

Ștefan Smărăndoiu

Marius Perianu

Cătălin Stănică

# Matematică

Clasa a VI-a

# I



## Algebră

### I. Mulțimi

I.1.	Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale .....	8
I.2.	Relații între mulțimi. Submulțimi .....	13
	Teste de evaluare .....	17
	Fișă pentru portofoliul individual (A1) .....	19
I.3.	Operații cu mulțimi .....	21
I.4.	Mulțimi finite și mulțimi infinite .....	26
	Teste de evaluare .....	29
	Fișă pentru portofoliul individual (A2) .....	31
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Mulțimi) .....	33
I.5.	Probleme cu caracter practic .....	36
I.6.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade .....	38

### II. Divizibilitatea numerelor naturale

II.1.	Divizibilitatea numerelor naturale (recapitulare) .....	44
II.2.	Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime .....	49
II.3.	Divizori comuni. Determinarea c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere naturale	52
II.4.	Multipli comuni. Determinarea c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere naturale	57
II.5.	Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$ .....	61
	Teste de evaluare .....	65
	Fișă pentru portofoliul individual (A3) .....	67
	Fișă pentru portofoliul individual (A4) .....	69
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Numere naturale) .....	71
II.6.	Probleme cu caracter practic .....	73
II.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade .....	75

### III. Rapoarte și proporții

III.1.	Rapoarte .....	80
III.2.	Procente .....	85
III.3.	Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor .....	92
III.4.	Proporții derivate. Șir de rapoarte egale .....	98
	Teste de evaluare .....	103
	Fișă pentru portofoliul individual (A5) .....	105
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Rapoarte și proporții) .....	107

III.5.	Mărimi direct proporționale	109
III.6.	Mărimi invers proporționale	113
III.7.	Regula de trei simplă	117
III.8.	Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice	122
III.9.	Probabilități	127
	Teste de evaluare	131
	Fișă pentru portofoliul individual (A6)	133
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Proportionalitate)	135
III.10.	Probleme cu caracter practic	137

## Geometrie

### IV. Noțiuni geometrice fundamentale

IV.1.	Unghiul. Clasificarea unghiurilor (recapitulare)	142
IV.2.	Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi	148
IV.3.	Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare	152
IV.4.	Unghiuri opuse la vârf	156
IV.5.	Unghiuri în jurul unui punct	160
	Teste de evaluare	163
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	165
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Unghiul)	167
IV.6.	Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism	169
IV.7.	Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă	174
	Teste de evaluare	180
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	181
	Test-model pentru Evaluarea Națională (Paralelism)	183
IV.8.	Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	185
	Teste de evaluare	188
IV.9.	Probleme cu caracter practic	189
IV.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	191

### V. Triunghiul

V.1.	Triunghiul. Elementele triunghiului. Clasificarea triunghiurilor	194
V.2.	Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	199
V.3.	Construcția triunghiurilor	202
V.4.	Congruența triunghiurilor	206
V.5.	Metoda triunghiurilor congruente	210
V.6.	Congruența triunghiurilor dreptunghice	215

Teste de evaluare .....	217
Fișă pentru portofoliul individual (G3) .....	219
Test-model pentru Evaluarea Națională (Triunghiul) .....	221
V.7. Probleme cu caracter practic .....	223
V.8. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade .....	225

## VI. Variante de subiecte pentru evaluarea sumativă

Varianta 1 .....	228
Varianta 2 .....	229
Varianta 3 .....	230
Varianta 4 .....	231
Varianta 5 .....	232

Soluții .....	233
---------------	-----

## I.1 Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

O *mulțime* este o grupare de obiecte, simboluri etc., bine precizate și distincte, numite *elementele* mulțimii.

Mulțimile se notează de regulă cu litere mari:  $A, B, M, N, \dots$ , iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

### Mulțimea numerelor naturale

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale se numește *mulțimea numerelor naturale*. Se notează  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

### Mulțimea numerelor naturale nenule

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale mai puțin 0 se numește *mulțimea numerelor naturale nenule*. Se notează  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

### Relații între element și mulțime

Dacă  $M$  este o mulțime și  $x$  este un element al mulțimii  $M$ , se spune că *elementul  $x$  aparține mulțimii  $M$*  (pe scurt  *$x$  aparține lui  $M$* ) și se notează  $x \in M$ .

Dacă  $x$  nu este element al mulțimii  $M$ , se spune că  *$x$  nu aparține mulțimii  $M$*  și se notează  $x \notin M$ .

**Exemplu:** Dacă  $M = \{1, 2, 3\}$ , avem  $1 \in M$ ,  $2 \in M$  și  $3 \in M$ , dar  $0 \notin M$ ,  $5 \notin M$ .

**Mulțimea vidă.** Mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează  $\emptyset$  (de exemplu mulțimea elefanților de pe Lună).

