

Marius Perianu
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VI-a

II



Algebră

I. Mulțimea numerelor întregi

I.1.	Număr întreg	8
I.2.	Compararea și ordonarea numerelor întregi	13
I.3.	Adunarea numerelor întregi	17
I.4.	Scăderea numerelor întregi	24
	Teste de evaluare	29
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	31
I.5.	Înmulțirea numerelor întregi	33
I.6.	Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	39
I.7.	Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul	43
I.8.	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	47
	Teste de evaluare	50
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	53
I.9.	Rezolvarea unor ecuații în \mathbb{Z}	55
I.10.	Rezolvarea unor inecuații în \mathbb{Z}	59
I.11.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al inecuațiilor	62
	Teste de evaluare	64
	Fișă pentru portofoliul individual (A3)	67
	Test-model pentru Evaluarea Națională	69

II. Mulțimea numerelor raționale

II.1.	Mulțimea numerelor raționale. Forme de scriere a numerelor raționale	74
II.2.	Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor raționale	80
	Teste de evaluare	86
	Fișă pentru portofoliul individual (A4)	89
II.3.	Adunarea și scăderea numerelor raționale	91
II.4.	Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale	98
II.5.	Puterea cu exponent întreg a unui număr rațional	105
II.6.	Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale	111
	Teste de evaluare	117
	Fișă pentru portofoliul individual (A5)	119
II.7.	Ecuații în mulțimea numerelor raționale	121

II.8.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	126
	Teste de evaluare	130
	Fișă pentru portofoliul individual (A6)	133
	Test-model pentru Evaluarea Națională	135
II.9.	Probleme cu caracter practic	137
II.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	139

Geometrie

III. Linii importante în triunghi

III.1.	Bisectoarea	144
III.2.	Mediatoarea	148
	Teste de evaluare	152
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	155
III.3.	Înălțimea	157
III.4.	Mediana	160
	Teste de evaluare	163
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	165
	Test-model pentru Evaluarea Națională	167
III.5.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	169

IV. Proprietățile triunghiurilor

IV.1.	Proprietățile triunghiului isoscel	172
	Teste de evaluare	179
	Fișă pentru portofoliul individual (G3)	181
IV.2.	Proprietățile triunghiului echilateral	183
	Teste de evaluare	187
	Fișă pentru portofoliul individual (G4)	189
IV.3.	Proprietățile triunghiului dreptunghic	191
	Teste de evaluare	197
	Fișă pentru portofoliul individual (G5)	199
	Test-model pentru Evaluarea Națională	201
IV.4.	Relații între laturi și unghiuri (extindere)	203
	Recapitularea și consolidarea cunoștințelor	206

V. Variante de subiecte pentru teză

Varianta 1	212
Varianta 2	213
Varianta 3	214
Varianta 4	215
Varianta 5	216

Varianta 6	217
Varianta 7	218
Varianta 8	219
Varianta 9	220
Varianta 10	221
Soluții	223

Algebră

8	I.1	Număr întreg
13	I.2	Compararea și ordonarea numerelor întregi
17	I.3	Adunarea numerelor întregi
24	I.4	Scăderea numerelor întregi
29		Teste de evaluare
31		Fișă pentru portofoliul individual (A1)
33	I.5	Înmulțirea numerelor întregi
39	I.6	Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului
43	I.7	Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul
47	I.8	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor
50		Teste de evaluare
53		Fișă pentru portofoliul individual (A2)
55	I.9	Rezolvarea unor ecuații în \mathbb{Z}
59	I.10	Rezolvarea unor inecuații în \mathbb{Z}
62	I.11	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al inecuațiilor
64		Teste de evaluare
67		Fișă pentru portofoliul individual (A3)
69		Test-model pentru Evaluarea Națională

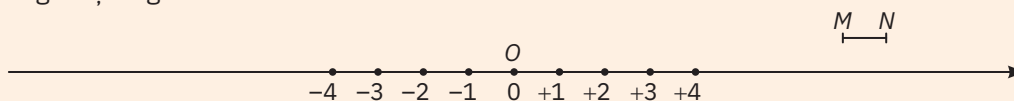
I

Mulțimea numerelor întregi



I.1. Număr întreg

Mulțimea numerelor întregi. Pe axa numerelor din reprezentarea de mai jos s-au ales punctul O ca origine și segmentul MN ca unitate de măsură.



