{3}{4}\right\} = \frac{4}{7}$; **f)** $\left[\frac{4n+7}{4n+3}\right] = 1$ şi $\left\{\frac{4n+7}{4n+3}\right\} = \frac{4}{4n+3}$.

g) $4 < \sqrt{23} < 5$, deci $\left[\sqrt{23}\right] = 4$ şi $\left\{\sqrt{23}\right\} = \sqrt{23} - 4$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Scrieţi în formă zecimală numerele raţionale: **a)** $\frac{5}{8}; \frac{7}{25}; \frac{3}{125}; \frac{1}{80}; \frac{3}{40}; \frac{1}{12}$;
b) $\frac{1}{33}; \frac{1}{39}; \frac{4}{7}; \frac{7}{16}; \frac{11}{50}; \frac{2}{3}$; **c)** $\frac{7}{6}; \frac{5}{80}; \frac{36}{28}; \frac{5}{32}; \frac{11}{75}$. (*nota 5*)

2. Determinaţi: **a)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$; **b)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$; **c)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$; **d)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$; **e)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-$; **f)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}$; **g)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$; **h)** $\mathbb{Z}^* \cup \mathbb{Q}$; **i)** $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$; **j)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$; **k)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **l)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; **m)** $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q}$. (*nota 5*)

3. Scrieţi fracţiile în formă ireductibilă şi precizaţi dacă fracţia zecimală care reprezintă numărul raţional este periodică simplă, periodică mixtă sau are un număr finit de zecimale (nu toate nule). **a)** $\frac{25}{75}$; **b)** $\frac{4}{28}$; **c)** $\frac{305}{427}$; **d)** $\frac{1{,}2}{5{,}6}$; **e)** $\frac{2{,}01}{8{,}1}$; **f)** $\frac{6}{80}$;
g) $\frac{21}{45}$; **h)** $\frac{0{,}2}{1{,}1}$; **i)** $\frac{3{,}5}{0{,}(6)}$; **j)** $\frac{35}{30}$; **k)** $\frac{35}{56}$; **l)** $\frac{1{,}15}{69}$; **m)** $\frac{26}{14}$; **n)** $\frac{2{,}1}{3{,}3}$; **o)** $\frac{56}{40}$.

a) → **o)** – (*nota 5*); **d)** → **n)** – (*nota 7*)

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

II. 4. Inecuaţii de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq$, $<$, $>$), unde $a, b \in \mathbb{R}$.
Probleme rezolvate.

Atenţie!
Vezi proprietăţile relaţiei de inegalitate (ordine în $\mathbb{R}$) de la paragraful II. 2.

O inecuaţie de forma $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ sau $ax + b \geq 0$ se numeşte inecuaţie de gradul I cu o necunoscută ($a \neq 0$).
Numărul real x_0 este soluţie a inecuaţiei $ax + b < 0$ dacă $ax_0 + b < 0$.
Două inecuaţii de gradul I cu o necunoscută sunt echivalente dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.
Pentru inecuaţiile $ax + b < 0$ şi $ax + b \leq 0$ avem, respectiv, soluţiile:
Dacă $a > 0$, atunci $x < -\dfrac{b}{a}$ şi $S = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$. Dacă $a < 0$, atunci $x > -\dfrac{b}{a}$ şi $S = \left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$.
Dacă $a > 0$, atunci $x \leq -\dfrac{b}{a}$ şi $S = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right]$. Dacă $a < 0$, atunci $x \geq -\dfrac{b}{a}$ şi $S = \left[-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$.

Probleme rezolvate:

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $-3x \leq -15x$; **b)** $x + 2 \leq 5x$; **c)** $\dfrac{3x-4}{2} < \dfrac{3}{5}$; **d)** $|3x - 8| \leq 12$; **e)** $\sqrt{2}\,x + 3 < x\sqrt{3} - 2$.

Rezolvare:

a) $-3x \leq -15x \quad |+15x$
$12x \leq 0 \quad |:12$
$x \leq 0$
$S = (-\infty;0]$.

b) $x + 2 \leq 5x \quad |-5x$
$-4x + 2 \leq 0 \quad |-2$
$-4x \leq -2 \quad |:(-2)$
$x \geq \dfrac{1}{2}$
$S = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

c) $5(3x - 4) < 6$
$15x - 20 < 6 \quad |+20$
$15x < 26 \quad |:15$
$x < \dfrac{26}{15}$
$S = \left(-\infty;\dfrac{26}{15}\right)$.

d) $-12 \leq 3x - 8 \leq 12 \quad |+8$
$-4 \leq 3x \leq 20 \quad |:3$
$-\dfrac{4}{3} \leq x \leq \dfrac{20}{3}$
$S = \left[-\dfrac{4}{3};\dfrac{20}{3}\right]$.

e) $\sqrt{2}\,x + 3 < x\sqrt{3} - 2 \;/ -3$
$\sqrt{2}\,x < x\sqrt{3} - 5 \;/ -x\sqrt{3}$
$\sqrt{2}\,x - x\sqrt{3} < -5$
$(\sqrt{2} - \sqrt{3})x < -5 / \cdot(-1)$
$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot x > 5 \;/ \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$
$x > 5(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
$S = (5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\,; +\infty)$

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

2. Triunghiul ABC are perimetrul de 36 cm şi $AB = 3 \cdot AC$. Aflaţi:
a) intervalul în care ia valori lungimea laturii AC;
b) lungimile laturilor dacă acestea sunt exprimate în centimetri prin numere întregi.

Rezolvare:
a) Notăm $AC = x$ şi $BC = y$. Atunci $AB = 3x$ şi $4x + y = 36$, de unde $y = 36 - 4x$.
Din *teorema de existenţă* a unui triunghi avem relaţiile: $|3x - x| < 36 - 4x < x + 3x$.
Inecuaţia $|3x - x| < 36 - 4x$ este echivalentă cu inecuaţiile: $2x < 36 - 4x$; $6x < 36$; $x < 6$.
Inecuaţia $36 - 4x < 4x$ este echivalentă cu inecuaţiile: $36 < 8x$; $\frac{9}{2} < x$. Deci $x \in (4,5;6)$.
b) $(4,5;6) \cap \mathbb{N}^* = \{5\}$. Deci $AC = 5$ cm; $AB = 15$ şi $BC = 16$ cm.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Verificaţi dacă –2 este soluţie pentru inecuaţiile următoare: **a)** $4x - 7 < 0$; **b)** $3x \geq x - 1$; **c)** $-3x + 6 \geq 0$; **d)** $5x - 15 \leq 0$; **e)** $12 - 3x < 0$; **f)** $x > -3$; **g)** $\frac{x-3}{2} \leq 0$; **h)** $\frac{x+5}{2} \geq 0$.
(*nota* 5)

2. Fie mulţimea $A = \{-3; -2; -\sqrt{3}; -1; 0; 1; 3; \sqrt{11}\}$. Precizaţi elementele mulţimii A care sunt soluţii ale inecuaţiilor: **a)** $2x - 3 \leq -6$; **b)** $4x - 1 \leq 2x - 3$; **c)** $2x + 1 \geq -5x - 6$; **d)** $|x| \leq 4$; **e)** $-4x - 5 < 2x + 7$; **f)** $7x - 3 \leq -2x + 15$; **g)** $|x| \leq -1$; **h)** $2|x| < 5$. (*nota* 7)

3. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuaţiile: **a)** $-x + 5 \geq 0$; **b)** $-2x + 3 < 0$; **c)** $-8x - 4 \geq 0$; **d)** $4x \geq -5x + 36$; **e)** $-9x \geq -15x$; **f)** $4 \cdot (x - 1) - 3x \leq 2x + 1$; **g)** $|2x - 5| \leq 4$; **h)** $|6 - 2x| \leq 0$.
a); **b)**; **c)**; **d)**; **e)** – (*nota* 5); **f)** – (*nota* 7); **g)**; **h)** – (*nota* 9)

4. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuaţiile: **a)** $-x + 4 \leq 0$; **b)** $-5x + 3 < 0$; **c)** $-9x - 3 \geq 0$; **d)** $-9x \geq -3x + 12$; **e)** $-9x \leq -17x$; **f)** $3(1 - x) + 4(x - 5) \leq -3(x - 1) + 4$; **g)** $3(x - 1) - \frac{2-x}{3} \leq 4(x-1) - \frac{x-5}{2} - x$; **h)** $|x - 3| \leq 2$; **i)** $|3 - 5x| \leq 0$; **j)** $|4x - 8| \leq 15$; **k)** $|2x - 4| \leq 0$. (*nota* 7)

5. Determinaţi elementele mulţimilor: $A = \{x \in \mathbb{N}^* / -3 \leq x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z}^* / -3 \leq x < 4\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 3\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 2\}$; $E = \{x \in \mathbb{Z}^* / -10 \leq 4x + 5 \leq 27\}$; $F = \{x \in \mathbb{Q} / \frac{4-x}{|x-5|} < 0\}$;
$G = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x+7}{x^2+2x+2} > 0\}$; $H = \{x \in \mathbb{R} / \frac{|x|-5}{(x^2+1)|x+4|} < 0\}$; $I = \{x \in \mathbb{R} / \frac{|2x+3|(x^2+7)}{2-|x|} < 0\}$.
A, B, C – (*nota* 7); D, E – (*nota* 9); F, G, H, I – (*nota* 10)

6. Determinaţi numerele reale a pentru care expresia $\sqrt{3-5a} + \sqrt{7a-1}$ are definită valoarea. (*nota* 9)

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

GEOMETRIE

CAPITOLUL I
ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

I. 1. Introducere. Reguli (convenţii) de reprezentare în plan a figurilor geometrice

Să reţinem:

➲ Alegem ca plan de desen un plan vertical (planul tablei).

