

Gheorghe Andrei  
Nelu Chichirim  
Andrei Velicu

# ANALIZĂ MATEMATICĂ

## Culegere de probleme

Continuitate. Proprietatea lui Darboux

$\forall \lambda > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$     $\forall \lambda > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$     $\forall \lambda > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$     $\forall \lambda > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$     $\forall \lambda > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda$   
 $\mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y$

$\forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0$   
 $x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda$   
 $\mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y$

$\forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0$   
 $x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda$   
 $\mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y$

$\forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda > 0$   
 $x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.

[www.edituradp.ro](http://www.edituradp.ro)

# Cuprins

<b>1 Capitolul I.</b>	<b>9</b>
1.1 Exerciții și probleme de continuitate . . . . .	9
1.1.1 . . . . .	9
1.1.2 . . . . .	16
1.1.3 . . . . .	18
1.2 Soluții . . . . .	21
1.2.1 . . . . .	21
1.2.2 . . . . .	31
1.2.3 . . . . .	35
<b>2 Capitolul II.</b>	<b>41</b>
2.1 Probleme de continuitate . . . . .	41
2.2 Soluții . . . . .	49
<b>3 Capitolul III.</b>	<b>65</b>
3.1 Șiruri și continuitate . . . . .	65
3.2 Soluții . . . . .	71
<b>4 Capitolul IV.</b>	<b>86</b>
4.1 Convergența și limita unor șiruri date implicit prin intermediul unei funcții continue . . . . .	86
4.2 Soluții . . . . .	95
<b>5 Capitolul V.</b>	<b>118</b>
5.1 Limite de funcții și continuitate . . . . .	118
5.2 Soluții . . . . .	123
<b>6 Capitolul VI.</b>	<b>137</b>
6.1 Determinarea funcțiilor continue date printr-o relație funcțională de o variabilă . . . . .	137
6.2 Soluții . . . . .	151
6.2.1 . . . . .	162
<b>7 Capitolul VII.</b>	<b>202</b>
7.1 Determinarea funcțiilor continue date printr-o relație funcțională de două sau mai multe variabile . . . . .	202
7.1.1 Ecuații funcționale . . . . .	202
7.2 Soluții . . . . .	218
7.2.1 . . . . .	218

<b>8 Capitolul VIII</b>	<b>251</b>
8.1 Continuitate. Proprietatea lui Darboux . . . . .	251
8.1.1 Unele elemente teoretice . . . . .	251
8.2 Soluții . . . . .	267
8.2.1 . . . . .	267
<b>9 Capitolul IX.</b>	<b>292</b>
9.1 Funcții continue, puncte fixe, puncte intermediare, proprietăți de mărginire (nemărginire) . . . . .	292
9.2 Soluții . . . . .	308
<b>10 Capitolul X.</b>	<b>344</b>
10.1 Ecuții și continuitate . . . . .	344
10.2 Soluții . . . . .	348
<b>11 Capitolul XI.</b>	<b>356</b>
11.1 Continuitate și monotonie . . . . .	356
11.2 Soluții . . . . .	361
<b>12 Capitolul XII.</b>	<b>379</b>
12.1 Compunere și continuitate . . . . .	379
12.2 Soluții . . . . .	384
<b>13 Capitolul XIII.</b>	<b>399</b>
13.1 Funcții periodice, funcții convexe(concave), probleme de extrem . . . .	399
13.1.1 Funcții periodice . . . . .	399
13.1.2 Convexitate(concavitare) și continuitate . . . . .	402
13.1.3 Extremele funcțiilor continue . . . . .	403
13.2 Soluții . . . . .	405
13.2.1 . . . . .	405
<b>14 Capitolul XIV</b>	<b>425</b>
14.1 Probleme diverse de continuitate . . . . .	425
14.2 Soluții . . . . .	430
<b>15 Capitolul XV.</b>	<b>443</b>
15.1 Funcții uniform continue . . . . .	443
15.1.1 Elemente de teorie . . . . .	443
15.1.2 Exerciții și probleme . . . . .	446
15.2 Soluții . . . . .	448
15.2.1 . . . . .	448

15.2.2 . . . . .	452
<b>16 Capitolul XVI.</b>	<b>457</b>
16.1 Probleme propuse . . . . .	457
<b>17 Bibliografie</b>	<b>461</b>

# 1 Capitolul I.

## 1.1 Exerciții și probleme de continuitate

### 1.1.1

1. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcțiile  $f, g, h, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  să fie continue pe  $\mathbb{R}$ .

