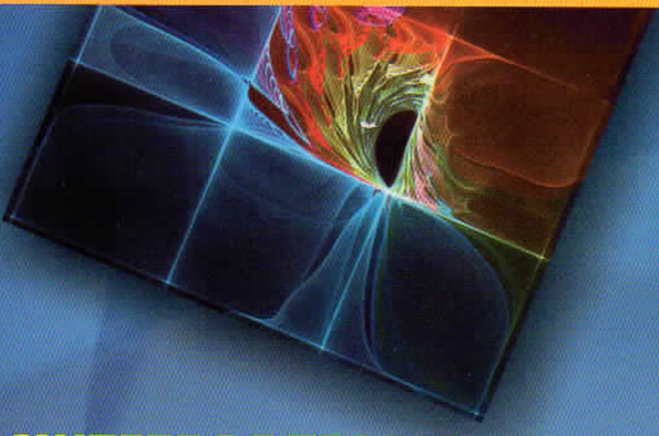
CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU
CRISTINA-PAULA MARIN
MĂDĂLINA-GEORGIA NICOLESCU
PETRU ORBULESCU MATEŞESCU

ANALIZĂ MATEMATICĂ



SINTEZE DE TEORIE
EXERCIȚII ŞI PROBLEME

pentru elevii claselor de liceu

Probleme pregătitoare pentru
EXAMENUL DE BACALAUREAT
şi concursul de admitere
în învățământul superior

ROMANIA · EDITURA ŞI TIPOGRAFIA · ICAR · EDITURA ŞI TIPOGRAFIA

CUPRINS

PARTEA I

TESTE RECAPITULATIVE

Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.	Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.
I	146	169	**XVI**	157	199
II	147	171	**XVII**	158	200
III	147	173	**XVIII**	159	203
IV	148	175	**XIX**	159	205
V	149	177	**XX**	160	207
VI	150	178	**XXI**	161	209
VII	150	179	**XXII**	162	212
VIII	151	182	**XXIII**	162	213
IX	152	184	**XXIV**	163	214
X	153	186	**XXV**	164	216
XI	153	188	**XXVI**	165	218
XII	154	190	**XXVII**	165	220
XIII	154	193	**XXVIII**	166	223
XIV	155	196	**XXIX**	167	225
XV	156	197	**XXX**	168	227

PARTEA a II - a

TESTE RECAPITULATIVE

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

1. Nicolescu, M.; Dinculeanu, N.; Marcus, S. - *ANALIZĂ MATEMATICĂ* – vol I Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

2. Dinculeanu, N.; Radu, E. - *ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ*- Manual pentru clasa a XI-a– vol I - Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

3. Gussi, Gh.; Stănăşilă, O.; Stoica, T. - *MATEMATICĂ - ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ*- Manual pentru clasa a XI-a– Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1997.

4. Boboc, N.; Colojoară, I. - *MATEMATICĂ - ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ* - Manual pentru clasa a XII-a– Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1994.

5. Nicolescu, C.; Nicolescu, M. - *ANALIZĂ MATEMATICĂ*- Exerciţii şi probleme pentru elevii claselor a XI-a şi a XII-a - Editura Universal Pan, Bucureşti, 2000.

6. Mihai I.; Maftei, I.; Pârşan, L.; Mihai, A; Nicolescu, C. - *MATEMATICĂ* **M1** (Partea I – Algebră, partea II-a, Analiză matematică), Manual pentru clasa a XI-a – Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2006.

7. Mihai, I.; Maftei, I.; Popescu, G.; Pârşan, L.; Mihai, A.; Haivas, M.; Nicolescu, C. - *MATEMATICĂ* **M1** (Partea I – Algebră, partea II-a, Analiză matematică), Manual pentru clasa a XII-a – Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2007.

CAPITOLUL I

ŞIRURI DE NUMERE REALE

§1. NOŢIUNEA DE ŞIR

Fie k un număr natural fixat şi mulţimea $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} | n \geq k\}$, unde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$ sunt notaţiile cunoscute.

Spunem că o funcţie $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{R}$ reprezintă un ***şir de numere reale***.

