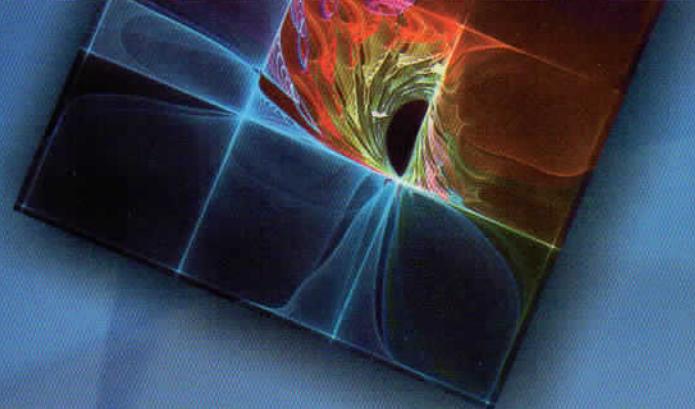


CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU
CRISTINA-PAULA MARIN
MĂDĂLINA-GEORGIA NICOLESCU
PETRU ORBULESCU MATEȘESCU

ANALIZA MATEMATICĂ



SINTEZE DE TEORIE
EXERCITII ȘI PROBLEME
pentru elevii claselor de liceu

Probleme pregătitoare pentru
EXAMENUL DE BACALAUREAT
și concursul de admitere
în învățământul superior



C U P R I N S

P A R T E A I

CAPITOLUL I	pag.
ŞIRURI DE NUMERE REALE.....	5
§ 1. Noţiunea de şir.....	5
§ 2. Şiruri convergente.....	10
§ 3. Şiruri cu limite infinite.....	25
§ 4. Operaţii cu şiruri care au limite infinite.....	28
§ 5. Limite uzuale.....	30
§ 6. Şiruri recurente de ordinul I.....	38
§ 7. Şiruri recurente de ordinul al II-lea.....	39
§ 8. Aplicaţii în calculul matriceal.....	42
 CAPITOLUL II	
LIMITE DE FUNCȚII.....	47
§ 1. Limita unei funcţii într-un punct.....	47
§ 2. Limite laterale.....	48
§ 3. Operaţii cu limite de funcţii.....	50
§ 4. Limitele funcţiilor elementare uzuale.....	51
§ 5. Asimptote la graficele unor funcţii.....	64
 CAPITOLUL III	
FUNCȚII CONTINUE.....	69
§ 1. Funcţie continuă într-un punct.....	69
§ 2. Operaţii cu funcţii continue.....	70
§ 3. Funcţii continue pe intervale.....	77
 CAPITOLUL IV	
DERIVATE - FUNCȚII DERIVABILE.....	82
§ 1. Derivata unei funcţii într-un punct.....	82
§ 2. Operaţii cu funcţii derivabile.....	85
§ 3. Interpretarea geometrică a derivei.....	91
§ 4. Derivata funcţiei inverse.....	96
§ 5. Derivate de ordin superior.....	98
 CAPITOLUL V	
STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR	103
§ 1. Funcţii derivabile pe intervale. Rezultate remarcabile.....	103

§ 2. Funcții convexe – Funcții concave.....	119
§ 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor.....	125
§ 4. Rezolvarea grafică a unor ecuații.....	134
§ 5. Probleme de optimizare.....	139

CAPITOLUL VI

TESTE RECAPITULATIVE.....	146
Enunțuri.....	146
Soluții.....	169

TESTE RECAPITULATIVE

Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.	Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.
I	146	169	XVI	157	199
II	147	171	XVII	158	200
III	147	173	XVIII	159	203
IV	148	175	XIX	159	205
V	149	177	XX	160	207
VI	150	178	XXI	161	209
VII	150	179	XXII	162	212
VIII	151	182	XXIII	162	213
IX	152	184	XXIV	163	214
X	153	186	XXV	164	216
XI	153	188	XXVI	165	218
XII	154	190	XXVII	165	220
XIII	154	193	XXVIII	166	223
XIV	155	196	XXIX	167	225
XV	156	197	XXX	168	227