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-a}{x-1}, & x < 1 \\ bx + \frac{7}{4}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{2^x - ax}{x-2}, & x < 2 \\ \ln(bx+4) - x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c) h(x) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{1-x}-a)}{x}, & x < 0 \\ b \cdot e^x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(d) u(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x+a-b}}{x^2-3x+2}, & x \neq 1 \\ -\frac{3}{4}, & x = 1 \end{cases}$$

2. Să se determine parametrul  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât funcțiile de mai jos să fie continue pe  $\mathbb{R}$ .

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{m^2x + mx + 1}, & x < 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{m^2x^2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4mx + 4m^2} + m\sqrt{3x-5}, & x > 2 \end{cases}$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} m(1-x) - 15x^2, & x \leq 1 \\ 9mx - 4 \cdot 3^{mx+1} + 12, & x > 1 \end{cases}$$

$$(c) h(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 + |m|), & x \leq 2 \\ \log_4(x^2 + m^2)^2, & x > 2 \end{cases}$$

3. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  să fie continue pe  $\mathbb{R}$ .

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2^{ax} \cdot 3^{bx}, & x < 1 \\ 12, & x = 1 \\ 2^{1+bx} \cdot 3^{ax-1}, & x > 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 3^{ax} \cdot 4^{bx}, & x < 1 \\ 18, & x = 1 \\ 3^{ax} (2^{4bx} - 2^{2bx}), & x > 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 2^{ax} \cdot 3^{4x} + 6^{ax}, & x < 1 \\ 12, & x = 1 \\ 2^{bx} \cdot 3^{ax} + 6^{bx}, & x > 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 2^{ax} + 4^{bx} - 4, & x < 1 \\ ax^3 + bx^2 - (7a+3b)(x-1), & 1 \leq x \leq 2 \\ 2^{bx} + 4^{ax} - 18, & x > 2 \end{cases}$$

4. Să se determine parametrii  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât funcțiile de mai jos să fie continue pe domeniul de definiție, unde  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{a-2\sqrt{x-1}}{x-1}, & x < 1 \\ c-2b, & x = 1 \\ (c^2-2c-2)x + (bc-3)\log x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^2+8x-a-b}}{x^3-2x^2+3x-2}, & x < 1 \\ \frac{5}{3}, & x = 1 \\ \frac{\ln x^2+3x+c}{2x^2-x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

$$(c) h(x) = \begin{cases} \frac{|x^3+2x^2-3|-2|2x^2-3x+1|}{|x^3-5x+4|+3|3x^2-4x+1|}, & x < 1 \\ c, & x = 1 \\ \frac{\sqrt{2x-\sqrt{ax-b\sqrt{x-1}}}}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

5. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

(a)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [\ln x]$ ;

(b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = [x] \sin \pi x$ ;

(c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \begin{cases} x \left[ \frac{1}{x} \right], & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;

(d)  $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t(x) = [x] \sin \pi x^2$ ;

(e)  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) = [x] \cos \pi x^2$ ;

(f)  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x) = 2[x] - \cos 3\pi\{x\}$ .

6. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (-1)^{[x]} \left( x + a \left[ \frac{x}{3} \right] + b \right)$ .

Să se determine constantele  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcția să fie continuă în  $x = 2$  și să fie periodică cu perioada principală  $T = 6$ .

## 8 Capitolul VIII

### 8.1 Continuitate. Proprietatea lui Darboux

#### 8.1.1 Unele elemente teoretice

În cele ce urmează vom considera funcția  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I$  este interval.