Începând de la punctul O , spre dreapta, măsurăm una, două, trei, patru unități. În dreptul punctelor obținute scriem $+1, +2, +3, +4$. Numerele $+1, +2, +3, +4$ și toate celelalte pe care le putem obține în același mod se numesc *numere întregi pozitive*.

Începând de la punctul O , spre stânga, măsurăm una, două, trei, patru unități. În dreptul punctelor scriem $-1, -2, -3, -4$. Numerele $-1, -2, -3, -4$ și toate celelalte obținute măsurând unități spre stânga se numesc *numere întregi negative*.

Numerele întregi pozitive, numerele întregi negative și numărul 0 formează *mulțimea numerelor întregi*, care se notează cu simbolul \mathbb{Z} . Avem:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\} \quad \text{sau} \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}.$$

Alte notații: $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, \dots, +n, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi pozitive;

$\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi negative;

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – mulțimea numerelor întregi nenule.

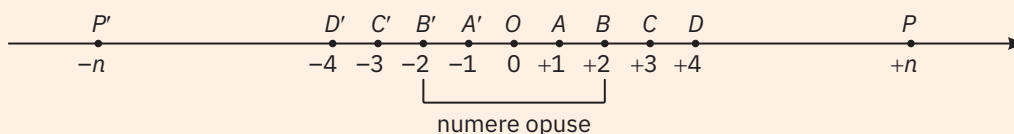
Observații:

- 1 Numerele întregi pozitive se identifică cu numerele naturale: $1 = +1, 2 = +2, 3 = +3, 4 = +4$ etc.; altfel spus, avem egalitatea $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}^*$.
- 2 Numărul 0 nu este nici pozitiv și nici negativ.

Exemple: Numerele întregi negative sunt folosite pentru a descrie temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheț, adâncimi sub nivelul mării, datorii etc.

- 1 Într-o zi de iarnă, temperatura poate fi egală cu -10°C .
- 2 Altitudinea Everestului este de $8\,848$ m, iar adâncimea maximă a Oceanului Atlantic este de $8\,385$ m. Raportate la nivelul mării, care este considerat a fi 0 m, aceste valori pot fi exprimate astfel: altitudinea este de $+8\,848$ m, iar adâncimea de $-8\,385$ m.
- 3 Soldul unei societăți comerciale se obține însumând încasările (*creditul*), reprezentate prin numere pozitive, și plățile (*debitul*) reprezentate prin numere negative. De exemplu, dacă într-o zi încasările au fost de $3\,000$ de lei, dar s-a plătit o factură de $4\,000$ de lei, atunci în ziua respectivă soldul este negativ ($-1\,000$), deoarece societatea are o *datorie* de $1\,000$ de lei.

Opusul unui număr întreg. Pe axă există puncte egal depărtate de origine. De exemplu, în reprezentarea de mai jos: A și A' , B și B' etc.



Două numere întregi nenule se numesc *opuse* dacă le corespund pe axă două puncte ce sunt egal depărtate de O .

Exemple:

1 Numerele 2 și -2 sunt opuse.

2 Numărul -4 este opusul numărului $+4$.

Observații:

- În general, dacă n este un număr natural nenul, atunci:
 - opusul numărului întreg pozitiv $+n$ este numărul întreg negativ $-n$;
 - opusul numărului întreg negativ $-n$ este numărul întreg pozitiv $+n$.
- Opusul numărului 0 este tot numărul 0, deoarece $+0 = -0 = 0$.
- Opusul unui număr întreg x (fie pozitiv, fie negativ) se notează cu $-x$.