➲ Segmentele orizontale sau verticale paralele cu planul de desen vor fi reprezentate prin segmente orizontale, respectiv, verticale congruente cu cele date.

➲ Segmentele perpendiculare pe planul de desen vor fi reprezentate înclinate faţă de orizontală şi cu lungimile reduse.

➲ Pentru toate celelalte linii şi segmente ne alegem un anumit unghi cu care le vom înclina.

➲ În acest mod dreptele paralele vor fi reprezentate în plan tot prin drepte paralele.

➲ Raportul în care un punct împarte un segment rămâne acelaşi.

➲ Unghiurile se deformează: unghiurile drepte pot să apară cu unghiuri ascuţite sau obtuze, unele unghiuri ascuţite pot să apară ca unghiuri obtuze etc.

➲ Liniile care, în realitate nu se văd vor fi desenate punctat (cu linie discontinuă).

Să observăm:

Exemple de aplicare a regulilor (convenţiilor) prezentate mai sus:

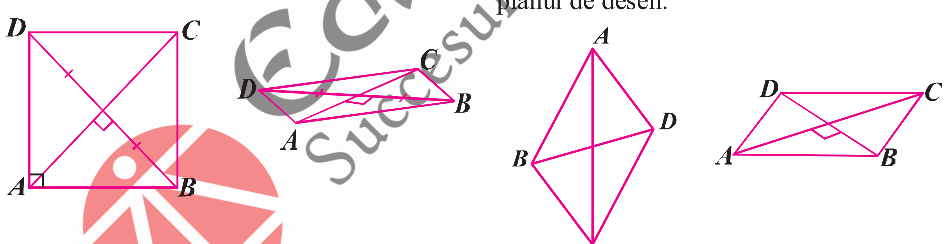
1) Un pătrat *ABCD*

a) În plan vertical paralel cu planul de desen.

b) În plan orizontal cu diagonala DB paralelă cu planul de desen.

c) În plan vertical cu diagonala AC perpendiculară pe planul de desen.

d) În plan orizontal cu latura AB paralelă cu planul de desen.



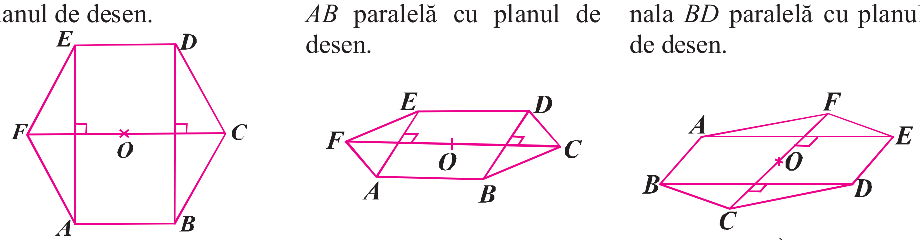
a) b) **Fig. 1** c) d)

2) Un hexagon regulat *ABCDEF*

a) În plan vertical paralel cu planul de desen.

b) În plan orizontal cu latura AB paralelă cu planul de desen.

c) În plan orizontal cu diagonala BD paralelă cu planul de desen.

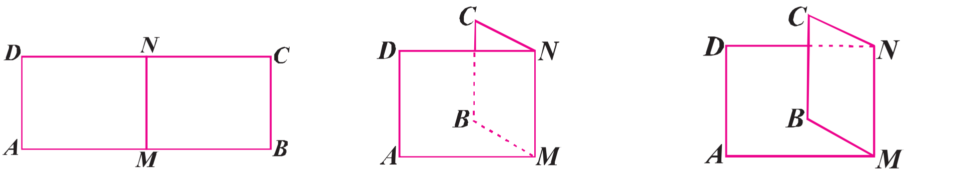


a) **Fig. 2** b) c)

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

3) O suprafață dreptunghiulară $ABCD$

În plan vertical paralel cu planul de desen	Pliată după linia mijlocie MN (latura BC „în spate“)	Pliată după linia mijlocie MN (latura BC „în față“)



a) b) c)

Fig. 3

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

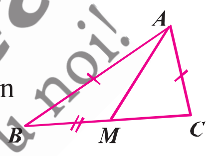


Fig. 4

1. În **figura 4** este reprezentat un triunghi isoscel ABC cu baza BC în care segmentul AM este mediană. Comparați măsurile unghiurilor:
a) $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$; **b)** $\sphericalangle AMB$ și $\sphericalangle AMC$. (*nota 5*)

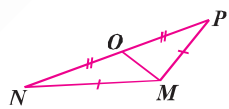


Fig. 5

2. În **figura 5** este reprezentat triunghiul dreptunghic isoscel MNP cu ipotenuza PN. Dacă punctul O este mijlocul segmentului PN, stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:
a) $\sphericalangle MOP \equiv \sphericalangle PMN$; **b)** $\sphericalangle OMN \equiv \sphericalangle PMO$; **c)** $OM \equiv ON$. (*nota 5*)

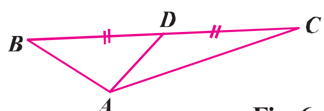


Fig. 6

3. În **figura 6** este reprezentat un triunghi echilateral ABC în care s-a notat cu D mijlocul laturii BC.
Precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:
a) $\sphericalangle BAD > \sphericalangle C$;
b) $\sphericalangle ADC = 90°$; **c)** $AD < DC$. (*nota 5*)

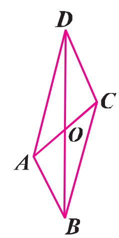


Fig. 7

4. În **figura 7** este reprezentat un pătrat $ABCD$, iar $\{O\} = AC \cap BD$.
Comparați: **a)** lungimile segmentelor OA și OB;
b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle COD$;
c) măsurile unghiurilor $\sphericalangle OAB$ și $\sphericalangle OBC$. (*nota 5*)

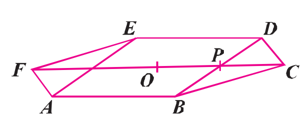


Fig. 8

5. În **figura 8** este reprezentat un hexagon regulat $ABCDEF$ în care s-a notat cu O mijlocul diagonalei FC.
Comparați:
a) lungimile segmentelor FC și BE;
b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle DEA$ și $\sphericalangle EFA$;
c) măsurile unghiurilor $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle DPC$ unde $\{P\} = FC \cap BD$. (*nota 7*)

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

Teste recapitulative

⌛ Test 14

I. Completați spațiile punctate:

1. Dacă $a \perp \alpha$ şi $b \subset \alpha$, atunci $\sphericalangle(a, b) = ...$ °. (5p) (*nota* 5)

2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu $AB = 7$ cm şi $AA' = 11$ cm. Distanţa de la B' la AB este egală cu ... cm. (5p) (*nota* 5)

3. $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu lungimea muchiei de 4 cm. Distanţa de la D' la AC este egală cu ... cm. (5p) (*nota* 5)

4. Dacă $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 8$ cm şi $BC = 6$ cm iar $MA \perp (ABC)$, $MA = 6$ cm, atunci distanţa de la M la BC este egală cu ... cm. (10p) (*nota* 5)

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată. Măsura unghiului dintre planele (ABC) şi (CDD') este egală cu ... °. (5p) (*nota* 5)

6. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Măsura unghiului dintre planele (ABB') şi (ACC') este egală cu ... °. (10p) (*nota* 5)

7. $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 3$ m, $BC = 6$ m, $AA' = 6\sqrt{3}$ m. Distanţa de la A la dreapta $B'C$ este egală cu ... m. (5p) (*nota* 7)

8. Se dau propoziţiile: p_1: $a \perp \alpha$ şi $a \parallel \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$; p_2: $\alpha \perp \beta$ şi $a \parallel \beta \Rightarrow a \perp \alpha$; p_3: $\alpha \perp \beta$ şi $b \perp \beta \Rightarrow b \parallel \alpha$ sau $b \subset \alpha$; p_4: $a \perp b$ şi $a \perp \alpha$ iar $b \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$; p_5: $\beta \perp \alpha$ şi $\gamma \perp \alpha \Rightarrow \beta \parallel \gamma$, unde a, b sunt drepte, iar α, β, γ sunt plane. Dintre aceste propoziţii sunt adevărate propoziţiile ... . (5p) (*nota* 9)

9. Într-o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei de 6 cm, unghiul format de planul unei feţe laterale cu planul bazei are măsura de 60°.
a) lungimea înălţimii piramidei este egală cu ... cm;
b) lungimea muchiei laterale este egală cu .... cm. (5p) (*nota* 7)

II. Scrieţi rezolvările complete:

1. Fie M mijlocul laturii AB a unui dreptunghi $ABCD$ şi $\{N\} = DB \cap MC$ iar $NP \perp (ABC)$. Dacă $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm şi $NP = 6$ cm, să se determine distanţa de la punctul P la dreptele: **a)** AB; **b)** BC; **c)** AD; **d)** DC. (10p) (*nota* 7)

2. Un triunghi isoscel ABC cu baza $BC = 2a$ şi înălţimea $AD = a\sqrt{2}$ se îndoaie după dreapta AD astfel încât unghiul diedru format de semiplanele care conţin triunghiurile ΔABD şi ΔACD să aibă măsura de 120°. Să se determine:
a) măsura $\sphericalangle BAC$ după îndoire; (5p) (*nota* 9)
b) tangenta unghiului format de planele (ABC) şi (DBC); (5p) (*nota* 9)
c) distanţa de la punctul D la planul (ABC). (5p) (*nota* 9)

3. Pătratul $ABCD$ şi triunghiul echilateral EBC sunt incluse în plane diferite. Determinaţi tangenta unghiului format de planele (ABC) şi (EBC) ştiind că $\sphericalangle(EC, (ABC)) = 30°$. (10p) (*nota* 10)

Timp de lucru: 2 ore; se acordă 10 puncte din oficiu.