Notaţii uzuale pentru şiruri: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\geq k}$.

Astfel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ reprezintă şirul $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$.

Pentru uniformitatea prezentării unor proprietăţi preferăm notaţia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu eventuale precizări.

Moduri prin care poate fi definit un şir:

1. Se cunoaşte formula termenului general a_n

Astfel $a_n = \varphi(n)$, $\varphi : \mathbb{N}_k \to \mathbb{R}$.

Se poate afla orice termen al şirului cunoscând rangul acestuia.

EXEMPLE:

i) $a_n = \dfrac{3n+1}{n^2}$; $\quad 4, \dfrac{7}{4}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{13}{16}, \dots, \dfrac{3n+1}{n^2}, \dots$;

ii) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$; $\quad -\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dots, (-1)^n \dfrac{n}{n+1}, \dots$;

iii) $a_n = \dfrac{n^2}{2n+1}$; $\quad \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{7}, \dfrac{16}{9}, \dfrac{25}{11}, \dots, \dfrac{n^2}{2n+1}, \dots$;

iv) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

v) $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot 2n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se cunoaşte o relaţie de recurenţă

EXEMPLE:

i) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{3}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

ii) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

iii) $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

iv) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{a_n + 5}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

v) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{12}{a_n}\right)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

3. Şir definit descriptiv

EXEMPLE:

i) $\underline{1, 2, 3}, \underline{\underline{3, 2, 1}}, 1, 2, 3, ...;$

ii) Şirul numerelor prime: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...;

iii) $1, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 0, ..., n, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{n \text{ termeni}}, ...;$

iv) 2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, ... format cu cifrele zecimale ale numărului real $\sqrt{5}$;

v) Se construieşte şirul ai cărui termeni reprezintă ultima cifră a numărului 7^n, pentru $n \in \mathbb{N}^*$: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ...;

vi) Aproximările prin lipsă ale numărului iraţional π:
3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ... . Există posibilitatea ca acelaşi şir să fie determinat atât printr-o relaţie de recurenţă, cât şi prin stabilirea unei formule a termenului general, după cum vom constata în cazul progresiilor aritmetice.

SUBŞIRURI

Fiind dat un şir $(a_n)_{n\geq 1}$, extragem din acesta termeni cu indici tot mai mari (după un anumit procedeu) şi cu aceştia alcătuim un nou şir.
Spunem că am construit un ***subşir*** al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

Şirul dat este: $(a_n)_{n\geq 1} : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ..., a_n, ...$.

EXEMPLE:
Exemple de subşiruri formate dintr-un şir dat:

$(a_{n+4})_{n\geq 1}: \ a_5, a_6, ..., a_{n+4}, ...;$

$(a_{2n-1})_{n\geq 1}: \ a_1, a_3, a_5, ..., a_{2n-1}, ...;$

$(a_{2n})_{n\geq 1}: \ a_2, a_4, a_6, a_8, ..., a_{2n}, ...;$

$(a_{n^2})_{n\geq 1}: \ a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, ..., a_{n^2}, ...;$

$(a_{2^n})_{n\geq 1}: \ a_2, a_4, a_8, a_{16}, ..., a_{2^n}, ...;$

$(a_{3n})_{n\geq 1}: \ a_3, a_6, a_9, a_{12}, a_{15}, ..., a_{3n}, ...$.

Mai precis, considerăm un şir strict crescător de numere naturale
$(k_n)_{n\geq 1}: \ k_1, k_2, k_3, ..., k_n, ...$ şi construim şirul
$(a_{k_n})_{n\geq 1}: \ a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, ..., a_{k_n}, ...$. Acesta constituie un subşir al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

PROGRESIA GEOMETRICĂ

▣ ***Definiție***

Spunem că un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ este o **progresie geometrică** dacă se cunosc: **primul termen** $b_1 \neq 0$ şi un număr real q, $q \notin \{0, 1\}$, denumit **rație**, astfel încât **orice termen**, începând cu al doilea, **se obține prin înmulțirea celui precedent cu rația**.

