Ion Bucur Popescu

MATEMATICĂ

M2 Subiecte rezolvate BAC 2017

- Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
- Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale

Editura CARMINIS

SUBIECTUL I

Varianta 1

1. Să se calculeze $C_3^2 + 3!$.

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+4) = 2$.

3. Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$.

4. Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5. Fie punctele $A(2,-1)$ și $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\vec{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4$, $AC = \sqrt{7}$ și $BC = \sqrt{3}$. Să se calculeze măsura unghiului B.

Soluții

1. Avem $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \Rightarrow C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$, iar $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, deci $C_3^2 + 3! = 3 + 6 = 9$.

2. Se impune condiția $3x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

Avem $\log_5(3x+4) = 2 \Leftrightarrow 3x + 4 = 5^2 = 25 \Leftrightarrow x = 7 \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

3. Avem $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 1$ și $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -2$, deci $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

4. Funcția f este continuă și strict descrescătoare, $f(0) = 0$, $f(1) = -1 \Rightarrow f([0,1]) = [-1,0]$.

5. Știind că punctul $M(x,y)$ are vectorul de poziție $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, obținem că $\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{OB} = -\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-\vec{i} + 3\vec{j}) - (2\vec{i} - \vec{j}) = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

6. Aplicăm teorema cosinusului:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{4^2 + \sqrt{3}^2 - \sqrt{7}^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{3}} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ deci } B = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Varianta 2

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. Să se determine $f(-4)\cdot f(-3)\cdot\ldots\cdot f(3)\cdot f(4)$.

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația $x^2 - 5x + 5 \le 1$.

4. Să se demonstreze că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, numerele $3^x - 1$, 3^{x+1} şi $5 \cdot 3^x + 1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-8)$ şi $B(6,3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AC = 2$, $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$ şi $AB = 4$.

Soluţii

1. Avem $f(3) = 3 - 3 = 0$ şi cum $f(3)$ apare ca factor în produs, deducem că produsul este nul.

2. Se impun condiţiile $x + 2 > 0$ şi $x > 0$, deci $x \in (0, \infty)$.

$\log_2(x+2) + \log_2 x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x(x+2) = 3 = \log_2 8 \Leftrightarrow x(x+2) = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$, cu soluţiile $x_1 = -4 \notin (0, \infty)$ şi $x_2 = 2 \in (0, \infty) \Rightarrow x = 2$.

3. $x^2 - 5x + 5 \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \le 0 \Leftrightarrow x \in [1,4]$.

Avem $[1,4] \cap \mathbb{Z} = \{1,2,3,4\}$.

4. Observăm că $(3^x - 1) + (5 \cdot 3^x + 1) = 6 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+1}$, deci avem $\div\ 3^x - 1,\ 3^{x+1},\ 5 \cdot 3^x + 1$.

5. Avem $\overline{OA} = 4\bar{i} - 8\bar{j}$ şi $\overline{OB} = 6\bar{i} + 3\bar{j}$, deci $\overline{OA} + \overline{OB} = 10\bar{i} - 5\bar{j}$, deci vectorul $\overline{OA} + \overline{OB}$ are coordonatele $(10, -5)$.

6. $S[ABC] = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin(\measuredangle ABC)}{2} = \dfrac{4 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 2$.

Varianta 3

1. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, …

2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulţimea $\{1,2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2+x} = x$.

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se calculeze $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)$.

5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,-1)$ şi $B(1,-2)$.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB = AC = \sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.

Soluţii

1. Termenii şirului sunt într-o progresie aritmetică $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de raţie $r = 6 = 7 - 1$ şi termen iniţial $x_1 = 1$, deci $x_n = x_1 + (n-1) \cdot r = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

În particular, $x_{10} = 6 \cdot 10 - 5 = 55$.

SUBIECTUL II

Varianta 1

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluții ecuației $x^3-3x+2=0$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

b) Să se arate că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy+4x+4y+12$.

a) Să se verifice dacă $x \circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $x \circ (-4)$, unde x este un număr real.

c) Știind că operația „$\circ$" este asociativă, să se calculeze $(-2009)\circ(-2008)\circ\dots\circ 2008\circ 2009$.

Soluții

1. a) Conform relațiilor lui Viète, $S_1=-\frac{a_1}{a_0}=x_1+x_2+x_3=0$.

b) Avem $x_1^3-3x_1+2=0 \Rightarrow x_1^3=3x_1-2$. Similar obținem $x_2^3=3x_2-2$ și $x_3^3=3x_3-2$. Adunând cele trei relații, obținem $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3(x_1+x_2+x_3)-6=-6$.

c) $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_2+x_3+x_1 & x_3 & x_1 \\ x_3+x_1+x_2 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_3 & x_1 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0$

2. a) $x \circ y = xy+4x+4y+12 = x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$.

b) Avem $x\circ(-4)=(x+4)(-4+4)-4=-4$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Observăm că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4=(y+4)(x+4)-4=y\circ x$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, deci operația este comutativă. Avem $x\circ(-4)=(-4)\circ x=-4$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Dacă notăm $(-2009)\circ(-2008)\circ\dots\circ(-5)=a$ și $(-3)\circ\dots\circ 2008\circ 2009=b$, atunci:

$(-2009)\circ(-2008)\circ\dots\circ 2008\circ 2009=a\circ(-4)\circ b=(a\circ(-4))\circ b=(-4)\circ b=-4$.