- Definiție.** Funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux dacă, oricare ar fi punctele  $a, b \in I, a < b$ , și oricare ar fi numărul  $\lambda$  cuprins între  $f(a)$  și  $f(b)$ , există un punct  $c_\lambda$  cuprins între  $a$  și  $b$  astfel încât  $f(c_\lambda) = \lambda$ .
- Teoremă.** Dacă  $f$  este o funcție continuuă, atunci  $f$  are proprietatea lui Darboux.
- Propoziție.** Fie  $a, b \in I, a < b$ . Dacă funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux și dacă  $f(a) < 0$  și  $f(b) > 0$  (sau  $f(a) > 0$  și  $f(b) < 0$ ), atunci există cel puțin un punct cuprins între  $a$  și  $b$  în care funcția se anulează.
- Corolar.** Dacă funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux și nu se anulează în niciun punct din  $I$ , atunci  $f$  păstrează același semn pe tot intervalul  $I$ .
- Propoziție.** Funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă transformă orice interval  $J \subset I$ , tot într-un interval,  $f(J)$ .
- Propoziție.** Dacă funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux și este injectivă, atunci  $f$  este strict monotonă.
- Propoziție.** Dacă funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux și dacă există una din limitele laterale într-un punct  $x_0 \in I$ , atunci ea este egală cu  $f(x_0)$ .
- Corolar.** Dacă funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux, atunci ea nu are niciun punct de discontinuitate de prima speță.
- Corolar.** Dacă  $f(x_0 - 0)$  sau  $f(x_0 + 0)$  există și este diferită de  $f(x_0)$  (în particular este infinită), atunci  $f$  nu are proprietatea lui Darboux.
- Propoziție.** Dacă funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux și este strict monotonă, atunci  $f$  este continuă.
- Propoziție.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție arbitrară. Atunci există două funcții  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  discontinue pe  $\mathbb{R}$  și care au proprietatea lui Darboux, astfel încât  $f = g + h$ . (Teorema lui Sierpinski)

12. **Propoziție.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval,  $a = \inf I$ ,  $b = \sup I$  și  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea lui Darboux. Atunci oricare ar fi  $x_0 \in I \setminus \{a\}$  (sau  $x_0 \in I \setminus \{b\}$ ) există un șir  $x_n \in I$ ,  $x_n \nearrow x_0$  (sau  $x_n \searrow x_0$ ) astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = x_0$ .

**Demonstrație:**

Fie  $x_0 \in I \setminus \{a\}$ , fixat și  $r_n > 0$ ,  $r_n \rightarrow 0$ . Notăm  $I_n = (x_0 - r_n, x_0) \subseteq I, \forall n \geq 1$ . Cum  $f$  are proprietatea lui Darboux, rezultă că  $f(I_n) = J_n$  și  $f(I_n \cup \{x_0\}) = K_n$  sunt intervale (care diferă cel mult printr-un punct  $y_0 = f(x_0)$ ). Așadar,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_0 \in f(I_n) = J_n$  sau  $y_0 \in x_0 \in I \setminus \{a\}$ , deci există  $y_n \in f(I_n) = J_n$  cu  $|y_n - y_0| \leq \frac{1}{n}$  (1) și  $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$ , iar din  $x_0 - r_n < x_n \Leftrightarrow x_n \rightarrow x_0$  relația (1) devine  $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Evident, se poate alege un subșir  $x_{n_k}$  strict crescător al lui  $x_n$  cu  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  și  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ .

**Consecința 1.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea lui Darboux și  $x_0 \in \text{Int} I$  ales arbitrar. Atunci există șirurile  $x_n, y_n \in I \setminus \{x_0\}$  cu  $x_n \nearrow x_0$  și  $y_n \searrow x_0$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x_0)$ .