$\boxed{b_n = b_{n-1}q, \text{ oricare ar fi } n \geq 2}$. **(relația de recurență)**

Termenul general al progresiei geometrice este dat de formula:

$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}, \text{ oricare ar fi } n \geq 2}$. oricare ar fi $n \geq 2$.

Suma primilor *n* termeni ai progresiei geometrice este:

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}_{n \text{ termeni}} = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

EXEMPLE:

1. $\underbrace{1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2n}}_{(n+1) \text{ termeni}} = \dfrac{q^{2n} \cdot q^2 - 1}{q^2 - 1}$;

2. $1 - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{a^{n-1}} = \dfrac{a}{a+1}\left[1 + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{a^n}\right]$, $a \neq 0$, $a \neq -1$.

◈ ***Teoremă***

Un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere strict pozitive constituie o progresie geometrică <u>dacă şi numai dacă</u> are loc relația de recurență:

$\boxed{b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Considerăm cunoscuți termenii diferiți b_1, b_2.

ŞIRURI MONOTONE

▣ ***Definiții***

- Se consideră un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
  - **i)** Dacă $a_n \leq a_{n+1}$, spunem că şirul este **crescător**.
  - **ii)** Dacă $a_n < a_{n+1}$, spunem că şirul este **strict crescător**.
  - **iii)** Dacă $a_n \geq a_{n+1}$, spunem că şirul este **descrescător**.
  - **iv)** Dacă $a_n > a_{n+1}$, spunem că şirul este **strict descrescător**.
- Orice şir <u>**strict crescător**</u> (strict descrescător) este **crescător** (descrescător).
- Orice şir **crescător sau descrescător,** spunem că este **şir monoton**.

Se consideră că rezultatele au loc oricare ar fi n, începând cu un anumit rang.

◉ ***Exerciții rezolvate***

Să se cerceteze monotonia următoarelor șiruri:

1) $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{3n+4}{n}$;

2) $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = \dfrac{2^n}{n!}$;

3) $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{2}{5}x_n + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

○ ***Rezolvări***

1) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{3(n+1)+4}{n+1} - \dfrac{3n+4}{n} = -\dfrac{4}{n(n+1)} < 0$. Șirul este strict descrescător.

2) $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1}$. Pentru $n \geq 1$, avem $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1 \Leftrightarrow b_{n+1} \leq b_n$.

Șirul este descrescător.

3) Folosim metoda inducției matematice. $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{5} + 1 = \dfrac{8}{5}$,

$x_2 - x_1 = \dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{10} > 0$. Presupunem $x_{k+1} > x_k$.

Rezultă $x_{k+2} - x_{k+1} = \dfrac{2}{5}x_{k+1} + 1 - \left(\dfrac{2}{5}x_k + 1\right) = \dfrac{2}{5}(x_{k+1} - x_k) > 0$.

În concluzie șirul este strict crescător.

ȘIRURI MĂRGINITE

▣ ***Definiții***

Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este **mărginit** dacă există un interval compact $[\alpha, \beta]$ care cuprinde toți termenii șirului.

O formulare echivalentă a proprietății de mărginire este următoarea: Un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ este **mărginit** dacă există un număr $M > 0$, astfel încât $|a_n| \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

◉ ***Exerciții rezolvate***

Să se cerceteze mărginirea următoarelor șiruri:

1) $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{4n+3}{n}$;

2) $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = \dfrac{3n}{(n+1)!}$;

3) $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{3}$;

4) $(u_n)_{n\geq 1}$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^{n-1}}$;

5) $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_1 = a \in (1, 2)$, $y_{n+1} = y_n^2 - 2y_n + 2$.

○ *Rezolvare*

1) $a_n = 4 + \frac{3}{n}$. Observăm că $\frac{3}{n} \le 3$. Rezultă $4 < a_n \le 7$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^n} = \frac{3}{n+2} \le 1$. Şirul este descrescător şi

$b_1 = \frac{3}{2}$. Avem $0 < b_n \le \frac{3}{2}$.

3) $x_n = \sin\frac{n\pi}{3}$. Observăm că $x_{n+6} = x_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr

$\sin\frac{(n+6)\pi}{3} = \sin\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\frac{n\pi}{3}$. $x_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x_3 = \sin\pi = 0$, $x_4 = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_6 = \sin 2\pi = 0$.

$(x_n)_{n\ge1}$: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \ldots$.

$x_n \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Şirul este mărginit.

4) $u_n = \dfrac{\frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \dfrac{1 - \frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < \frac{3}{2}$. Rezultă $1 \le u_n < \frac{3}{2}$.

5) $y_{n+1} = (y_n - 1)^2 + 1$. Folosim metoda inducţiei matematice.

Avem $1 < y_1 < 2$. Presupunem $1 < y_k < 2 \Rightarrow 0 < y_k - 1 < 1 \Rightarrow 1 < (y_k - 1)^2 + 1 < 2$.

Rezultă $1 < y_{k+1} < 2$. În concluzie $y_n \in (1, 2)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

§2. ŞIRURI CONVERGENTE

▣ ***Definiţie***

Spunem că un şir $(a_n)_{n\ge1}$ este **convergent** către numărul real a (tinde către a sau are limita a), dacă în orice vecinătate a numărului a se află toţi termenii şirului, cu excepţia cel mult a unui număr finit dintre aceştia.

Scriem: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$.

Limita unui şir, dacă există, este unică.

Criteriul de convergenţă cu $\varepsilon - n_\varepsilon$

Un şir $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent către numărul real a, dacă şi numai dacă are loc următoarea proprietate:

- ***pentru orice*** $\varepsilon > 0$, ***există un rang*** n_ε, ***astfel încât oricare ar fi numărul natural*** $n \ge n_\varepsilon$, ***rezultă*** $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

◉ ***Exerciții rezolvate***

1. Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{5n+4}{2n+3}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{5}{2}$.

O *Rezolvare*

Fie $\varepsilon > 0$. Avem următoarele inegalități echivalente:

$$\left|a_n - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{5n+4}{2n+3} - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{4n+6} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+6 > \frac{7}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{7}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}. \quad (*)$$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\dfrac{7}{4\varepsilon} - \dfrac{3}{2}\right] + 1$. Ținem seama că pentru orice număr real A are loc inegalitatea $[A]+1 > A$. Pentru orice indice $n \geq n_\varepsilon$, putem scrie: $n \geq n_\varepsilon > \dfrac{7}{4\varepsilon} - \dfrac{3}{2}$.

Folosind rezultatele anterioare, vom obține: $n > \dfrac{7}{4\varepsilon} - \dfrac{3}{2} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left|a_n - \dfrac{5}{2}\right| < \varepsilon$.

Pe baza criteriului de convergență rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{5}{2}$.

2. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{4n^2+3}{2n^2+2}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

O *Rezolvare*

Fie $\varepsilon > 0$. Avem următoarele inegalități echivalente:

$$|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4n^2+3}{2n^2+2} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n^2+2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} - 1}.$$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1}\right] + 1$. Atunci $n \geq n_\varepsilon > \sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1} \Rightarrow n > \sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1} \Leftrightarrow |a_n - 2| < \varepsilon$.

Pe baza criteriului de convergență, rezultă $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2+3}{2n^2+2} = 2$.

<u>Proprietate</u>

Folosind criteriul de convergență cu $\varepsilon - n_\varepsilon$ putem stabili următorul rezultat:

- Dacă un șir de numere reale, nenule, $(a_n)_{n\geq 1}$ este **monoton** și **nemărginit**, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_n = \dfrac{1}{a_n}$ este **convergent către zero**.

EXEMPLE:

a) $\dfrac{1}{3n+2} \to 0$; **b)** $\dfrac{1}{n^3} \to 0$; **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$; **d)** $\dfrac{1}{\log_2 n} \to 0$;

e) dacă $r \in (-1, 1)$, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_n = r^n$ este convergent către 0.

Astfel, spre exemplu, $\dfrac{1}{5^n} \to 0$, precum și $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \to 0$.

▣ ***<u>Definiție</u>***

Un șir care nu este convergent spunem că este **divergent**.

▣◈◉