Varianta 2

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde a, b, $c\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 2$, $b = 1$ şi $c = -1$, să se calculeze determinantul d.

b) Să se verifice că $d = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$, oricare ar fi a, b, $c \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix} = 0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se arate că $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $x \circ x = 11$.

c) Ştiind că operaţia „$\circ$" este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2009}$.

Soluţii

1. a) $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} =$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-a & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-a & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\left[(a-b)^2-(c-a)(b-c)\right] =$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right) = a^3+b^3+c^3-3abc$.

Sau, aplicând regula lui Sarrus, se obţine direct că $d = a^3+b^3+c^3-3abc$.

Pentru $a = 2$, $b = 1$ şi $c = -1$ obţinem $d = 2^3+1^3+(-1)^3-3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1) = 14$.

b) $d = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right) = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot$

$\cdot\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\right) = \frac{1}{2}(a+b+c)\left(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\right) =$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right)$.

c) Conform punctului precedent, $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2^x+3^x+5^x\right)\cdot$

$\cdot\left(\left(2^x-3^x\right)^2+\left(3^x-5^x\right)^2+\left(2^x-5^x\right)^2\right)=0 \Rightarrow \left(2^x-3^x\right)^2+\left(3^x-5^x\right)^2+\left(2^x-5^x\right)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x-3^x = 3^x-5^x = 2^x-5^x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2. a) Avem $x \circ y = 2xy-6x-6y+21 = 2x(y-3)-6(y-3)+3 = (2x-6)(y-3)+3 =$
$=2(x-3)(y-3)+3$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Luând $y = x$, obţinem $x \circ x = 2(x-3)(x-3)+3 = 2(x-3)^2+3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Avem $x \circ x = 2(x-3)^2 + 3$, deci $x \circ x = 11 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 + 3 = 11 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - 3 = \pm 2$, cu soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 5$.

c) Observăm că $x \circ 3 = 2(x-3)(3-3) + 3 = 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $3 \circ y = 2(3-3)(y-3) + 3 = 3$ $\forall y \in \mathbb{R}$. Dacă notăm $1 \circ \sqrt{2} \circ \dots \circ \sqrt{8} = x$ și $\sqrt{10} \circ \sqrt{11} \circ \dots \circ \sqrt{2009} = y$, ținând cont că $\sqrt{9} = 3$ avem $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2009} = x \circ \sqrt{9} \circ y = (x \circ 3) \circ y = 3 \circ y = 3$.

Varianta 3

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 2x = 0$.

a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$, $g = X^2 + 2X - 24$ și $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f și h să fie egale.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.

Soluții

1. a) Conform relațiilor lui Viète, avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} = 0$.

b) $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{a_2}{a_0} = -2$, deci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 -$ $-2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 4$.

c) $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_2 & x_3 \\ x_2 + x_3 + x_1 & x_3 & x_1 \\ x_3 + x_1 + x_2 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$, deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

2. a) Efectuând înmulțirea, obținem $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4) = X^4 + 2X^3 -$ $-28X^2 - 8X + 96$.

b) $f = h \Leftrightarrow X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96 = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96 \Leftrightarrow a = 2$ și $b = -8$.

c) Pentru $a = 2$ și $b = -8$ avem $f = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96$, $f \in \mathbb{R}[X]$, respectiv funcția polinomială atașată $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 8x + 96$.

SUBIECTUL III

Varianta 1

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze derivata funcției f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+e^x, & x\le 0\\ \sqrt{x}+1, & x>0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} xf(x)\,dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)'=\dfrac{(x^2)'\cdot(x+1)-x^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{2x\cdot(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

b) $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}>0$ pentru $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$, deci funcția f este strict crescătoare pe fiecare în parte dintre intervalele $(-\infty,-2)$ și $(0,\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}<0$ pentru $x\in(-2,0)-\{-1\}=(-2,-1)\cup(-1,0)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe fiecare în parte dintre intervalele $(-2,-1)$ și $(-1,0)$.

c) Avem $f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,-2)$ și $f'(x)<0$ pentru $x\in(-2,-1)$, deci $x_0=-2$ este punct de maxim global pentru restricția funcției f la intervalul $(-\infty,-1)$.