TEST GRILĂ.....	229
------------------------	------------

PARTEA a II - a

CAPITOLUL I	pag.
INTEGRALĂ NEDEFINITĂ	233
§ 1. Primitive.....	233
§ 2. Integrarea prin părți.....	243
§ 3. Integrarea prin schimbare de variabilă.....	246
§ 4. Integrarea funcțiilor raționale.....	249
§ 5. Alte procedee pentru determinarea primitivelor.....	255
 CAPITOLUL II	
INTEGRALĂ DEFINITĂ	261
§ 1. Diviziuni – Sume Riemann – Funcții integrabile.....	261
§ 2. Operații cu funcții integrabile.....	263
§ 3. Integrarea funcțiilor continue.....	270
§ 4. Integrarea prin părți.....	281
§ 5. Integrarea prin schimbare de variabilă.....	286
§ 6. Rezultate remarcabile.....	292
 CAPITOLUL III	
APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE	295
§ 1. Calculul limitelor unor șiruri cu ajutorul integralelor definite.....	295
§ 2. Aria unei suprafețe.....	297
§ 3. Volumul unui corp de rotație.....	300
§ 4. Lungimea graficului unei funcții.....	306
§ 5. Aria unei suprafețe de rotație.....	307
§ 6. Centre de greutate.....	311
§ 7. Calculul aproximativ al integralei definite.....	315
 CAPITOLUL IV	
TESTE RECAPITULATIVE	317
Enunțuri.....	317
Soluții.....	333
 CAPITOLUL V	
PROBLEME DE SINTEZĂ	369
Enunțuri.....	369
Soluții.....	372

TESTE RECAPITULATIVE

Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.	Nr. crt.	Enunțuri pag.	Soluții pag.
I	317	333	XIII	324	350
II	317	334	XIV	324	352
III	318	335	XV	325	353
IV	318	337	XVI	326	355
V	319	338	XVII	326	356
VI	319	339	XVIII	327	358
VII	320	341	XIX	328	360
VIII	321	342	XX	328	361
IX	321	344	XXI	329	363
X	322	345	XXII	330	364
XI	322	347	XXIII	331	366
XII	323	348	XXIV	331	367

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

1. Nicolescu, M.; Dinculeanu, N.; Marcus, S. - **ANALIZĂ MATEMATICĂ** – vol I Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
2. Dinculeanu, N.; Radu, E. - **ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**- Manual pentru clasa a XI-a– vol I - Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
3. Gussi, Gh.; Stănașilă, O.; Stoica, T. - **MATEMATICĂ - ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ**- Manual pentru clasa a XI-a- Editura Didactică și Pedagogică, București, 1997.
4. Boboc, N.; Colojoară, I. - **MATEMATICĂ - ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ** - Manual pentru clasa a XII-a- Editura Didactică și Pedagogică, București, 1994.
5. Nicolescu, C.; Nicolescu, M. - **ANALIZĂ MATEMATICĂ**- Exerciții și probleme pentru elevii claselor a XI-a și a XII-a - Editura Universal Pan, București, 2000.
6. Mihai I.; Maftei, I.; Pârshan, L.; Mihai, A; Nicolescu, C. - **MATEMATICĂ M1** (Partea I – Algebră, partea II-a, Analiză matematică), Manual pentru clasa a XI-a – Editura Didactică și Pedagogică, București, 2006.
7. Mihai, I.; Maftei, I.; Popescu, G.; Pârshan, L.; Mihai, A.; Haivas, M.; Nicolescu, C. - **MATEMATICĂ M1** (Partea I – Algebră, partea II-a, Analiză matematică), Manual pentru clasa a XII-a – Editura Didactică și Pedagogică, București, 2007.

□ ◇ ◉ CAPITOLUL I ◉ ◇ □

SIRURI DE NUMERE REALE

§1. NOTIUNEA DE SIR

Fie k un număr natural fixat și multimea $N_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$, unde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ și $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$ sunt notațiile cunoscute.

Spunem că o funcție $f : N_k \rightarrow \mathbb{R}$ reprezintă un *sir de numere reale*.

Notații uzuale pentru siruri: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \geq 0}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n \geq 1}$, $(a_n)_{n \geq k}$.

Astfel $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ reprezintă sirul $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$.

Pentru uniformitatea prezentării unor proprietăți preferăm notația $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu eventuale precizări.

Moduri prin care poate fi definit un sir:

1. Se cunoaște formula termenului general a_n

Astfel $a_n = \varphi(n)$, $\varphi : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{R}$.

Se poate afla orice termen al sirului cunoscând rangul acestuia.

EXEMPLE:

i) $a_n = \frac{3n+1}{n^2}; \quad 4, \frac{7}{4}, \frac{10}{9}, \frac{13}{16}, \dots, \frac{3n+1}{n^2}, \dots;$

ii) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}; \quad -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots, (-1)^n \frac{n}{n+1}, \dots;$

iii) $a_n = \frac{n^2}{2n+1}; \quad \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \frac{25}{11}, \dots, \frac{n^2}{2n+1}, \dots;$

iv) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

v) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se cunoaște o relație de recurență

EXEMPLE:

i) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

ii) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

iii) $a_0 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

iv) $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{a_n + 5}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

v) $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{12}{a_n} \right)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

3. Sir definit descriptiv

EXEMPLE:

- i) $1, \underline{2}, \underline{3}, \underline{3}, \underline{2}, 1, 1, 2, 3, \dots;$
- ii) Sirul numerelor prime: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots;$
- iii) $1, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 0, \dots, n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ termeni}}, \dots;$
- iv) $2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, \dots$ format cu cifrele zecimale ale numărului real $\sqrt{5};$
- v) Se construiește sirul ai cărui termeni reprezintă ultima cifră a numărului 7^n , pentru $n \in \mathbb{N}^*$: $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \dots;$
- vi) Aproximările prin lipsă ale numărului irațional π : $3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; \dots.$ Există posibilitatea ca același sir să fie determinat atât printr-o relație de recurență, cât și prin stabilirea unei formule a termenului general, după cum vom constata în cazul progresiilor aritmetice.

SUBSIRURI

Fiind dat un sir $(a_n)_{n \geq 1}$, extragem din acesta termeni cu indici tot mai mari (după un anumit procedeu) și cu aceștia alcătuim un nou sir.

Spunem că am construit un *subsir* al sirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

Sirul dat este: $(a_n)_{n \geq 1} : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_n, \dots$

EXEMPLE:

Exemple de subsiruri formate dintr-un sir dat:

$(a_{n+4})_{n \geq 1} : a_5, a_6, \dots, a_{n+4}, \dots;$

$(a_{2n-1})_{n \geq 1} : a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots;$

$(a_{2n})_{n \geq 1} : a_2, a_4, a_6, a_8, \dots, a_{2n}, \dots;$

$(a_{n^2})_{n \geq 1} : a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \dots, a_{n^2}, \dots;$

$(a_{2^n})_{n \geq 1} : a_2, a_4, a_8, a_{16}, \dots, a_{2^n}, \dots;$

$(a_{3n})_{n \geq 1} : a_3, a_6, a_9, a_{12}, a_{15}, \dots, a_{3n}, \dots$

Mai precis, considerăm un sir strict crescător de numere naturale

$(k_n)_{n \geq 1} : k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, \dots$ și construim sirul

$(a_{k_n})_{n \geq 1} : a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots, a_{k_n}, \dots$. Aceasta constituie un subsir al sirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

PROGRESIA GEOMETRICĂ

■ Definiție

Spunem că un sir $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică dacă se cunosc:

primul termen $b_1 \neq 0$ și un număr real q , $q \in \{0, 1\}$, denumit **rație**, astfel încât orice termen, începând cu al doilea, se obține prin înmulțirea celui precedent cu **rația**.

$$b_n = b_{n-1}q, \text{ oricare ar fi } n \geq 2. \quad (\text{relația de recurență})$$

Termenul general al progresiei geometrice este dat de formula:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \text{ oricare ar fi } n \geq 2, \text{ oricare ar fi } n \geq 2.$$

Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice este:

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_2 + \dots + b_n}_{n \text{ termeni}} = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

EXEMPLE:

$$1. \underbrace{1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n}}_{(n+1) \text{ termeni}} = \frac{q^{2n} \cdot q^2 - 1}{q^2 - 1};$$

$$2. 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} = \frac{a}{a+1} \left[1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{a^n} \right], \quad a \neq 0, a \neq -1.$$

◆ Teorema

Un sir $(b_n)_{n \geq 1}$ de numere strict pozitive constituie o progresie geometrică dacă și numai dacă are loc relația de recurență:

$$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Considerăm cunoscuți termenii diferenți b_1, b_2 .

ȘIRURI MONOTONE

■ Definiții

- Se consideră un sir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - i) Dacă $a_n \leq a_{n+1}$, spunem că sirul este **crescător**.
 - ii) Dacă $a_n < a_{n+1}$, spunem că sirul este **strict crescător**.
 - iii) Dacă $a_n \geq a_{n+1}$, spunem că sirul este **descrescător**.
 - iv) Dacă $a_n > a_{n+1}$, spunem că sirul este **strict descrescător**.
 - Orice sir **strict crescător** (strict descrescător) este **crescător** (descrescător).
 - Orice sir **crescător sau descrescător**, spunem că este **sir monoton**.
- Se consideră că rezultatele au loc oricare ar fi n , începând cu un anumit rang.

◎ Exerciții rezolvate

Să se cerceteze monotonia următoarelor șiruri:

$$1) (a_n)_{n \geq 1}, a_n = \frac{3n+4}{n};$$

$$2) (b_n)_{n \geq 1}, b_n = \frac{2^n}{n!};$$

$$3) (x_n)_{n \geq 1}, x_1 = \frac{3}{2}, x_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

○ Rezolvări

$$1) a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+4}{n+1} - \frac{3n+4}{n} = -\frac{4}{n(n+1)} < 0. \text{ Sirul este strict descrescător.}$$

$$2) \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}. \text{ Pentru } n \geq 1, \text{ avem } \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1 \Leftrightarrow b_{n+1} \leq b_n.$$

Sirul este descrescător.

$$3) \text{ Folosim metoda inducției matematice. } x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} + 1 = \frac{8}{5},$$

$$x_2 - x_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{2} = \frac{1}{10} > 0. \text{ Presupunem } x_{k+1} > x_k.$$

$$\text{Rezultă } x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{2}{5}x_{k+1} + 1 - \left(\frac{2}{5}x_k + 1\right) = \frac{2}{5}(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

În concluzie sirul este strict crescător.

ȘIRURI MĂRGINITE

■ Definiții

Un sir $(a_n)_{n \geq 1}$ este **mărginit** dacă există un interval compact $[\alpha, \beta]$ care cuprinde toți termenii sirului.

O formulare echivalentă a proprietății de mărginire este următoarea:

Un sir $(a_n)_{n \geq 1}$ este **mărginit** dacă există un număr $M > 0$, astfel încât $|a_n| \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

◎ Exerciții rezolvate

Să se cerceteze mărginirea următoarelor șiruri:

$$1) (a_n)_{n \geq 1}, a_n = \frac{4n+3}{n};$$

$$2) (b_n)_{n \geq 1}, b_n = \frac{3n}{(n+1)!};$$

$$3) (x_n)_{n \geq 1}, x_n = \sin \frac{n\pi}{3};$$

$$4) (u_n)_{n \geq 1}, u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}};$$

$$5) (y_n)_{n \geq 1}, y_1 = a \in (1, 2), y_{n+1} = y_n^2 - 2y_n + 2.$$

○ Rezolvare

1) $a_n = 4 + \frac{3}{n}$. Observăm că $\frac{3}{n} \leq 3$. Rezultă $4 < a_n \leq 7$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^n} = \frac{3}{n+2} \leq 1$. Sirul este descrescător și

$b_1 = \frac{3}{2}$. Avem $0 < b_n \leq \frac{3}{2}$.