Exemple:

- Opusul numărului -7 se notează cu $-(-7)$ și este egal cu $+7$, deci $-(-7) = +7$.
- Opusul numărului $+5$ se notează cu $-(+5)$ și este egal cu -5 , deci $-(+5) = -5$.

Valoarea absolută sau *modulul* unui număr întreg a este distanța de la origine la punctul ce îi corespunde numărului a pe axa numerelor. Se notează cu $|a|$.

Exemple:

- În reprezentarea anterioară, numărului $+3$ îi corespunde punctul C .
 $|+3| = 3$, deoarece $d(O, C) = OC = 3u$, unde $u = MN$.
- În reprezentarea anterioară, numărului -4 îi corespunde punctul D' .
 $|-4| = 4$, deoarece $d(O, D') = OD' = 4u$.

Observații: Fie n un număr natural nenul. Atunci:

- Modulul numărului întreg pozitiv n este egal cu numărul însuși: $|n| = n$.
- Modulul numărului întreg negativ $-n$ este egal cu opusul său: $|-n| = -(-n) = +n$.
- Modulul numărului întreg 0 este tot 0: $|0| = 0$.
- $|a| \geq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, cu egalitate pentru $a = 0$.

Exemple: a $|+3| = 3$;

b $|-4| = 4$;

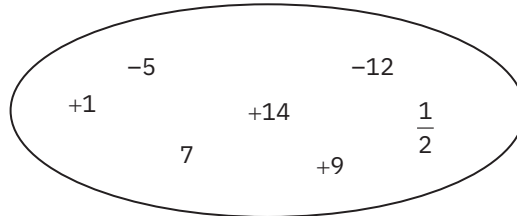
c $|0| = 0$.

Exersare

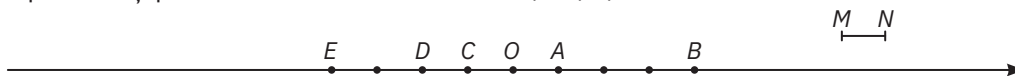


- Asociați fiecărui număr din propozițiile următoare unul dintre simbolurile $+$ sau $-$:
 - Elena are o datorie de 25 000 de lei.
 - Înălțimea ușii este de 210 cm.
 - Astăzi sunt 5°C sub zero.
 - Un scufundător a ajuns la o adâncime de 105 m sub nivelul mării.
- Fie mulțimea $A = \{-2, 5, +4, 3, -1, 0, -4, +9\}$.
 - Enumerați elementele mulțimii A ce sunt numere naturale.
 - Reprezentați, folosind o diagramă Venn-Euler, acea submulțime a mulțimii A ce conține doar numere întregi negative.

- 3 Subliniați numerele întregi negative din șirul: $-4, +3, 2, 7, 12, 0, -5, -24, +35$.
- 4 Precizați care dintre propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false:
- a „8 este un număr întreg“; b „-2 este un număr natural“;
- c „0 este un număr întreg pozitiv“; d „ $+9 \in \mathbb{Z}$ “; e „ $-5 \in \mathbb{N}$ “; f „ $-5 \in \mathbb{Z}$ “.
- 5 Enumerați elementele mulțimii M , care sunt numere naturale din diagramă:



- 6 Care este coordonata punctului de origine a axei numerelor?
- 7 Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:
- a $-3, 2, -1, -5, 4$; b $-2, +2, -3, -4, +1$; c $+6, -1, -3, +2, -4$.
- 8 Ce numere sunt reprezentate pe o axă la distanța de opt unități față de origine?
- 9 În reprezentarea următoare punctul O este originea axei.
- a Completați reprezentarea următoare cu coordonatele punctelor A, B, C, D și E .
- b Reprezentați punctele ce au coordonatele $-6, -8, 5, +9$.