Cum $f(-2)=\dfrac{(-2)^2}{-2+1}=-4\Rightarrow f(x)\le f(-2)=-4$ pentru $\forall\, x<-1$.

2. a) Evident funcția f este continuă pe intervalele $(-\infty,0]$ și $(0,\infty)$, fiind definită prin funcții continue elementare. Avem $f_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x^2+e^x\right)=1$, $f(0)=0^2+e^0=1$,

$f_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{x}+1\right)=1$. Din relația $f_s(0)=f(0)=f_d(0)=1$ deducem că funcția este continuă și în punctul $x_0=0$, deci funcția f este continuă pe întreg $\mathbb{R}$, în particular admite primitive.

b) Avem $\int_{-1}^{0} xf(x)dx=\int_{-1}^{0} x\left(x^2+e^x\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^3+xe^x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+xe^x-e^x\right]_{-1}^{0}=$

$=-1-\left(\frac{1}{4}-e^{-1}-e^{-1}\right)=\frac{8-5e}{4e}$.

c) Avem $\mathrm{Vol}\left(C_g\right)=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx=$

$=\pi\left[\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1\right)=\frac{17\pi}{6}$.

Varianta 2

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-e^{-x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+\cdots+g(2009)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f'(x)-f''(x)$.

2. Se consideră funcțiile f, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ și $F(x)=(x-1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^x\frac{f(t)f''(t)-\left(f'(t)\right)^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$, pentru orice $x>1$.

Soluții

1. $f'(x)=\left(e^x-e^{-x}\right)'=e^x+e^{-x}$ pentru $\forall\, x\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$.

b) $f'(x)=e^x+e^{-x}>0$ pentru $\forall\, x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Avem $f''(x)=(f')'(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)'=e^x-e^{-x}$, deci $f'(x)-f''(x)=e^x+e^{-x}-$ $-\left(e^x-e^{-x}\right)=2e^{-x}$, adică $g(x)=2e^{-x}$ pentru $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Varianta 99

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2-3\cdot\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice că $f'(1)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,0)$.

c) Să se arate că $\frac{x+2}{3}\geq\sqrt[3]{x}$, pentru $\forall x>0$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int(x+1)\cdot f(x)dx$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Folosind faptul că $1\leq(x+1)^2\leq4$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei f este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28},\frac{\pi}{7}\right]$.

Soluţii

1. a) $f'(x)=\left(x+2-3\sqrt[3]{x}\right)'=1-3\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\forall x>0$.

b) Avem $f(1)=1+2-3\sqrt[3]{1}=0$ şi $f'(1)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{1}}=0$. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$ este $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=0$.

c) Observăm că $f'(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}<0$ pentru $\forall\ x\in(0,1)\Rightarrow$ funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,1)$, respectiv $f'(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}>0$ pentru $\forall\ x>1$, deci funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$. În concluzie, $x_0=1$ este punct de minim global pentru funcţia f, deci $f(x)\geq f(1)\Rightarrow x+2-3\sqrt[3]{x}\geq0\Rightarrow\frac{x+2}{3}\geq\sqrt[3]{x}$, $\forall\ x>0$.

2. a) $\int(x+1)\cdot f(x)dx=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$, $x\in[0,1]$.

b) $S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{x^3+1-1}{x+1}dx=\int_0^1\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{5}{6}-\ln 2.$

c) $1\le(x+1)^2\le 4\Rightarrow\frac{1}{4}\le\frac{1}{(x+1)^2}\le 1\Rightarrow\frac{x^6}{4}\le\frac{x^6}{(x+1)^2}\le x^6$ pentru $\forall x\in[0,1]$, deci

$$\int_0^1\frac{x^6}{4}dx\le\int_0^1\frac{x^6}{(x+1)^2}dx\le\int_0^1 x^6dx\Rightarrow\frac{1}{4}\cdot\frac{x^7}{7}\bigg|_0^1\le\int_0^1\frac{x^6}{(x+1)^2}dx\le\frac{x^7}{7}\bigg|_0^1\Rightarrow\frac{1}{28}\le\int_0^1\frac{x^6}{(x+1)^2}dx\le\frac{1}{7}.$$

Cum $\mathrm{Vol}(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{x^6}{(x+1)^2}dx\Rightarrow\mathrm{Vol}(C_f)\in\left[\frac{\pi}{28},\frac{\pi}{7}\right].$

Varianta 100

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left(x^{n+1}+1\right)\cdot e^x$.

a) Să se determine $\int f_0(x)\cdot e^{-x}dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x)dx+\int_0^1 f_{2010}(x)dx\ge 2\int_0^1 f_{2009}(x)dx$.

Soluții

1. a) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$, $\forall\ x>0$.

b) Avem $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$ și $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=0$,

deci ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f este $y=mx+n=x$.