3) $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$. Observăm că $x_{n+6} = x_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr

$$\sin \frac{(n+6)\pi}{3} = \sin \left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi \right) = \sin \frac{n\pi}{3}, \quad x_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = \sin \pi = 0, \quad x_4 = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_5 = \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_6 = \sin 2\pi = 0.$$

$$(x_n)_{n \geq 1}: \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dots$$

$x_n \in \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Sirul este mărginit.

4) $u_n = \frac{\frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < \frac{3}{2}$. Rezultă $1 \leq u_n < \frac{3}{2}$.

5) $y_{n+1} = (y_n - 1)^2 + 1$. Folosim metoda inducției matematice.

Avem $1 < y_1 < 2$. Presupunem $1 < y_k < 2 \Rightarrow 0 < y_k - 1 < 1 \Rightarrow 1 < (y_k - 1)^2 + 1 < 2$.

Rezultă $1 < y_{k+1} < 2$. În concluzie $y_n \in (1, 2)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

§2. SIRURI CONVERGENTE

■ Definitie

Spunem că un sir $(a_n)_{n \geq 1}$ este **convergent** către numărul real a (tinde către a sau are limita a), dacă în orice vecinătate a numărului a se află toți termenii sirului, cu excepția cel mult a unui număr finit dintre aceștia.

Scriem: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ sau $a_n \rightarrow a$.

Limită unui sir, dacă există, este unică.

Criteriul de convergență cu $\varepsilon - n_\varepsilon$

Un sir $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent către numărul real a , dacă și numai dacă are loc următoarea proprietate:

- pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang n_ε , astfel încât oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$, rezultă $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

◎ Exerciții rezolvate

1. Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{5n+4}{2n+3}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{5}{2}$.

○ Rezolvare

Fie $\varepsilon > 0$. Avem următoarele inegalități echivalente:

$$\left| a_n - \frac{5}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{5n+4}{2n+3} - \frac{5}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{4n+6} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+6 > \frac{7}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{7}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}. \quad (*)$$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\frac{7}{4\varepsilon} - \frac{3}{2} \right] + 1$. Tinem seama că pentru orice număr real A are loc

inegalitatea $[A] + 1 > A$. Pentru orice indice $n \geq n_\varepsilon$, putem scrie: $n \geq n_\varepsilon > \frac{7}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}$.

Folosind rezultatele anterioare, vom obține: $n > \frac{7}{4\varepsilon} - \frac{3}{2} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \left| a_n - \frac{5}{2} \right| < \varepsilon$.

Pe baza criteriului de convergență rezultă că $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{5}{2}$.

2. Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{4n^2+3}{2n^2+2}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$.

○ Rezolvare

Fie $\varepsilon > 0$. Avem următoarele inegalități echivalente:

$$|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{4n^2+3}{2n^2+2} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n^2+2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} - 1}.$$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} - 1} \right] + 1$. Atunci $n \geq n_\varepsilon > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} - 1} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} - 1} \Leftrightarrow |a_n - 2| < \varepsilon$.

Pe baza criteriului de convergență, rezultă $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2+3}{2n^2+2} = 2$.

Proprietate

Folosind criteriul de convergență cu $\varepsilon - n_\varepsilon$ putem stabili următorul rezultat:

- Dacă un sir de numere reale, nenule, $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și nemărginit,

atunci sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, cu $x_n = \frac{1}{a_n}$ este convergent către zero.

EXEMPLU:

- a) $\frac{1}{3n+2} \rightarrow 0$; b) $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$; c) $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$; d) $\frac{1}{\log_2 n} \rightarrow 0$;

- e) dacă $r \in (-1, 1)$, atunci sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, cu $x_n = r^n$ este convergent către 0.

Astfel, spre exemplu, $\frac{1}{5^n} \rightarrow 0$, precum și $\left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0$.

■ Definitie

Un sir care nu este convergent spunem că este **divergent**.