- 10 a Reprezentați, pe o axă ce are ca unitate de măsură 1 cm, punctele ce corespund numerelor $-12, 5, -3, -7, +4, 2, +10, -5, 3$. Stabiliți dacă între acestea există și puncte ce sunt egal depărtate de origine.
- b Completați tabelul:

a	-7	11	$-(-3)$	29	$17 - 5$	-22	$+6$	-20	-5
$ a $									

- 11 Completați pentru a obține propoziții adevărate:
- a Opusul numărului $+5$ este b Opusul numărului 0 este numărul
- c Opusul numărului -8 este d Opusul numărului este egal cu 9 .
- e Opusul numărului este egal cu -52 . f $-(-56) = \dots\dots$.
- g $-(+43) = \dots\dots$. h $-(\dots\dots) = 23$. i $-(\dots\dots) = -19$.

Consolidare



- 12 Reprezentați pe axa numerelor toate punctele ce au distanța față de origine egală cu $2, 4, 5$ și 8 . Enumerați coordonatele punctelor și precizați, pentru fiecare dintre acestea, valoarea absolută.
- 13 Completați pentru a obține propoziții adevărate.
- a Modulul numărului -11 este egal cu

b Valoarea absolută a numărului +7 este egală cu

c $|+11| = \dots\dots$

d $|+2012| = \dots\dots$

e $|-1| = \dots\dots$

f $|-2| = \dots\dots$

14 Calculați:

a $|+8| + |-5| - |-9|$;

b $|-15| + |-3| \cdot |+6|$;

c $|-25| \cdot |-3| - |-60|$;

d $|-7| \cdot |-2| + |-24| : |-6|$;

e $|-28| : |+2| - |16| : |-4|$;

f $|+64| : |4| + 0 : |-8|$.

15 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$;

b $\{-1, 0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}$;

c $\{0, 1, 2, \dots, 2020\} \subset \mathbb{N}$;

d $\{-2020, -2019, \dots, 2019, 2020\} \subset \mathbb{Z}$.

16 Fie mulțimea $M = \left\{ +8; \frac{5}{2}; -4; +4; 0,75; -41; -(-10); 0 \right\}$. Enumerați elementele mulțimilor $M \cap \mathbb{N}$ și $M \cap \mathbb{Z}$.

17 Scrieți câte trei elemente aparținând fiecăreia dintre mulțimile de mai jos:

a \mathbb{Z} ;

b \mathbb{N} ;

c \mathbb{Z}_+ ;

d \mathbb{Z}_- ;

e $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$;

f $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$.

18 Câte elemente are mulțimea $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$? Dar $\mathbb{N} - \mathbb{Z}_+$?

19 Arătați, dând câte un contraexemplu, că propozițiile următoare sunt false:

a $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$;

b $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$;

c $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$;

d $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

20 Reprezentați pe o axă ce are ca unitate de măsură un centimetru, punctele A, B, C și D de coordonate $-6, +6, -8$, și, respectiv, $+9$. Determinați distanțele dintre:

a A și B ;

b B și C ;

c D și A .

21 Stabiliți dacă enunțurile următoare sunt adevărate pentru orice numere întregi, pentru câteva numere întregi sau nu sunt adevărate pentru niciun număr întreg:

a Valoarea absolută a unui număr întreg este negativă.

b Numerele opuse au aceeași valoare absolută.

22 Reprezentați pe axă numerele întregi care au valoarea absolută egală cu:

a 2;

b 7;

c 8.

23 Reprezentați pe axă toate numerele întregi ce au modulul cel mult egal cu 6.

24 Pe o axă ce are ca unitate de măsură 1 cm, reprezentați punctele A și B , astfel alese încât unul să aibă coordonata număr întreg pozitiv, celălalt să aibă coordonata număr negativ și distanța dintre cele două puncte să fie egală cu 5 cm. Determinați toate soluțiile. Dacă punctelor le corespund numerele a și b , calculați $|a| + |b|$.

25 Determinați toate numerele întregi x care verifică relația:

a $|x| = 2$;

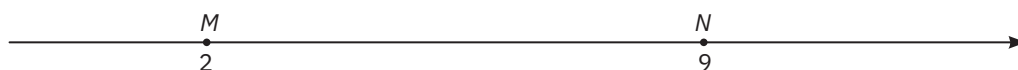
b $|x| = 10$;

c $|x| = -6$;

d $|x| \in \{3, 4, 5\}$.