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

19. Perimetrul secțiunii axiale a unui con circular drept cu înălțimea de 12 cm este egal cu 48 cm. Aflați generatoarea și raza conului. (*nota 9*)

20. Înălțimea unui con circular drept este de 60 cm, iar suma dintre lungimea generatoarei și a razei este de 1 m. Aflați:
a) raza și generatoarea conului;
b) lungimile proiecțiilor înălțimii și razei conului pe o generatoare a sa. (*nota 9*)

21. Un trunchi de con are aria secțiunii axiale egală cu 432 cm^2, înălțimea de 36 cm și diferența razelor de 4 cm. Determinați lungimile razelor bazelor trunchiului și a generatoarei acestuia. (*nota 10*)

22. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel ortodiagonal (are diagonalele perpendiculare) cu aria de 576 cm^2. Dacă generatoarea conului este egală cu 26 cm, aflați înălțimea și razele trunchiului de con. (*nota 10*)

II. 2. Piramida triunghiulară regulată. Tetraedrul regulat. Probleme rezolvate

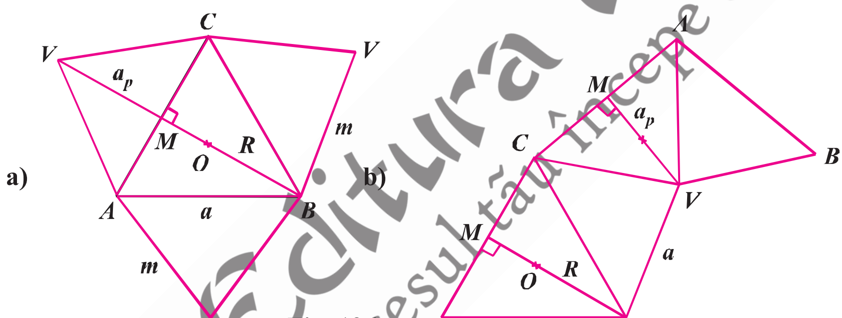


Fig. 136

Desfășurarea piramidei triunghiulare regulate (fig. 136 a și 136 b)

$a = R\sqrt{3}$; $A_b = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$A_l = \dfrac{P_b \cdot a_p}{2}$; $A_t = A_l + A_b$;

$V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$ (**fig. 137**).

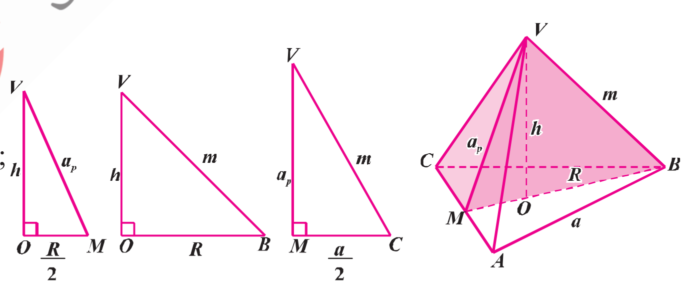


Fig. 137

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

REZULTATE, INDICAŢII, SOLUŢII, COMENTARII

ALGEBRĂ. CAPITOLUL I. Recapitulare şi aprofundare. Numere reale

I. 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. *Probleme de recunoaştere a numerelor naturale, întregi, raţionale, iraţionale.*

1. a) 0,625; 0,28; 0,024; 0,0125; 0,075; 0,08(3); **b)** 0,(03); 0,(025641); 0,(571428); 0,4375; 0,22; 0,(6); **c)** 1,1(6); 0,0625; 1,(285714); 0,15625; 0,14(6). **2. a)** $\mathbb{Z}$; **b)** $\mathbb{N}$; **c)** $\mathbb{N}$; **d)** $\mathbb{Q}$; **e)** $\mathbb{Z}^*$; **f)** $\mathbb{N}$; **g)** $\mathbb{R}$; **h)** $\mathbb{Q}$; **i)** $\mathbb{Z}$; **j)** $\varnothing$; **k)** $\mathbb{Z}_-$; **l)** $\varnothing$; **m)** $\varnothing$. **3. a), b), c), h)** periodică simplă; **d), e), g), j)** periodică mixtă; **f), i)** un număr finit de zecimale. **4. a)** $\frac{9}{5};\frac{63}{20};\frac{9}{20};\frac{10}{3};-\frac{60}{11};\frac{5}{37};\frac{7}{6}$; **b)** $\frac{131}{90};\frac{1001}{900}$; $\frac{617}{4995};-\frac{9}{50};\frac{31}{6}$; **c)** $\frac{41631}{9990};\frac{712}{225};-\frac{11}{9};\frac{211}{900}$; **d)** $\frac{45}{11};2\frac{7}{60};1\frac{11}{12};3\frac{3}{16}$. **5. a)** 3; **b)** 7; **c)** 1. **6.** M = $\{7;\ 9;\ 20;\ 10^7\}$; P = $\{-6;\ 9;\ 7;\ -10;\ 20;\ 10^7;\ -3^8\}$; T = $\{1,3(6);\ -1,5;\ -3,1(6);\ -6;\ 9,7;\ -\frac{3}{5};\ \frac{7}{6};\ 7,167;\ -4,(15);\ -10;\ 20; 10^7;\ -3^8\}$; S = $\{\sqrt{3};\ -\sqrt{5};\ \pi;\ -3\sqrt{2};\ 5\sqrt{6};\ -\pi;\ \sqrt{11};\ -\sqrt{2}\}$. **7. a)** A; **b)** A; **c)** F; **d)** A; **e)** A; **f)** A; g) A; h) F; i) A; j) F; **k)** A; **l)** A. **8.** $D_{12} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; $D_{-8} = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$; $D_{-14} = \{1; 2; 7; 14\}$. **9.** A = {5, 6, 8, 12}; B = {1, 2, 4, 5, 8, 13}; C = {–2}; D = {5, 9} $\frac{x+2}{x-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x-1 / x+2 \Rightarrow x-1 / (x-1)+3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x-1/3 \Rightarrow x-1 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Rightarrow$ E = {2, 4}; F = {0, 2}; $\frac{x(x+1)}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x+1/x^2+x \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x+1/2x^2+2x \Rightarrow 2x+1/x(2x+1)+x \Rightarrow 2x+1/x \Rightarrow 2x+1/2x \Rightarrow 2x+1/(2x+1)-1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x+1/1 \Rightarrow 2x+1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow$ G = {0; –1}; H = {(–6, 1), (6, –1), (–2, 3), (3, –2), (1, –6), (2, –3), (–3, 2), (–1, 6)}; I = {–4, –2, –1, 1}. **10. a)** 21; **b)** 31; **c)** 123; **d)** 1,5; **e)** 2,5; **f)** 1,01; **g)** $\frac{5}{7}$; h) $\frac{13}{15}$; **i)** $1\frac{11}{13}$; **j)** $\frac{5}{4}$; **k)** $\frac{31}{12}$; **l)** $2\frac{9}{13}$. **11.** $(x, y) \in \{(2, 5), (5, 6), (8, 9)\}$. **12. a)** Presupunem că $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Putem scrie $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$. Avem: $6 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 6n^2 = m^2 \Rightarrow 2/m^2$, 2 prim $\Rightarrow 2/m \Rightarrow m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) şi, deci $6n^2 = 4k^2 \Rightarrow 3n^2 = 2k^2 \Rightarrow 2/n$, contradicţie; **b)** $5n+2$ şi $5n+3$ nu sunt pătrate perfecte oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; **c)** Produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100$ se divide cu 97 şi nu se divide cu 97^2, deci nu este pătrat perfect etc.; **d)** Ultima cifră a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2000 + 2$ este 2, deci nu este pătrat perfect. **13. a)** Presupunem prin absurd că $\sqrt{5} + 3 = r$, $r \in \mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt{5} = r - 3 \in \mathbb{Q}$, contradicţie; **d)** Presupunem prin absurd că $\sqrt{5} + \sqrt{3} = r$, $r \in \mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt{5} = r - \sqrt{3} \Rightarrow 5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{r^2-2}{2r} \in \mathbb{Q}$, contradicţie; **f)** $\sqrt{29+12\sqrt{5}} = \sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2} = 3 + 2\sqrt{5}$. **14. a)** $[-5,16] = -6$; $\{-5,16\} = 0,84$; **b)** $[3,14] = 3$; $\{3,14\} = 0,14$; **c)** $[4,(7)] = 4$; $\{4,(7)\} = \frac{7}{9}$; **d)** $\left[\frac{10}{4}\right] = 2$; $\left\{\frac{10}{4}\right\} = \frac{1}{2}$; **e)** $\left[-5\frac{4}{5}\right] = -6$; $\left\{-5\frac{4}{5}\right\} = \frac{1}{5}$; **f)** $\left[-\frac{9}{4}\right] = -3$; $\left\{-\frac{9}{4}\right\} = \frac{3}{4}$; **g)** $\left[\frac{2n+3}{2n+4}\right] = 0$; $\left\{\frac{2n+3}{2n+4}\right\} = \frac{2n+3}{2n+4}$; **h)** $\frac{3n+5}{3n+4} = 1 + \frac{1}{3n+4}$ etc; **i)** $4 < \sqrt{17} < 5$, deci $[\sqrt{17}] = 4$ şi $\{\sqrt{17}\} = \sqrt{17} - 4$; **j)** $[\sqrt{7}-2] = 0$; $\{\sqrt{7}-2\} = \sqrt{7}-2$; **k)** $[\sqrt{13}-4] = -1$; $\{\sqrt{13}-4\} = \sqrt{13}-3$.

15. a) $\sqrt{2013+2(1+2+3+...+2012)} = \sqrt{2013 + {}^{1}\cancel{2} \cdot \frac{2012 \cdot 2013}{\cancel{2}_1}} = \sqrt{2013+2012 \cdot 2013} = \sqrt{2013^2} = 2013 \in \mathbb{Z}$, deci propoziţia este adevărată; **b)** $\sqrt{343^2-(336^2+7 \cdot 336)} = \sqrt{343^2-336 \cdot 343} = \sqrt{343 \cdot 7} = \sqrt{7^4} = 7^2 \in \mathbb{Q}$, deci propoziţia este adevărată; **c)** $\sqrt{\frac{1}{10 \cdot 11}+\frac{1}{11 \cdot 12}+\frac{1}{12 \cdot 13}+...+\frac{1}{99 \cdot 100}} = \sqrt{\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}} =$

Editura Taida Succesul tău începe cu noi!

$A = \{n \in \mathbb{Z} / n = 12k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

9. A = {1; 2; 3; 6}; B = {1; 2; 3; 6}; C = {3; 7; 9; 37}. **10.** $\frac{6n+2020}{2n+3} = \frac{6n+9+2011}{2n+3} = \frac{3(2n+3)+2011}{2n+3} = 3 + \frac{2011}{2n+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n + 3 / 2011 \Rightarrow 2n + 3 \in \{-2011; -1; 1; 2011\} \Rightarrow M = \{-1007;$ $-2; -1; 1004\}$. **11.** P = {1; 2; 3; 4}. **12.** A = {–12; –11; –10; –9; –8; 8; 9; 10; 11; 12}.

13. $\frac{x+6}{9} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 6 = 9k, k \in \mathbb{Z}$. $|x| \le 3 \Rightarrow x \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$. Se obține $x = 3$, soluție, deci A = {3}.

14. $\{1; 5; 9; 13; 17; 21\} \subseteq A$; $\{3; 8; 13; 18; 23; 28\} \subseteq B$; $\{-11; -4; 3; 10; 17; 27\} \subseteq C$.

15. Notăm $|x - 2| = a$. $\frac{5+a}{3-a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - 3 / a + 5 \Rightarrow a - 3 / (a - 3) + 8 \Rightarrow a - 3 / 8 \Rightarrow a - 3 \in \{-8; -4; -2;$ $-1; 1; 2; 4; 8\} \Rightarrow a \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\} \Rightarrow |x - 2| \in \{1; 2; 4; 5; 7; 11\}$ deoarece $|x - 2| \ge 0$ etc.
16. B = {0; 1; 2; 4; 10}; C = {0; 2}; D = {1; 2; 3; 6; 9; 18} etc. **17.** B = {3}, $A = \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N}^* \setminus \{1; 2\})$.

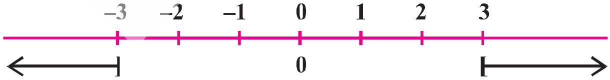
II. 2. *Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Proprietățile relației de inegalitate (ordine în $\mathbb{R}$)*

1. a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; **b)** Există o infinitate de numere: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$; $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \ldots$ etc.; **c)** $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{5}} \ldots$; $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \ldots$ etc. Există o infinitate de numere iraţionale cuprinse între 0 şi 1. ***Mulţimea numerelor reale este densă.*** **2. a)** A; **b)** F; **c)** F; **d)** A; **e)** A; **f)** A; **g)** A; **h)** A; **i)** F; **j)** A; **k)** A; **l)** A. **3. a)** $[-\sqrt{2}; 10)$; **b)** $(3; +\infty)$; **c)** $(-\infty; 0)$; **d)** $(0; +\infty)$; **e)** $(-\infty; 2)$; **f)** $(-4; 3]$. **4.** A = [–2; 3); B = [2; 5]; $C = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $D = [1; +\infty)$; $E = [4; +\infty]$; $F = (-\infty; -4)$; G = [1,5; 3,5); $H = (-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$; I = (–2,(5); –1,(8)]. **5.** B = {0; 1; 2}; C = {–2; –1; 0; 1; 2} etc. **6. a)** şi **h)** segment; **b), c), f)** şi **i)** semidrepte; **d), e)** reuniuni de semidrepte; **g)** mulţimea vidă.

II. 3. *Operații cu intervale de numere reale. Reuniunea. Intersecția. Diferența și incluziunea intervalelor (extinderi)*

1. a) A; **b)** F; **c)** A; **d)** A; **e)** A; **f)** F; **g)** A. **2.** [–2; 7], B = (–3; 0), $C = (-\infty; 3)$, $D = [2; +\infty)$.
3. a) [–2; 5); **b)** (–2; 2]; **c)** [–2; 7]; **d)** [–2; 2]; **e)** (–3; 0); **f)** {–3; –2; –1; 0; 1; 2}. **4. a)** (1; 3); **b)** [–4; 8]; **c)** [–3; –2]; **d)** $\mathbb{R}$; **e)** $(-\infty; 0)$; **f)** $[-3; +\infty)$; **g)** [–2; 3]; **h)** [0; 2); **i)** [1; 3]; **j)** [–5; –3); **k)** $(-\infty; -7)$; **l)** $\varnothing$.
5. $\{2\sqrt{2}; \sqrt{5}\}$. **6. a)** [–5; 5]; **b)** 6; **c)** 10; **d)** $m \notin A \Rightarrow m < -5$ sau $m > 5$, deci $-m < -5$ sau $-m > 5$, adică $-m \notin A$. **7. a)** A; **b)** F; **c)** A; **d)** A. **8.** –1. **9.** $x = -2$, $y = 0$. **10. a)** {1; 2; 3; 4; 5; 6}; **b)** {1}; **c)** {–3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}; **d)** {1; 2}. **11.** Din relația 1° rezultă $a = 4$ și $b \ge 6$. Relația 2° implică $b \le 10$. Deci $a = 4$ și $b = 10$. **12.** A = [–3; 3], B = (–2; 6), C = [–6; 2].

13.



14. A = [–5; 5], B = (–1; 5], C = [–5,5; –0,5], $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $E = (-\infty; -1{,}5] \cup [3{,}5; +\infty)$, $F = (-\infty; -\sqrt{5} - 3) \cup (3 - \sqrt{5}; +\infty)$. **15.** $\sqrt{(4x+3)^2} = 5 \Leftrightarrow |4x + 3| = 5 \Leftrightarrow 4x + 3 \in \{-5; 5\}$. Cum $x \in \mathbb{Z}$ rezultă $x = -2$. Deci A = {–2}. $B = \left\{-\frac{13}{2}; -\frac{7}{2}\right\}$. C = {0}. **16.** $|-x + 2| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x - 2 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le$ $\le 5 \Leftrightarrow A = [-1; 5]$. $\frac{6x+5}{3} < 2 \Leftrightarrow 6x + 5 < 6 \Leftrightarrow x < \frac{1}{6} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$. $A \cup B = (-\infty; 5]$; $A \cap B =$

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

i) $(2x - 3 + 3x)(2x - 3 - 3x) = (5x - 3)(-x - 3)$; **j)** $(5x + x^2 - 2x)(5x - x^2 + 2x) = (x^2 + 3x)(-x^2 + 7x) = x^2(x + 3)(-x + 7)$; **k)** $\left(\frac{2}{3}x + \frac{7}{10}y^2\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{10}y^2\right)$; **l)** $\left(\frac{12}{5}x - 7y^2\right)\left(\frac{12}{5}x + 7y^2\right)$; **m)** $(3x - 1 + 3 - x) \cdot (3x - 1 - 3 + x) = (2x + 2)(4x - 4)$; **n)** $(2x + 1 + x^2 - 2x)(2x + 1 - x^2 + 2x) = (x^2 + 1)(-x^2 + 4x + 1)$;
o) $(3x + 1 + y^2 - 4y)(3x + 1 - y^2 + 4y)$. **5. a)** $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; **b)** $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$; **c)** $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$; **d)** $(9 - y^2)(9 + y^2) = (3 - y)(3 + y)(9 + y^2)$; **e)** $(4x^2 - 25)(4x^2 + 25) = (2x - 5)(2x + 5)(4x^2 + 25)$; **f)** $(9x^2 - 100)(9x^2 + 100) = (3x - 10)(3x + 10)(9x^2 + 100)$; **g)** $(25x^2 - 9y^2)(25x^2 + 9y^2) = (5x - 3y)(5x + 3y)(25x^2 + 9y^9)$; **h)** $(a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$. **6. a)** $(x - y)(x + y)$; **b)** $(m - 7)(7 + m)$; **c)** $(7 + 3x)(7 - 3x)$; **d)** $(5 + x)(5 - x)$; **e)** $\left(\frac{9}{8} + a\right)\left(\frac{9}{8} - a\right)$; **f)** $\left(\frac{5}{6}x + \frac{6}{7}y^2\right)\left(\frac{5}{6}x - \frac{6}{7}y^2\right)$; **g)** $(\sqrt{5}\,x + \sqrt{3})(\sqrt{5}\,x - \sqrt{3})$;

h) $(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$; **i)** $(10p + 9)(10p - 9)$; **j)** $\left(\frac{11}{8}x + 5y^2\right)\left(\frac{11}{8}x - 5y^2\right)$. **7. a)** $(x - 3 + 5)(x - 3 - 5) = (x + 2)(x - 8)$; **b)** $3(x - 1)(5x - 3)$; **c)** $-3(4x - 1)(2x + 3)$; **d)** $(5x + 1)(x - 5)$; **e)** $(x^2 - x + 5)(-x^2 + 5x + 5)$; **f)** $-x^2(x + 2)(x - 8)$. **8. a)** $[x - y + 3(a + b)]^2 = (x - y + 3a + 3b)^2$; **b)** $[(x + 5) - (y + 7)]^2 = (x - y - 2)^2$; **c)** $\left[\left(x - \sqrt{3}y\right) - 3\left(x + \sqrt{3}y\right)\right]^2 = (x - \sqrt{3}\,y - 3x - 3\sqrt{3}\,y)^2 = (-2x - 4\sqrt{3}\,y)^2 = 4(x + 2\sqrt{3}\,y)^2$.

III. 3.4. *Restrângerea ca pătrat.*

1. a) $-10x$ sau $10x$; **b)** 9; **c)** $9x^2$; **d)** $-4x^2$ sau $4x^2$; **e)** $9y^2$; **f)** $12x^2$; **g)** $\frac{1}{9}$; **h)** 9; **i)** $\frac{1}{49}$; **j)** $\frac{9}{4}$.

2. a) $(m + 1)^2$; **b)** $(t - 1)^2$; **c)** $(a - 2b)^2$; **d)** $(xy + 1)^2$; **e)** $a^2 - a + \frac{1}{4} = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$;

f) $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}x + x^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + x^2 = \left(\frac{1}{3} - x\right)^2$; **g)** $(2 - xz)^2$; **h)** $(x^2 + 3)^2$; **i)** $(5y - 4)^2$.

3. a) $(x + 8)^2$; **b)** $(x - \sqrt{2})^2$; **c)** $(\sqrt{3}\,x + 5)^2$; **d)** $(4 - 3x)^2$; **e)** $(2x - 5y)^2$; **f)** $(\sqrt{5}\,x + \sqrt{2})^2$; **g)** $(a - \sqrt{7})^2$; **h)** $(2x^2 - \sqrt{3}\,y)^2$; **i)** $\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$. **4. a)** $(2x + 3y + 2)^2$; **b)** $[(x - 1) - (y + 2)]^2 = (x - y - 3)^2$; **c)** $[(a^2 + b^2 + c^2) - 3c^2]^2 = (a^2 + b^2 - 2c^2)^2$; **d)** $(a^2 + 2b^2 + 1)^2$. **5. a)** $\left(x + \sqrt{3}\right)^2$; **b)** $\left(x - \sqrt{11}\right)^2$; **c)** $\left(y - 2\sqrt{3}\right)^2$;

d) $\left(2\sqrt{3}x + 1\right)^2$; **e)** $(a - 10)^2$; **f)** $(b - 3)^2$; **g)** $(5a + x + 3)^2$; **h)** $(x - 1 + x + 1)^2 = 4x^2$; **i)** $[4(2x - 3) - 3y]^2 = 8x - 3y - 12$; **j)** $\left[a + \sqrt{3}b - \left(a - \sqrt{3}b\right)\right]^2 = \left(2\sqrt{3}b\right)^2 = 12b^2$.

III. 3.5. *$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$ (extinderi).*

1. a) $(a - b - c)^2$; **b)** $(3a - b - 2c)^2$; **c)** $\left(a\sqrt{2} - b\sqrt{3} + c\sqrt{5}\right)^2$; **d)** $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2)^2 + x^2 + 1^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x + 2 \cdot x^2 \cdot 1 - 2x \cdot 1 = (x^2 - x + 1)^2$. ***Altă soluţie:*** $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x + x^2 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) + 1 = (x^2 - x + 1)^2$; **e)** $4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1 = 4x^4 + 9x^2 + 1 - 12x^3 - 4x^2 + 6x = (2x^2)^2 + (3x)^2 + 1^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3x - 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 2 \cdot 3x \cdot 1 = (2x^2 - 3x - 1)^2$.
Observaţie: La rezolvarea exerciţiilor de acest tip mulţi rezolvători optează pentru soluţia bazată pe restrângerea succesivă ca pătrat al unei sume de doi termeni: $4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1 = (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3x + (3x)^2 - 4x^2 + 6x + 1 = (2x^2 - 3x)^2 - 2(2x^2 - 3x) + 1 = [(2x^2 - 3x) - 1]^2 = (2x^2 - 3x - 1)^2$ **(vezi şi a doua soluţie la d)**; **f)** $(3x^2 - x + 1)^2$. **2. a)** $(x + 2y + 5z)^2$; **b)** $(5x + 3y + 2)^2$; **c)** $(x - a + 3)^2$; **d)** $(10x + 3y^2 - 1)^2$; **e)** $(x - y + 2)^2$; **f)** $\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}a + \sqrt{6}\right)^2$; **g)** $\left(\sqrt{5}x - 2y - \sqrt{2}\right)^2$; **h)** $(x^2 - x + 1)^2$.

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

V. 3. *Funcţii de forma $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a şi b sunt numere reale şi D este o mulţime finită de numere reale sau un interval nedegenerat ($D \neq \Phi$); interpretare geometrică; lecturi grafice.*

2. A, B, D, F. **3.** A, B, C, D, E, F $\in G_f$. **8. a), b), c), d)** Toate graficele conţin originea sistemului de coordonate; **e)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}x$. **10.** Graficele funcţiilor sunt drepte paralele. **11.** $m = 14$. **12. a)** $a^2 - 2 = 14 \Rightarrow a \in \{-4; 4\}$. **13. a)** $A(2; 2)$; **b)** $A\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$; **c)** orice punct de pe dreapta care este reprezentarea grafică a funcţiei; **d)** $A\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$; **e)** $A(9; 9)$; **f)** $A\left(-\dfrac{13}{15}; -\dfrac{13}{15}\right)$; **g)** $A(-17; -17)$; **h)** nu există; **i)** $A(-6; -6)$; **j)** nu există. **14. a)** $A(-3; -3)$, **b)** $B(1; 5)$; **c)** $C(\sqrt{3}; 2\sqrt{3} + 3)$; $D(-1; 1)$; $E\left(-\dfrac{9}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

15. $A \in G_f \Rightarrow (m+3)m + m - 2 = 3 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 5m - 5 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+5) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m \in \{-5; 1\}$. **16. a)** $A \in G_f \Rightarrow 2(a-2) + \dfrac{a+1}{3} = 2 \Rightarrow a = \dfrac{17}{7}$; **b)** $a = \dfrac{16}{5}$; **c)** $a = 2$.

17. a) $A \in G_f \Rightarrow f(0) = -3 \Rightarrow b = -3$. $B \in G_f \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$. Deci $a = 3$ şi $f(x) = 3x - 3$; **b)** $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$; **c)** $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{3}$. **18. a)** $f(x) = -x$; **b)** $f(x) = 3x$; **c)** $f(x) = -x$; **d)** $f(x) = -\dfrac{1}{3}x$; **e)** $f(x) = 0$; **f)** $f(x) = 0$. **19. a)** $A(1; 0)$; $B(0; -1)$; **b)** $A\left(\dfrac{-5}{4}; 0\right)$; $B(0; 5)$; **c)** $A\left(\dfrac{2}{3}; 0\right)$; $B(0; 2)$; **d)** $A\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$; $B(0; 2)$; **e)** $A\left(\dfrac{2}{3}; 0\right)$; $B\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$; **f)** $A\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}; 0\right)$; $B(0; -1)$. **20. a)** -1; **b)** $\dfrac{3}{2}$; **c)** 0; **d)** $m = 1$; **e)** $\dfrac{1}{2}$. **21. a)** $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$; **b)** $f(x) = \dfrac{-3}{2}x - 3$; **c)** $f(x) = x + 3$; **d)** $f(x) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{13}{5}$; **e)** $f(x) = \sqrt{3}x - 1$.

22. a) $A \in G_f \Rightarrow$ **(1)** $-2a + b = -2$. $B \in G_f \Rightarrow$ **(2)** $a + b = 3$. Din **(1)** şi **(2)** rezultă $a = \dfrac{5}{3}$ şi $b = \dfrac{4}{3}$. Deci $f(x) = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{3}$; **b)** $f(x) = 2$; **c)** $f(x) = -4x - 7$; **d)** $f(x) = -x + 2$; **e)** $f(x) = x - 3$; **f)** $f(x) = x$. **23. a)** $\dfrac{7}{9}$; **b)** 1; **c)** -4; **d)** $\dfrac{1}{2}$. **24.** $f(1) = a + 2 + b - 2 = 4 \Leftrightarrow$ **(1)** $a + b = 4$. $f(-1) = -a - 2 + b - 2 = -2 \Leftrightarrow$ **(2)** $-a + b = 2$. Din **(1)** şi **(2)** rezultă $a = 1$, $b = 3$. Deci $f(x) = 3x + 1$. **25. a)** $M(0; 3)$; **b)** $M\left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{9}{5}\right)$; **c)** $M(5; 5)$; **d)** $M\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right)$; **e)** $M\left(\dfrac{-6}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$; **f)** $M(-8; -3)$. **26. a)** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 3 = -\dfrac{1}{2}x + 7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 4$ şi $f(4) = 5$. $G_f \cap G_g = \{M\}$, unde $M(4, 5)$; **b)** $AM = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$; $MB = 5\sqrt{5}$ şi $AB = \dfrac{25}{2}$ etc. (**fig. 180**). **27.** $A \in G_f \cap G_g \Leftrightarrow m^2 - 4 = 5$ şi $\dfrac{2}{3}m + m = 5$, de unde rezultă $m = 3$.

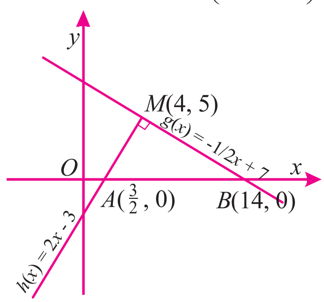


Fig. 180

b), **c)** - raţionament analog. **9. a)** $A'C' \parallel AC$, $AC \perp BD$ etc. **c)** Segmentul $D'O$ este mediană în triunghiul $\Delta ACD'$ echilateral, deci este şi înălţime şi cum $A'C' \parallel AC$, rezultă $D'O \perp A'C'$.
10. a) $GH \parallel AD$ şi $AD \perp BF \Rightarrow GH \perp BF$ etc.

I. 4.3. Dreaptă paralelă cu un plan

1. 1). adevărate: **c). 2). c)**. **3.** Nu! **4. a)**, **b)**, **c)** este paralelă cu planul; **d)** , **e)** - înţeapă planul. **5.** $CD \parallel AB$, $AB \subset \alpha \Rightarrow CD \parallel \alpha$. **6. a)** Segmentele $A'F$ şi BE sunt congruente şi sunt incluse în drepte paralele, deci $BEFA'$ paralelogram, ceea ce implică $EF \parallel A'B$ şi cum $A'B \subset (ABB')$, rezultă $EF \parallel (ABB')$.
b) $AF \subset (ADD')$; **c)** FC înţeapă planul $(AA'B)$; **d)** Se arată că în patrulaterul $AEC'F$ laturile opuse sunt congruente două câte două etc. $AF \parallel (BB'C)$. **7. a)** $EF \parallel (ABC)$; **b)** $NP \parallel (ACF)$; **c)** $MN \parallel AB$, $AB \parallel EF$, deci $MN \parallel EF$; $MN \parallel (EFC)$; **d)** înţeapă planul; **e)** $BE \subset (AFP)$. **8. a)** $MN \parallel (ADC)$; **b)** $BC \parallel (MNP)$; **c)** MN înţeapă planul (ABC). **9.** b „înţeapă" planul α. Se demonstrează prin reducere la absurd.
10. $b \| \alpha$ sau $b \subset \alpha$. Se demonstrează prin reducere la absurd. **11. a) i)** Segmentul OL este linie mijlocie în ΔACF, deci $OL \parallel AF$ şi cum $AF \subset (ABE)$, rezultă că $OL \parallel (ABE)$ (**fig. 201**). **ii)** Segmentul OL este linie mijlocie în ΔBDG etc.
b) dreapta OL înţeapă planul (ADE).
12. Există o infinitate de drepte paralele.
13. *Existenţa.* Printr-un punct al dreptei g se duce dreapta h, paralelă la d. Planul determinat de dreptele h şi g este paralel la d.
Unicitatea. Se demonstrează prin reducere la absurd.

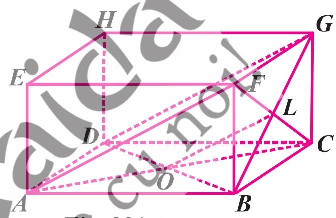


Fig. 201

14. Fie α planul determinat de dreptele a şi b şi O punctul în care acestea se intersectează. Presupunem prin absurd că d nu înţeapă planul α. Atunci $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$. **1.** Dacă $d \subset \alpha$, se obţine că în α există două perpendiculare distincte pe d care conţin punctul O, ceea ce este absurd.
2. Dacă $d \parallel \alpha$, se construieşte printr-un punct al planului α, dreapta g paralelă cu d. Rezultă că $g \subset \alpha$ şi $g \perp \alpha$, $g \perp b$ şi problema se reduce la cazul **1.**

I. 4.4. Plane paralele, aplicaţii. Teorema lui Thales în spaţiu (extinderi)

2. a) Da. **b)** Nu, daţi un contraexemplu. **3.** a înţeapă planul β. Reducere la absurd. **4.** $b \subset \alpha$ sau $b \parallel \alpha$. Reducere la absurd. **5. b)** paralele. **6. a)** Feţele paralelipipedului dreptunghic sunt dreptunghiuri. **i)** $AB \parallel A'B'$ şi $BC \parallel B'C'$ implică $(ABC) \parallel (A'B'C')$ şi cum $(A'B'C') = (A'D'C')$, rezultă $(ABC) \parallel (A'D'C')$; **ii)**, **iii)** - analog cu **a)**. **b)** - paralele. **8.** $(A'B'D')$, $(D'DC)$, $(D'DB)$, $(D'AB)$, $(D'BC)$, $(D'AC)$.
10. a) $AC \parallel A'C'$, $B'C \| A'D$ etc. **11. a)** $BM \parallel AN$ şi $BC \parallel AD \Rightarrow (BMC) \parallel (AND)$. **b)** Nu. Dacă ar fi paralele ar rezulta că dreptele MN şi DC sunt coplanare, absurd. **12.** Se arată că $MN \parallel DC$ şi MN nu este congruent cu DC şi rezultă că $MNDC$ este trapez, deci DN şi CM sunt concurente. $(AND) \cap (BCM) = EF$, unde $E \in AD \cap BC$ şi $F \in DN \cap CM$. **13.** Punctele M, N, P aparţin intersecţiei planelor (ABC) şi (DEF) deci sunt coliniare. Dreapta MN şi punctul O determină planul (OMN) şi cum $P \in MN$, rezultă că O, M, N, P sunt puncte coplanare. **14. a)** Dreptele concurente AB şi AE din planul (ABE) sunt paralele respectiv cu DC şi DF. **b)** Reducere la absurd. Dacă BE şi CF nu ar fi paralele, atunci, fiind coplanare, ar avea un punct comun şi ar rezulta că planele (ABE) şi (CDF) au un punct comun, absurd.
c) Fie $AD \cap BC = \{G\}$ şi $AD \cap EF = \{H\}$. Cum $H, G \in \alpha$ iar AD nu poate avea decât un punct comun cu α, rezultă $G = H$.
15. Fie $d = (ABC) \cap \alpha$. Se arată că $d \parallel BC$ şi $MN \parallel BC$ şi rezultă $MN \parallel d \Rightarrow MN \parallel \alpha$. **16.** Fie P mijlocul segmentului AD (**fig. 202**). Demonstraţi că punctele M, P, N sunt necoliniare şi că $(MNP) \parallel \alpha$.
17. Se aplică teorema: „**Dacă un plan intersectează două plane paralele, intersecţiile sunt drepte paralele.**" Analizaţi două cazuri: **1)** A aparţine segmentului BC; **2)** B aparţine segmentului AC.
18. a) Se arată că patrulaterul $BMGN$ este paralelogram şi rezultă $BM \parallel GN$. Cum $AB \parallel HG$, rezultă că $(ABM) \parallel (NGH)$. **b)** Fie $NP \perp BM$, $P \in BM$. (**fig. 203**) Se arată că $NP \perp (ABM)$ şi rezultă că distanţa dintre planele (ABM) şi (NGH) este egală cu lungimea segmentului NP. Se constată că $BCMN$ este pătrat şi se obţine $NP = 2\sqrt{2}$ cm.

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

(**fig. 207**). Generatoarea conului = VA = 15 cm şi $VO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 7{,}5\sqrt{3}$ cm. $O'B' \parallel OB \Rightarrow \Delta VO'B' \sim$

$\sim \Delta VOB$ (**t.f.a.**) $\Rightarrow \dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{O'B'}{OB} = \dfrac{VB'}{VB} \Rightarrow \dfrac{2}{7{,}5} = \dfrac{VB'}{15} \Rightarrow VB' = 4$ cm. $BB' = VB - VB' = 15 - 4 = 11$ cm.

$VO' = \dfrac{2}{7{,}5} \cdot 7{,}5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. $OO' = VO - VO' = 7{,}5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5{,}5\sqrt{3}$ cm.

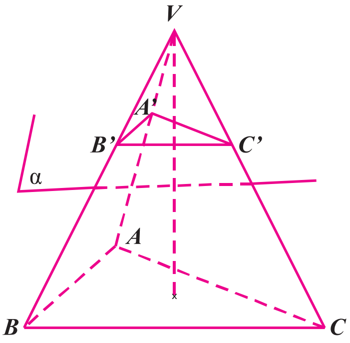


Fig. 205

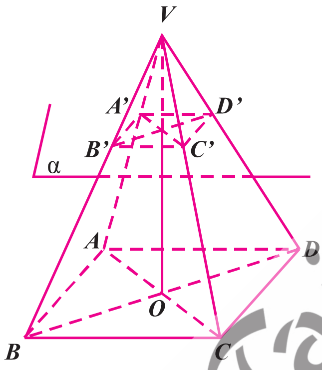


Fig. 206

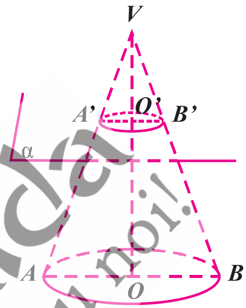


Fig. 207

I. 5.1. Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan, aplicații: distanța de la un punct la un plan; înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept

1. $AB = 6$ cm; $PM = \sqrt{91}$ cm; $PB = PC = 10$ cm. **2.** $PA = PC = 5$ cm; $PB = \sqrt{41}$ cm; $PO = \sqrt{17}$ cm. **3.** Din $MA \perp \alpha$ şi $AB, AC \subset \alpha$ rezultă $MA \perp AB$ şi $MA \perp AC$. **a)** $\Delta MAB \equiv \Delta MAC$ (C.C) implică $MB = MC$. **b)** $\Delta MAB \equiv \Delta MAC$ (**I.C.**) implică $AB = AC$. **4. a) i)** $ABB'A'$ şi $ADD'A'$ sunt dreptunghiuri, deci avem $AA' \perp AB$ şi $AA' \perp AD$ şi cum dreptele AB şi AD sunt concurente şi sunt incluse în planul (BCD), rezultă $AA' \perp (BCD)$. **ii), iii)** şi **iv)** se demonstrează analog. **b)** *Într-un paralelipiped dreptunghic dreapta-suport a fiecărei* ***muchii*** *este* ***perpendiculară*** *pe planele fețelor pe care le intersectează.*

5. a) $HE \perp (GHL)$, deci $HE \perp LG$; **b)** analog cu **a)**; **c)** $HL \perp (IJK)$ şi $MN \subset (IJK)$ implică relația cerută. **6. a)** $BB' \perp (ABC)$ implică $BB' \perp AC$, adică $AC \perp BB'$ şi cum $AC \perp BD$ ($ABCD$ este pătrat), rezultă $AC \perp (B'D'D)$. **b)** Avem: $B'D' \perp A'C'$ ($A'B'C'D'$ este pătrat) şi $B'D' \perp CC'$ (deoarece $CC' \perp (B'D'C')$) ceea ce implică $B'D' \perp (A'C'C)$ etc. **7.** $MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp DC$, $MA \perp BC$, $MA \perp BD$. **a)** $CD \perp AD$ şi $CD \perp MA \Rightarrow CD \perp (MAD)$; **b)** $BC \perp AB$ şi $BC \perp MA \Rightarrow BC \perp (MAB)$; **c)** $BD \perp AC$ şi $BD \perp MA \Rightarrow$ $BD \perp (MAC) \Rightarrow BD \perp MC$; **d)** Din $DC \perp (MAD)$ şi $AP \subset (MAD)$ rezultă $DC \perp AP$. $AP \perp DC$ şi $AP \perp MD \Rightarrow AP \perp (MCD)$. **8. a)** $CD \perp (MAD)$ (**vezi problema 7**), deci $d(C, (MAD)) = CD = 2$ cm;

b) Se arată că $BD \perp (MAC)$. $d(B, (MAC)) = BO$, unde $\{O\} = AC \cap BD$ şi cum $BO = \dfrac{BD}{2} = \sqrt{2}$ cm, rezultă că $d(B, (MAC)) = \sqrt{2}$ cm. **c)** $d(A, (MCD)) = AP$, unde P este proiecția punctului A pe MD (**vezi problema 7**). Cu teorema lui Pitagora şi teorema a doua a înălțimii, din ΔMAD se obține $AP = 1{,}2$ cm.

9. Cu reciproca teoremei lui Pitagora se arată că $AB \perp AC$ şi $AB \perp AD$, de unde rezultă $AB \perp (ACD)$ etc.

10. a) Rezultă din $AB \perp (BCC')$ şi $B'C \subset (BCC')$. **b)** $B'C \perp BC'$ ($BCC'B'$ - pătrat) şi $B'C \perp AB$ implică $B'C \perp (ABC')$. **c)** Rezultă din **b)**. **11.** MO este mediană în triunghiurile isoscele MAC şi MBD. Rezultă $MO \perp AC$ şi $MO \perp BD$ etc. **12. a)** $AC \perp AB$ şi $AC \perp AD \Rightarrow AC \perp (ABD) \Rightarrow AC \perp BD$. **b)** $AB \perp DC$ şi $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ADC) \Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow \sphericalangle BAD = 90°$. **13.** Fie $P \in AB$ astfel încât $PA \equiv PB$. Avem $MP \perp AB$ şi $NP \perp AB$, deci $d \perp (MNP)$ de unde $d \perp g$. **14.** Fie $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$, $A', B' \in \alpha$. Rezultă că $AA' \parallel BB'$, deci punctele A, B, A', B' sunt coplanare şi $(AA'B) \cap \alpha = A'B'$. Dacă $AB \parallel \alpha$, rezultă $A'B' \parallel AB$ şi cum $AA' \parallel BB'$, se obține că $AA'B'B$ este paralelogram, deci $AA' \equiv BB'$. Reciproc, dacă $AA' \equiv BB'$, rezultă că $AA'B'B$ este paralelogram, deci $AB \parallel A'B'$ şi, prin urmare, $AB \parallel \alpha$. **15.** Fie $AB \cap \alpha = \{M\}$.

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

II. 6. Prisma dreaptă cu baza un pătrat (patrulateră regulată).

1. a) $h = 11$; $\mathcal{A}_\ell = 132$; $\mathcal{V} = 99$; $d = \sqrt{139}$; **b)** $a = 9$; $\mathcal{A}_t = 342$; $\mathcal{V} = 405$; $d = \sqrt{187}$; **c)** $a = 5$; $\mathcal{A}_\ell = 200$; $\mathcal{A}_t = 250$; $d = 5\sqrt{6}$; **d)** $h = 2{,}5\sqrt{2}$, $\mathcal{A}_\ell = 40\sqrt{2}$, $\mathcal{A}_t = 8(5\sqrt{2}+4)$; $d = \dfrac{\sqrt{178}}{2}$; **e)** $a = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; $\mathcal{A}_\ell = 120\sqrt{2}$; $\mathcal{A}_t = 5(24\sqrt{2}+5)$; $V = 150$; **f)** $A_l = 4\sqrt{6}$; $A_t = 2(2\sqrt{6}+3)$; $V = 3\sqrt{2}$; $d = 2\sqrt{2}$.

2. $A_t = 32(\sqrt{161}+4)$ cm^2; $V = 64\sqrt{161}$ cm^3. **3.** $A_l = 100\sqrt{6}$ cm^2; $V = 375\sqrt{2}$ cm^3. **4.** $A_l = 80\sqrt{138}$ cm^2; $V = 400\sqrt{69}$ cm^3. **5.** $A_l = 360\sqrt{2}$ cm^2; $A_t = 90(4\sqrt{2}+5)$ cm^2; $V = 1350\sqrt{2}$ cm^3.

6. a) $BC = 6$ cm; $d^2 = 6^2 + 6^2 + 8^2 = 136$, de unde $d = 2\sqrt{34}$ cm;
b) $\mathcal{V} = 6^2 \cdot 8 = 288$ cm^3.

7. $BD = BB' = 10\sqrt{2}$ cm $= h$. $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 40 \cdot 10\sqrt{2} = 400\sqrt{2}$ cm^2.
$\mathcal{V} = 100 \cdot 10\sqrt{2} = 1000\sqrt{2}$ cm^3.

8. Fie $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ (**fig. 271**). Cu **T.3.⊥.** se obţine $AO' \perp B'D'$, deci d(A, $B'D'$) = AO' = 12 cm. Cum $AC = 12\sqrt{2}$ cm, rezultă că $A'O' = 6\sqrt{2}$ cm. În $\Delta AA'O'$ cu **teorema lui Pitagora** se obţine $AA'^2 = 144 - 72 = 72$. Deci $AA' = 6\sqrt{2}$ cm $= h$.
a) $\mathcal{A}_\ell = Pb \cdot h = 12 \cdot 4 \cdot 6\sqrt{2} = 288\sqrt{2}$ cm^2;

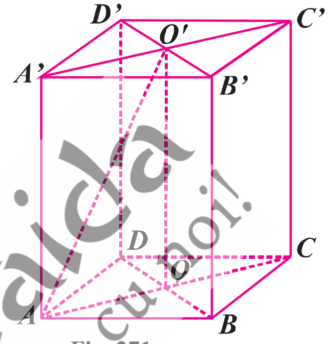


Fig. 271

b) $BD'^2 = 12^2 + 12^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 360$, de unde $BD' = 6\sqrt{10}$ cm; **c)** $\mathcal{V} = A_b \cdot h = 864\sqrt{2}$ cm^3;
d) $\mathcal{A}_{BDD'B'} = BD \cdot DD' = 144$ cm^2. **9. a)** $\text{pr}_{(BCB')} DB' = B'C$ şi $\sphericalangle DB'C = 30°$. Deci $DB' = CD \cdot 2 = 4a$. $DB'^2 = 4a^2 + 4a^2 + h^2 = 16a^2$, de unde $AA' = h = 2\sqrt{2}\,a$; **b)** $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 16\sqrt{2}\,a^2$; **c)** $\mathcal{V} = 8\sqrt{2}\,a^3$; **d)** Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Se arată cu **T.3.⊥.** că $A'O \perp BD$. Dacă $AP \perp A'O$, $P \in A'O$, atunci d(A, (BDA')) = AP etc. **10.** $\Delta A'FD' \equiv \Delta C'FD'$ (**C.C.**) $\Rightarrow A'F \equiv C'F$. Se arată că $AA' = 16$ cm. $V = 1024$ cm^3.
11. Volumul cărămizilor dintr-un metru cub de zidărie este 0,6144 m^3; al mortarului, 0,3856 m^3, ceea ce reprezintă 38,56% din volumul zidului. **12. a)** V interior al lăzii = $1 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$ m^3 = 500 l; **b)** volumul exterior = $1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}55 = 0{,}606375$ m^3. $m = V \cdot \rho = 0{,}106375 \cdot 750 = 79{,}78125$ kg.

II. 7. Cubul.

1. a) Fie a lungimea muchiei cubului. Avem $a\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$ cm; **d)** $a\sqrt{3} = 2x - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}$. Se obţine: $S = 2(2x-1)^2$ şi $V = \dfrac{\sqrt{3}(2x-1)^3}{9}$, unde $x \in \mathbb{R}$ cu $x > \dfrac{1}{2}$.

2. a) Muchia bazei are 6 cm; **b)** $A_t = 6 \cdot 6^2 = 216$ cm^2; **c)** $d = 6\sqrt{3}$ cm; **d)** $\mathcal{V} = 216$ cm^3. **3. a)** 12 cm; **b)** $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 4 \cdot 12 \cdot 12 = 576$ cm^2; **c)** $\mathcal{V} = 12^3 = 1728$ cm^3. **4. a)** $AC = EF \cdot 2 = 40\sqrt{2}$ cm $= AB\sqrt{2}$, de unde $AB = 40$ cm. $A_t = 6 \cdot AB^2 = 6 \cdot 40^2 = 9600$ cm^2; **b)** $\mathcal{A}_{BDB'} = \dfrac{\mathcal{A}_{BDD'B'}}{2} = \dfrac{BD \cdot BB'}{2} = \dfrac{40\sqrt{2} \cdot 40}{2} =$
$= 800\sqrt{2}$ cm^2; **c)** d = $40\sqrt{3}$ cm. **5. a)** Avem: $AB \cdot AB\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$, de unde $AB = 8$ cm. $\mathcal{A}_\ell = 8 \cdot 4 \cdot 8 = 256$ cm^2; **b)** $d = 8\sqrt{3}$ cm; **c)** $\mathcal{V} = 8^3 = 512$ cm^3. **7.** Muchia cubului are 10 cm. $A_t = 600$ cm^2; $V = 1000$ cm^3.
8. Muchia are lungimea de 24 cm. $V = 13824$ cm^3; $A_l = 2304$ cm^2; $A_t = 3456$ cm^2.
9. $6a^2 = a^3 \Rightarrow a = 6$ cm etc. $A_t = 216$ cm^2; $V = 216$ cm^3. **10.** $3\sqrt{3}$.

11. Fie a lungimea muchiei cubului. Avem $a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = \dfrac{15\sqrt{3} - 15\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă $a = 7{,}5$ m. $A_t = 337{,}5$ cm^2; $V = 421{,}875$ cm^3. **12.** $V = \dfrac{1024\sqrt{2}}{27}$ cm^2; $A_t = \dfrac{256}{3}$ cm^2. **13.** $d = 6\sqrt{129}$.

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

14. $V = 2744$ cm^3; $A_t = 1176$ cm^2. **15.** În $\Delta ADC'$, cu $\sphericalangle ADC' = 90°$ şi $DP \perp AC'$, P aparţine segmentului AC', conform **teoremei catetei** avem $AP = \dfrac{AD^2}{AC'} \Rightarrow \dfrac{AP}{AC'} = \left(\dfrac{AD}{AC'}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{a\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$. **16. a)** 125 cm^3 şi 150 cm^2; **b)** 5 cm şi $5\sqrt{2}$ cm; **c)** $d(A, D'B') = AO'$, unde $\{O\} = A'C' \cap B'D'$. $AO' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; **d)** Fie $AP \perp A'B$. Se arată că AP este perpendiculară pe planul dreptunghiului $BCD'A'$. $d(A, (A'D'C)) = AP = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

17. Dacă notăm cu a, b, c dimensiunile paralelipipedului, relaţia din enunţ conduce la: $2ab + 2ac + 2bc =$ $= a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$, adică paralelipipedul este cub.
18. $\mathscr{A}_\ell = 4 \cdot \ell^2 = 4 \cdot 4{,}5^2 = 81$ m^2. 90% din tabla repartizată = 81 m^2, de unde rezultă că suprafaţa tablei repartizate = $81 : \dfrac{90}{100} = 90$ m^2 (**fig. 272**); **b)** Volumul vasului = $4{,}5^3$ = = 91,125 m^3 = 91125 ℓ. În $\Delta ACC'$ obţinut după desfăşurarea suprafeţei laterale a cubului, furnica de deplasează pe ipotenuza AC'.
Avem $AC'^2 = 9^2 + 4{,}5^2 = 101{,}25$ m. Cum 101,25 m > 400 : 4, rezultă că furnica nu ajunge în punctul C' în 400 de minute.

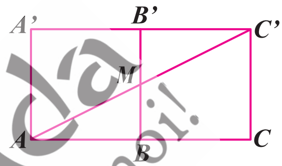


Fig. 272

II. 8. Paralelipipedul dreptunghic.

1. $A_t = 2 \cdot (5 \cdot 12 + 5 \cdot 13 + 12 \cdot 13) = 562$ cm^2. $d = \sqrt{5^2 + 12^2 + 13^2} = = 13\sqrt{2}$ cm. $V = 780$ cm^2.
2. a) $2 \cdot (6 + 8) = 28$ cm^2; **b)** $A_l = P_b \cdot h = 28 \cdot 10 = 280$ cm^2; **c)** $d = \sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ cm; **d)** $V = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$ cm^3. **3.** $A_l = A_t - 2 \cdot A_b = 200$ cm^2 – 80 cm$^2 \cdot 2 = 40$ cm^2.
4. $A_b = \dfrac{A_t - A_l}{2} = \dfrac{240 - 120}{2} = 60$ cm^2. **5. a)** $2 \cdot (9 + 12) = 42$ cm; **b)** 4 cm; **c)** $2 \cdot (9 \cdot 12 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 4) =$ $= 384$ cm^2. **6. a)** $A_b = 16 \cdot 8 = 128$ cm^2; **b)** $d = 24$ cm; **c)** $V = 2048$ cm^3. **7. a)** $AB = \sqrt{BA'^2 - AA'^2} = 5$ cm; **b)** $AD = \sqrt{144 \cdot 2 - 144} = 12$ cm; **c)** $A_t = 2 \cdot (12^2 + 125 + 125) = 528$ cm^2; **d)** $V = 60 \cdot 12 = 720$ cm^3.
8. 129,6 hl. **9.** Înălţimea are 4 cm etc. $d = \sqrt{185}$ cm. **10.** Dimensiunile sunt: 24 cm; 32 cm şi 40 cm etc. **a)** $d = 40\sqrt{2}$ cm; **b)** $A_t = 6016$ cm^2; **c)** $V = 30{,}72$ dm^3. **11.** $A_t = 3218$ cm^2; $V = 12180$ cm^3. **12.** Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului. Avem $\dfrac{a}{4{,}5} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{8} = k$, de unde $a = 4{,}5k$; $b = 6k$ şi $c = 8k$. Se obţine: $4{,}5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot k^3 = 12^3$, de unde $k = 2$ şi $a = 9$, $b = 12$, $c = 16$. **13.** Dimensiunile paralelipipedului sunt: 70 cm, 72 cm şi 74 cm. $d = 2\sqrt{3890}$; $A_t = 31096$ cm^2; $V = 372{,}96$ dm^3. **14.** Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului. Avem: $\dfrac{ac+bc}{17{,}5} = \dfrac{ab+bc}{16} = \dfrac{ab+ac}{13{,}5} = \dfrac{94}{47} = 2 \Rightarrow \begin{cases} ac+bc=35 \\ ab+bc=32 \\ ab+ac=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=12 \\ ac=15 \\ bc=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=5 \end{cases}$, $V = 60$ m^3; $d = 5\sqrt{2}$ m. **15.** $V = 960\sqrt{34}$ cm^2. **16.** Fie $CM \perp BD'$ şi $AN \perp BD'$ ($N \in BD'$). Din **teorema catetei** în triunghiurile dreptunghice BCD' şi ABD' se obţine $\dfrac{18}{BO'} - \dfrac{12}{BD'} = 1$, de unde $BD' = 6$ cm etc.
$A_t = 12(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm^2; $V = 36$ cm^3.
17. a) $\Delta ACC'$ este dreptunghic isoscel, deci $CC' = AC = 20$ cm; **b)** $AC' = 20\sqrt{2}$ cm;
c) $V = \left(10\sqrt{2}\right)^2 \cdot 20 = 4000$ cm^2.

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!