### Moduri de definire a mulțimilor

1 Enunțând o proprietate comună a elementelor acelei mulțimi.

**Exemple:**  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \cdot x + 3 \leq 18\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$ .

2 Prin enumerarea tuturor elementelor ei între acolade.

**Exemple:**  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{0, 3, 6, 9\}$ .

3 Prin enumerarea tuturor elementelor în interiorul unei linii curbe închise (numită diagrama Venn-Euler).

**Exemple:**



### Mulțimi finite. Mulțimi infinite

Reamintim că mulțimile cu un număr limitat de elemente se numesc *mulțimi finite*, iar mulțimile care nu au un număr finit de elemente se numesc *mulțimi infinite*.

### Exemple:

- 1 Mulțimea cifrelor din sistemul zecimal este finită.
- 2 Mulțimea oamenilor de pe globul pământesc este finită.
- 3 Mulțimea numerelor naturale este infinită.
- 4 Mulțimea numerelor naturale divizibile cu 7 este infinită.











- 33** Numerele naturale impare consecutive sunt grupate astfel:  $\{1\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{7, 9, 11\}$ ,  $\{13, 15, 17, 19\}$ , ... etc. Determinați suma numerelor din a opta mulțime.
- 34** Fie  $A = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$ . Aflați  $\text{card}\{x \in A \mid x : 2 \text{ sau } x : 5\}$ .
- 35** Se dă șirul de mulțimi  $A_1 = \{1\}$ ,  $A_2 = \{2, 3, 4\}$ ,  $A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ , ... .
- Scriveți elementele mulțimii  $A_4$ .
  - Determinați mulțimea ce conține numărul natural 2010.
  - Determinați cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii  $A_{2010}$ .
- 36** Fie mulțimea  $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$ . Arătați că printre oricare nouă elemente ale lui  $A$  există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

### Probleme de șapte stele



- 37** Se dă mulțimea  $A$ , formată din numere naturale, cu proprietățile:
- dacă  $x \in A$ , atunci  $5 \cdot x + 1 \in A$ ;
  - dacă  $7 \cdot x + 4 \in A$ , atunci  $x \in A$ ;
  - $9 \in A$ .
- Arătați că numărul 6 aparține mulțimii  $A$ .
- 38** Determinați mulțimile  $A$  și  $B$  care îndeplinesc simultan următoarele condiții:
- mulțimea  $\{1, 2, 3, 4\}$  este formată din toate elementele mulțimilor  $A$  și  $B$ ;
  - fiecare mulțime are câte două elemente;
  - dacă  $x \in A$ , atunci  $x + 1 \in B$ .
- 39** Se dă mulțimea  $A$ , formată din numere naturale, cu proprietățile:
- dacă  $x \in A$ , atunci  $3x + 2 \in A$ ;
  - dacă  $x^2 + 1 \in A$ , atunci  $x \in A$ ;
  - $1 \in A$ .
- Arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii  $A$ .
- 40** Se dă mulțimea  $A$ , formată din numere naturale, cu proprietățile:
- dacă  $x \in A$ , atunci  $3 \cdot x \in A$  și  $6 \cdot x + 4 \in A$ ;
  - dacă  $4 \cdot x + 2 \in A$ , atunci  $x \in A$ ;
  - $11 \in A$ .
- Arătați că  $2010 \in A$ .

## I.2 Relații între mulțimi. Submulțimi

**Egalitatea.** Două mulțimi  $A$  și  $B$  sunt egale, dacă sunt formate din aceleași elemente. Se notează  $A = B$ .

În acest caz, orice element care aparține lui  $A$  este și element al lui  $B$  și reciproc, orice element al lui  $B$  aparține și mulțimii  $A$ .

Dacă cel puțin un element al mulțimii  $A$  nu aparține lui  $B$  sau invers, se spune că mulțimile  $A$  și  $B$  sunt diferite. Se notează  $A \neq B$ .

**Exemplu:** Fie  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $C = \{2, 3, 4\}$ . Avem  $A = B$  și  $A \neq C$ .

**Incluziunea.** Mulțimea  $A$  este inclusă în mulțimea  $B$  și se notează  $A \subset B$ , dacă orice element al mulțimii  $A$  aparține mulțimii  $B$ .

Se mai spune și că mulțimea  $B$  include mulțimea  $A$  și se notează  $B \supset A$ .

Dacă cel puțin un element al mulțimii  $A$  nu este și element al lui  $B$ , se spune că mulțimea  $A$  nu este inclusă în mulțimea  $B$  și se folosește notația  $A \not\subset B$ , sau, echivalent, se spune că  $B$  nu include pe  $A$  și se notează  $B \not\supset A$ .

### Exemplu

Fie  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 5\}$ .

Atunci  $A \subset C$ ,  $B \subset C$ ,  $C \supset A$ ,  $C \supset B$ ,  $A \not\subset B$ ,  $C \not\subset A$ ,  $C \not\subset B$ ,  $B \not\subset A$ .

### Observații

**1** Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime:  $\emptyset \subset A$ .

**2** Orice mulțime este inclusă în ea însăși:  $A \subset A$ .

**3** Dacă  $A$  și  $B$  sunt două mulțimi, astfel încât  $A \subset B$  și  $B \subset A$ , atunci  $A = B$ .

**4** Dacă  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt trei mulțimi, astfel încât  $A \subset B$  și  $B \subset C$ , atunci  $A \subset C$ .

Proprietățile **2**, **3** și **4** exprimă faptul că relația de incluziune a mulțimilor este *reflexivă*, *antisimetrică* și respectiv *tranzitivă*.

Proprietatea **3** se folosește pentru a demonstra egalitatea a două mulțimi  $A$  și  $B$  prin *dublă incluziune* (sau *incluziune reciprocă*). Dacă  $A \subset B$  și  $B \subset A$  atunci  $A = B$ .

**Submulțimi.** Dacă mulțimea  $A$  este inclusă în mulțimea  $B$ , adică  $A \subset B$ , se spune că mulțimea  $A$  este o *submulțime* a mulțimii  $B$ .

**Exemplu:** Mulțimile  $U = \{1, 2\}$  și  $V = \{1, 3, 5\}$  sunt submulțimi ale lui  $M = \{1, 2, 3, 5\}$ .

### Observații

**1** Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi.

**2** Numărul submulțimilor unei mulțimi  $A$  este egal cu  $2^{\text{card}A}$ .

**3** Mulțimea submulțimilor (părților) lui  $A$  se notează cu  $\mathcal{P}(A)$ .

**Exemplu:** Mulțimea  $A = \{1, 2, 3\}$  are  $2^3 = 8$  submulțimi:  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$  și  $A$ .







### Testul 1

- (1p) 1** Scrieți toate submulțimile mulțimii  $A = \{1, 4, 9\}$ .
- (1p) 2 a** Determinați valorile lui  $x$  pentru care mulțimea  $\{x, 3\}$  este o submulțime a mulțimii  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  
**b** Câte elemente are mulțimea multiplilor lui 15 mai mici decât 400?
- (2p) 3 a** Determinați cardinalul mulțimii  $\{13, 15, 17, \dots, 79\}$ .  
**b** Determinați cardinalul mulțimii divizorilor numărului  $2^5$ .
- (2p) 4 a** Aflați numărul maxim de mulțimi diferite ce se formează cu numerele 1, 2, 3.  
**b** Se dă mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Determinați numărul submulțimilor de două elemente ale mulțimii  $A$ , astfel încât suma elementelor fiecăreia să fie un număr par.
- (1p) 5** Aflați mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 4 \leq 12\}$  și  $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 2^3 < 3^y < 2^7\}$ .
- (2p) 6** Fie mulțimile  $A = \{x \mid x = 5 \cdot n + 7, n \in \mathbb{N}\}$  și  $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$ .  
 Determinați elementele mulțimilor  $C = \{x \in A \mid x < 30\}$  și  $D = \{y \in B \mid 30 < y < 100\}$ .

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

### Testul 2

- (1p) 1 a** Determinați mulțimea divizorilor numărului 75.  
**b** Determinați mulțimea multiplilor lui 20, mai mici decât 150.
- (1p) 2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:  
**a**  $15 \in \{0, 5, 10, \dots, 100\}$ ;                      **b**  $\{1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{N}$ ;  
**c**  $\mathbb{N}^* \subset \{1, 2, 3, \dots, 2011\}$ ;                      **d**  $\emptyset \in \mathbb{N}$ .
- (2p) 3 a** Determinați elementele mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x+2) : 5, x = \overline{ab}\}$ .  
**b** Determinați elementele mulțimilor:  
 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 3, 1 \leq k \leq 5\}$  și  $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, 5^3 - 4 \leq y \leq 2^7 - 1\}$ .
- (2p) 4** Fie  $A = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ . Determinați numărul submulțimilor  $B \subset A$ , știind că  $\{1, 2\} \subset B \subset \{1, 2, \dots, 81\}$ .
- (2p) 5** Determinați suma elementelor mulțimii  $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 2^{100}\}$ .
- (1p) 6** Se dă mulțimea  $A$  cu proprietățile:  
**a** dacă  $x \in A$ , atunci  $3x + 2 \in A$ ;                      **b** dacă  $3x + 1 \in A$ , atunci  $x \in A$ ;                      **c**  $19 \in A$ .  
 Arătați că numărul 1700 aparține mulțimii  $A$ .

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

### Testul 3

- (1p) 1** Scrieți toate submulțimile mulțimii  $A = \{0, 6\}$ .
- (1p) 2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:  
**a**  $18 \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ;                      **b**  $0 \notin \mathbb{N}^*$ ;  
**c**  $\{6, 7, 8\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 23\}$ ;                      **d**  $12 \in \mathbb{N}$ .
- (2p) 3 a** Determinați elementele mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 18 : (x + 1)\}$ .  
**b** Se dau mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x \leq 13\}$  și  $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 9 \leq x < 18\}$ .  
Determinați elementele comune celor două mulțimi.
- (2p) 4** Determinați elementele comune mulțimilor  $A = \{x \mid x = n! + 4, n \in \mathbb{N}\}$   
și  $B = \{y \mid y = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$ .
- (2p) 5 a** Determinați numărul mulțimilor  $B$  știind că  $\{1, 2\} \subset B \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .  
**b** Fie  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Determinați numărul submulțimilor lui  $A$  cu proprietatea că suma elementelor fiecărei submulțimi este cel mult 6.
- (1p) 6** Se dă mulțimea  $A$  cu proprietățile:  
**a** dacă  $x \in A$ , atunci  $5x + 1 \in A$ ;                      **b** dacă  $x + 1 \in A$ , atunci  $x \in A$ ;                      **c**  $19 \in A$ .  
Arătați că numărul 2026 aparține mulțimii  $A$ .

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

### Testul 4

- (1p) 1** Scrieți toate submulțimile mulțimii  $A = \{7, 8, 9\}$ .
- (1p) 2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:  
**a**  $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}^*$ ;                      **b**  $1 \notin \mathbb{N}^*$ ;  
**c**  $\{1, 2, 3, \dots, 23\} \subset \{6, 7, 8\}$ ;                      **d**  $\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$ .
- (2p) 3 a** Determinați elementele mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 : (x + 1)\}$ .  
**b** Se dau mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 12\}$  și  $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 3^y < 81\}$ .  
Determinați elementele comune celor două mulțimi.
- (2p) 4** Determinați elementele mulțimii  $A = \{x \mid x = n^2 + 4, 2^n \leq n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 12\}$ .
- (2p) 5 a** Determinați numărul mulțimilor  $B$  știind că:  $\{1, 2, 3, 4\} \subset B \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  
**b** Fie  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Determinați numărul submulțimilor lui  $A$  cu proprietatea că produsul elementelor fiecărei submulțimi este cel mult 15.
- (1p) 6** Determinați elementele mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{xy}5 = 5^{x+y}\}$ .

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.



## Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: .....

Clasa a VI-a:

# A1

### Tema: Mulțimi. Relații între mulțimi. Submulțimi

**(2p) 1** Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect. Numai un răspuns din cele patru este corect.

**a** Dintre numerele de mai jos, element al mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11\}$  este:

- A** 10                      **B** 12                      **C** 11                      **D** 13.

**b** Mulțimea  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 7\}$  este egală cu:

- A**  $B = \{4, 5, 6\}$               **B**  $B = \{5, 6\}$               **C**  $B = \{567\}$               **D**  $B = \{5, 6, 7\}$ .

**c** Dacă  $\{2, 4, 6, 8\} = \{a, b, c, 2\}$ , atunci suma  $a + b + c$  este egală cu:

- A** 10                      **B** 18                      **C** 14                      **D** 12.

**d** Numărul submulțimilor mulțimii  $C = \{0, 1, 2\}$  este egal cu:

- A** 8                      **B** 3                      **C** 7                      **D** 4.

**(2p) 2** Completați pe fișă spațiile libere pentru a obține enunțuri adevărate.

**a** Dacă  $\{2, a, b\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , cea mai mare valoare a diferenței  $a - b$  este .....

**b** Valoarea de adevăr a propoziției „ $30 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x : 10\}$ ” este .....

**c** Cardinalul mulțimii  $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 5, 16 \leq x \leq 36\}$  este egal cu .....

**d** Dacă  $\{1, 4, 7, 10, 13, 16\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3y + 1, y \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ , atunci  $n$  este egal cu .....

**(2p) 3** Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

A	B
<b>a</b> $\text{card}\{x \in \mathbb{N} \mid 24 \leq x < 51\}$ este	<b>1</b> 9
<b>b</b> Produsul elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x : 5, x \leq 126\}$ este	<b>2</b> 0
<b>c</b> Suma elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 2x + 1 < 17\}$ este	<b>3</b> 28
<b>d</b> Cel mai mic element al mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 > 18\}$ este	<b>4</b> 26
	<b>5</b> 27