26 Ce numere întregi verifică egalitatea $|x| = x$? Dar egalitatea $|x| = -x$?

27 Găsiți toate pozițiile posibile pentru punctele M și N din reprezentarea alăturată, dacă punctul M este traslatat cu cinci unități, iar punctul N cu două unități. Pentru fiecare situație în parte determinați distanța dintre M și N .





- 28** Pe o axă de coordonate cu originea în O se consideră punctele M, N având abscisele -8 , respectiv 16 , și Q ales astfel încât $OQ = 6$. Determinați lungimile segmentelor OM, ON, QM, QN .
- 29** Pe o axă de coordonate cu unitatea de măsură egală cu 1 cm se consideră punctele A și B astfel încât $AB = 12$ cm și coordonata punctului A să fie egală cu -5 .
- a** Determinați coordonata punctului B .
- b** Determinați coordonatele punctelor M și N , știind că $AM = 4$ cm și $AN = 6$ cm. Câte situații apar? Calculați de fiecare dată lungimea segmentului MN .
- 30** Determinați coordonatele punctelor M și N ce aparțin axei numerelor, știind că abscisele acestora sunt numere opuse și $MN + 4MO = 18$.
- 31 a** Reprezentați pe axa numerelor punctele A și B , astfel încât $d(A; O) = 7u$ și $d(B; O) = 8u$, unde O indică originea pe axă.
- b** Dacă $A(a)$ și $B(b)$, determinați, pentru fiecare caz, $a, b, |a|, |b|$.
- 32** Pe axa numerelor, abscisele punctelor M, N și P sunt numerele întregi x, y și, respectiv, z , care verifică relațiile $|x| = 6$ și $|y| = 4$. Știind că $NP = 3$, calculați lungimile segmentelor OM, ON, OP, MN, MP, NP .
- 33** Calculați:
- a** $|-1| + |-2| + |-3| + \dots + |-64|$; **b** $|-2| + |4| + |-6| + \dots + |-102|$;
- c** $|-5| + |-10| + |-15| + \dots + |-250|$; **d** $|-1| + |-4| + |-7| + \dots + |-235|$.
- 34** Determinați toate numerele întregi x care verifică relația:
- a** $|x - 3| = 0$; **b** $|x - 6| = 0$; **c** $|x + 5| = -6$; **d** $|x| \in \{0, 10, 100\}$.
- 35** Determinați toate numerele întregi x care verifică relația:
- a** $|2x - 6| = 0$; **b** $|3x - 12| = 0$; **c** $|4x + 20| = -6$; **d** $|3x - 27| = 0$.
- 36** Determinați toate numerele întregi x care verifică relația:
- a** $|2x - 9| = 0$; **b** $|3x - 17| = 0$; **c** $|4x + 23| = 0$; **d** $|3x - 20| = 0$.

Probleme de șapte stele



- 37** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $|x| + |y| = 0$.
- Rezolvare:** Deoarece $|x| \geq 0$ și $|y| \geq 0$, rezultă că $|x| + |y| \geq 0$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, egalitatea având loc dacă și numai dacă $|x| = |y| = 0$, adică $x = y = 0$.
- 38** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
- a** $|x| + |y| + |z| = 0$; **b** $|x - 1| + |y - 2| + |z - 3| = 0$;
- c** $|x - 2| + |y - 3| = 1$; **d** $|x| + |y| + |z| = 2$.
- 39** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
- a** $|2x - 8| + |5y - 40| = 0$; **b** $|7x - 21| + |2y - 8| = 0$;
- c** $|4x - 12| + |2y - 11| = 0$; **d** $|4x - 12| + |5y - 10| + |3z - 3| = 0$.
- 40** Determinați cardinalul mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ab; a, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq 10, |b| \leq 3\}$.
- 41** Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația $||3x - 18| - 0| = 0$.