**Consecința 2.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval,  $a = \inf I$ ,  $b = \sup I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea lui Darboux și  $x_0 \in I \setminus \{a\}$  (respectiv  $x_0 \in I \setminus \{b\}$ ). Dacă există  $f(x_0 - 0)$  (respectiv există  $f(x_0 + 0)$ ), atunci  $f(x_0) = f(x_0 - 0)$  (respectiv  $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ ). Altfel spus, funcția  $f$  nu are discontinuități de speța I.

**Demonstrație:** Din Consecința 1 rezultă că există  $x_n \in I \setminus \{x_0\}$  cu  $x_n \nearrow x_0$  și  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , dar cum există  $f(x_0 - 0)$ , rezultă  $f(x_n) \rightarrow f(x_0 - 0)$  și cum limita este unică, rezultă  $f(x_0) = f(x_0 - 0)$ .

**Consecința 3.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval și  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea lui Darboux. Atunci  $f$  este continuă pe  $I$ .

**Demonstrație:**

Din Consecința 2. rezultă că  $f$  nu are discontinuități de speța I, dar cum  $f$  este și monotonă, rezultă că nu are nici discontinuități de speța II și prin urmare  $f$  este continuă pe  $I$ .

13. **Propoziție.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval,  $x_0 \in \text{Int} I$  și  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe  $I \setminus \{x_0\}$ . Dacă:

(a) există  $x_n \in I$ ,  $x_n \nearrow x_0$  astfel încât  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

(b) există  $y_n \in I$ ,  $y_n \searrow x_0$  astfel încât  $f(y_n) \rightarrow f(x_0)$

atunci  $f$  are proprietatea lui Darboux.



1. Să se arate că următoarele funcții nu au proprietatea lui Darboux:

$$(a) f : [-4, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 4 & : x \in [-4, 0] \\ x & : x \in (0, 2] \end{cases}$$

$$(b) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 2 & : x \leq -3 \\ x + 4 & : x > -3 \end{cases}$$

$$(c) f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2x & : x \in [-1, 0] \\ -2x + 5 & : x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$(d) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2)$$

$$(e) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$$

$$(f) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$$

$$(g) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - [x].$$

2. Să se demonstreze că următoarele funcții  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nu au proprietatea lui Darboux:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x & : x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 2^x + 4 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x & : x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x + 2 & : x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + 2x - 1 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 3^{x-1} & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} |x| & : x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \in \mathbb{Q} \\ x + 3 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

3. Fie  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(x) = \begin{cases} x & : x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 - x & : x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$ . Să se arate că:

(a)  $f$  este bijectivă;

(b)  $f^{-1} = f$ ;

(c)  $f$  nu are proprietatea lui Darboux;

(d)  $f$  are un singur punct de continuitate.

4. Să se arate că următoarele funcții nu au proprietatea lui Darboux:

$$(a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases} .$$

5.\*\* Fie  $a \in \mathbb{R}$  și funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ a & : x = 0 \end{cases} .$$

Să se arate că funcția  $f$  are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă  $|a| \leq 1$ .  
În plus, dacă  $a \in [-1, 1]$ , arătați că:

- (a)  $f$  nu e continuă în 0;
- (b) Pentru orice  $I \subset \mathbb{R}$  interval compact,  $f(I)$  este interval compact și  $f$  are proprietatea lui Darboux;
- (c)  $f$  nu este monotonă pe nicio vecinătate a lui 0;
- (d) Pentru orice  $\varepsilon > 0$ ,  $f(\mathbb{R}) = f((0, \varepsilon)) = f((-\varepsilon, 0)) = [-1, 1]$ .

6. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ a & : x = 0 \end{cases} .$$

- (a) Demonstrați că  $f$  nu este continuă în 0;
- (b) Arătați că  $f$  are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă  $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ;
- (c) Dacă  $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , arătați că, pentru orice  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $I$  interval compact,  $f(I)$  este interval compact.

7. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} a \sin \frac{1}{x} + b \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ \alpha & : x = 0 \end{cases} ,$$

unde  $a$  și  $b$  sunt date. Determinați  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  are proprietatea lui Darboux.

8. Să se demonstreze că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 2^x & : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux.

9. Arătați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 2 & : x = 0 \end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux.