Marius PERIANU Florian DUMITREL

# Matematică

## clasa a IX-a

### semestrul I

filiera teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)
filiera tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)
filiera vocațională: profil militar (matematică-informatică)

art
educațional

# CUPRINS

CAPITOLUL 1

# MULȚIMEA NUMERELOR REALE

# Tema 1.1

## Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

Notăm cu $\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale și cu $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi. Astfel, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ și $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ $(a,c\in\mathbb{Z},\ b,d\in\mathbb{Z}^*)$ se numesc *echivalente* dacă $ad=bc$; scriem $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește *număr rațional*. Pentru simplificarea exprimării, vom identifica un număr rațional cu oricare dintre fracțiile echivalente care îl reprezintă. Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$. Așadar,

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\ \middle|\ p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\right\}.$$

Cu ajutorul algoritmului de împărțire a două numere naturale, orice fracție ordinară $\frac{p}{q}$ ($p\geq 0,\ q>0$) se poate scrie sub formă de fracție zecimală periodică, cu perioada diferită de $(9)$. Reciproc, orice fracție periodică, cu perioada diferită de $(9)$, se poate scrie sub formă de fracție ordinară.

Dacă $a$ este o *fracție periodică simplă*, adică are forma $a=a_0,(a_1a_2...a_p)$, unde $a_0\in\mathbb{N}$ și $a_1,a_2,...,a_p\in\{0,1,2,...,9\}$, atunci

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_p}}{\underbrace{99...9}_{p\text{ ori}}}.$$

În cazul când $a$ este *fracție periodică mixtă*, adică $a=a_0,a_1a_2...a_k(a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+p})$, avem

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_{k+p}}-\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{p\text{ ori}}\underbrace{00...0}_{k\text{ ori}}}.$$

$\mathbb{Q}$ este mulțimea tuturor fracțiilor periodice (fracțiile zecimale finite sunt considerate fracții periodice cu perioada $(0)$).

Există fracții zecimale infinite și neperiodice, de exemplu $a=0{,}1010010001...$. O astfel de fracție zecimală se numește *număr irațional*.

Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale, obținem *mulțimea numerelor reale*, pe care o notăm cu $\mathbb{R}$. Așadar, $\mathbb{R}$ este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Au loc incluziunile: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

$*$

1. **a)** Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, fracția $\dfrac{2m+1}{3m+2}$ este ireductibilă.

**b)** Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\dfrac{n+2}{3n+1}$ este reductibilă.

2. Scrieți ca fracție zecimală fiecare dintre numerele:

**a)** 5; **b)** $\dfrac{13}{8}$; **c)** $\dfrac{3}{4}$; **d)** $-\dfrac{3}{20}$; **e)** $\dfrac{14}{11}$;

**f)** $\dfrac{481}{125}$; **g)** $-\dfrac{2}{3}$; **h)** $\dfrac{31}{13}$; **i)** $\dfrac{77}{75}$; **j)** $-\dfrac{47}{66}$.

3. Transformați în fracții ordinare următoarele fracții zecimale:

**a)** 5,(7); **b)** $-1,(13)$; **c)** 0,23(7); **d)** $-1,01(02)$; **e)** $-3,2(123)$.

4. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Este posibil ca $a^2$ și $a^3$ să fie numere raționale?

5. **a)** Aflați a $100-a$ zecimală a numărului rațional $\dfrac{1}{13}$.

**b)** Arătați că există un multiplu de 13 format numai cu cifra 1.

6. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$. Arătați că, dacă $ma \in \mathbb{Z}$ și $na \in \mathbb{Z}$, atunci $a \in \mathbb{Z}$.

7. Arătați că, dacă o singură cifră din reprezentarea zecimală a unui număr real se repetă de o infinitate de ori, atunci numărul este rațional.

8. Arătați că un număr rațional pozitiv $\dfrac{p}{q}$ $\left(p, q \in \mathbb{N}^*, (p,q)=1\right)$ se reprezintă ca fracție zecimală finită dacă și numai dacă $q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

$**$

9. Se consideră numărul $a = 0,101001000100001...$ .

**a)** Arătați că $a$ este număr irațional.

**b)** Aflați a 1000-a zecimală a numărului $a$.

**c)** Calculați suma primelor 1000 de zecimale ale numărului $a$.

10. **a)** Fie $x, y \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Arătați că $x + y \cdot a = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.

**b)** Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.

11. Demonstrați afirmațiile:

**a)** dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $r + a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

**b)** dacă $r \in \mathbb{Q}^*$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $ra \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

**c)** dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

**d)** dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**12.** Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că:

***a)*** $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = k^2,\ k \in \mathbb{N}$; ***b)*** $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

**13.** Arătați că există o infinitate de perechi $(a,b)$ de numere iraționale cu $a+b \in \mathbb{Q}$ și $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

**14.** Arătați că numărul $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este irațional.

**15.** Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

***a)*** $\sqrt{5^n+2}$; ***b)*** $\sqrt{7n+3}$; ***c)*** $\sqrt{n^2+5n+7}$; ***d)*** $\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

**16.** Determinați numerele naturale $k$ pentru care numărul $\sqrt{k^2+3k+14}$ este rațional.

**17.** Fie mulțimea $M = \left\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a^2-3b^2=1\right\}$. Arătați că:

***a)*** $2+\sqrt{3} \in M$;

***b)*** $x, y \in M \Rightarrow xy \in M$;

***c)*** $M$ este infinită.

**18.** ***a)*** Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{m},\ \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

***b)*** Determinați perechile $(x, y)$ de numere naturale astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\sqrt{3}$.

**19.** Fie $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a+b \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n$. Arătați că numerele $a-b$ și $ma+nb$ sunt iraționale.

***

**20.** Determinați $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0,58(3)$.

**21.** Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ este irațional.

**22.** Determinați numerele naturale $n$ pentru care numărul $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+21}$ este rațional.

# Tema 1.2
## Operații algebrice cu numere reale

Calculul cu numere reale se bazează pe proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale.

**Adunarea** este operația prin care oricărei perechi de numere reale $(x, y)$ i se asociază un număr real, notat cu $x+y$, numit *suma* numerelor $x$ și $y$.

**Proprietățile adunării**

1. Adunarea este *asociativă*: $(a+b)+c=a+(b+c)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.
2. Adunarea este *comutativă*: $a+b=b+a$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.
3. Numărul real $0$ este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, avem $a+0=0+a=a$.
4. Orice număr real $a$ are un *opus*, adică există un număr real notat cu $-a$, astfel încât $a+(-a)=(-a)+a=0$.

Dacă $x, y\in\mathbb{R}$, se notează $x-y=x+(-y)$ *diferența* numerelor $x$ și $y$.

**Înmulțirea** este operația prin care oricărei perechi de numere reale $(x, y)$ i se asociază un număr real, notat cu $x\cdot y$ sau $xy$, numit *produsul* numerelor $x$ și $y$.

**Proprietățile înmulțirii**

1. Înmulțirea este *asociativă*: $(ab)c=a(bc)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.
2. Înmulțirea este *comutativă*: $ab=ba$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.
3. Numărul real $1$ este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, avem $a\cdot 1=1\cdot a=a$.
4. Orice număr real $a\neq 0$ are un *invers*, adică există un număr real, notat cu $a^{-1}$, astfel încât $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.
5. Înmulțirea este *distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$, au loc egalitățile:

$$a(b+c)=ab+ac, \qquad (a+b)c=ac+bc.$$

Dacă $x, y\in\mathbb{R}$ și $y\neq 0$, se notează $\frac{x}{y}=xy^{-1}$ (*câtul* numerelor reale $x$ și $y$).

---

*

1. Calculați $(-1)^n\cdot 0{,}1(3)+(-1)^{n+1}\cdot 0{,}1+(-1)^{n+2}\cdot\frac{7}{6}+(-1)^{n+3}\cdot\frac{1}{5}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

2. Calculați: ***a)*** $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{6}{\sqrt{3}}$; ***b)*** $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

3. ***a)*** Dacă $\frac{3}{13}=0,a_1a_2a_3\ldots$, calculați $a_{2000}-a_{1000}$ și $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.

   ***b)*** Dacă $\frac{41}{333}=0,a_1a_2a_3\ldots$, calculați $a_5+a_{10}+a_{15}+\ldots+a_{100}$.

**4.** ***a)*** Calculați suma dintre opusul și inversul numărului $\sqrt{5}-2$.

***b)*** Calculați suma inverselor următoarelor numere: $-1,\ \ 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$.

**5.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ în fiecare dintre cazurile:

***a)*** opusul numărului $2x-3$ este $15$;

***b)*** inversul numărului $3x-2$ este 5;

***c)*** numărul $x^2-x$ este inversabil.

**6.** Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:

***a)*** $3-2\sqrt{2}$ și $3+2\sqrt{2}$;

***b)*** $\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $\sqrt{10}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

**7.** Se dau numerele: $a=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $c=5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Calculați:

***a)*** $a+b+c$;

***b)*** $a^2+b^2+c^2$;

***c)*** $ab+bc+ca$.

**

**8.** Calculați:

***a)*** $2,(3)+7,(6)$;

***b)*** $0,(3)+0,0(3)+0,00(3)$;

***c)*** $1,1(3)-2,07(27)$;

***d)*** $\frac{3}{5}-0,1(3)+\frac{1}{7}-0,(285714)$.

**9.** Calculați:

***a)*** $5\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)-7\left(1-\frac{5}{6}+\frac{11}{12}\right)$;

***b)*** $\frac{(1,5-0,25+5,8(3)):2,5}{0,(6)\cdot 3,(3)-0,25\cdot 2,1(6)}-\frac{1}{11}\cdot\left(1-1:\frac{3}{2}\right)$;

***c)*** $1-\left\{\left[\frac{1}{12}-\frac{1}{16}-7:(-24)\right]:\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right)$.

**10.** Determinați numerele reale $x$ din egalitatea: $\frac{1}{2}\cdot\left\{3-\frac{1}{2}\cdot\left[3-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-1\right)\right]\right\}=1$.

**11.** Calculați cu două zecimale exacte:

***a)*** $\sqrt{3}$;

***b)*** $\sqrt{2,013}$;

***c)*** $\sqrt{5,71}$;

***d)*** $\frac{\sqrt{5}}{4}$;

***e)*** $\frac{\sqrt{39}}{3}$.

**12.** Calculați: $\dfrac{2,8+5\frac{1}{2}:\left(3+0,2\cdot 2\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7}\cdot 4\frac{1}{5}+2,45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-\sqrt{1,5625}}:2\frac{4}{5}$.

**13.** Se consideră numerele reale $a, b, x, y$ astfel încât $a-b=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ și $x+y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.
Calculați $ax-by+ay-bx$.

**14.** Calculați:

***a)*** $\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{5}\right)$;

***b)*** $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

***c)*** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$.

**15.** Arătați că:

*a)* $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=4$.

**16.** Calculați:

*a)* $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{5}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

*b)* $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^{-2}\cdot\left(3{,}5+0{,}(6)\right)$;

*c)* $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

**17.** Arătați că $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}\in\mathbb{N}$.

***

**18.** Câturile obținute prin împărțirea numerelor $\dfrac{24}{11}$, $\dfrac{34}{13}$, $\dfrac{48}{7}$ la un număr rațional $r>0$ sunt numere întregi. Aflați cel mai mare număr rațional $r$ cu această proprietate.

**19.** Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculați $\dfrac{a^2-ab+2b^2}{a^2+ab+3b^2}$.

**20.** *a)* Arătați că $\dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

*b)* Calculați suma

$$S_n=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

*c)* Determinați $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $S_m=0{,}75$.

# Tema 1.3

## Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)

În contextul operațiilor cu numere reale sunt foarte utile *formulele de calcul prescurtat.*

**1. Factorul comun:** $ab+ac=a(b+c)$.

**2. Binomul la pătrat:** $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

**3. Diferența de pătrate:** $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

**4. Trinomul la pătrat:** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

**5. Binomul la cub:** $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$,

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

**6. Suma de cuburi:** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

**7. Diferența de cuburi:** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Formulele 3, 6 și 7 admit următoarele generalizări:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}), \text{ unde } n\in\mathbb{N},\ n\geq 2;$$

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}), \text{ unde } n\in\mathbb{N} \text{ este impar.}$$

### Descompunerea trinomului de gradul al II-lea în factori de gradul I

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, astfel încât $b^2-4ac\geq 0$. Dacă $x_1$ și $x_2$ sunt soluțiile ecuației $ax^2+bx+c=0$, atunci $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

### Exemple

**1.** Ecuația $x^2-3x+2=0$ are soluțiile $x_1=1,\ x_2=2$, deci $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

**2.** Ecuația $4x^2-4x+1=0$ are soluțiile $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$, deci

$$4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2x-1}{2}=(2x-1)^2.$$

### Descompunerea în factori a unei expresii polinomiale de grad cel puțin egal cu 3

**Propoziție.** Se consideră expresia

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \text{ unde } a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R},\ a_n\neq 0.$$

***a)*** Dacă $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$, atunci există $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x)=(x-c)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0).$$

***b)*** Dacă $f(c)=0$ și, în plus, $c,a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}$, atunci $c\mid a_0$.

**Demonstrație**

***a)*** Avem: $f(x)=f(x)-f(c)=a_1(x-c)+a_2\left(x^2-c^2\right)+\ldots+a_n\left(x^n-c^n\right)$.

Concluzia se obține având în vedere că

$$x^k-c^k=(x-c)\left(x^{k-1}+cx^{k-2}+c^2x^{k-3}+\ldots+c^{k-1}\right).$$

***b)*** Din $f(c)=0$ rezultă $a_0=-c\left(a_1+a_2c+...+a_nc^{n-1}\right)$, de unde $c|a_0$.

**Exemplu.** Vom descompune în factori expresia $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$. Observăm că un divizor întreg al lui 2 care anulează expresia este 2. Prin urmare, $f(x)=(x-2)g(x)$. Pentru a determina $g(x)$, grupăm termenii expresiei $f(x)$ așa încât să putem da factor comun pe $x-2$:

$$f(x)=\underbrace{2x^3-4x^2}+\underbrace{3x^2-6x}+\underbrace{x-2}=$$

$$=2x^2(x-2)+3x(x-2)+x-2=(x-2)(2x^2+3x+1).$$

Deci $g(x)=2x^2+3x+1$. La fel, din faptul că $g(-1)=0$, deducem că $g(x)$ are în descompunere factorul $x+1$; avem

$$g(x)=\underbrace{2x^2+2x}+\underbrace{x+1}=2x(x+1)+x+1=(x+1)(2x+1).$$

În concluzie, $f(x)=(x-2)(x+1)(2x+1)$.

---

*

**1.** Arătați că, oricare ar fi numerele reale $a,b,c$, au loc egalitățile:

***a)*** $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

***b)*** $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

***c)*** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

***d)*** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

**2.** Numerele reale $a$ și $b$ îndeplinesc condițiile $a+b=6$ și $ab=1$. Calculați:

***a)*** $a^2+b^2$; ***b)*** $a^3+b^3$; ***c)*** $a^4+b^4$; ***d)*** $a-b$.

**3.** Arătați că, oricare ar fi numerele întregi $a,b,c,d$, există două numere întregi $x$ și $y$ astfel încât $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=x^2+y^2$.

**4.** Fie $x,y\in\mathbb{Q}$, $x+y\neq 0$ și $z=\dfrac{xy}{x+y}$. Arătați că $x^2+y^2+z^2$ este pătratul unui număr rațional.

**5.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Calculați:

***a)*** $a^3+b^3$ știind că $a+b=10$ și $ab=1$;

***b)*** $a^2+b^2$ știind că $a+b=4$ și $a^3+b^3=52$;

***c)*** $a^3-b^3$ știind că $a-b=2$ și $ab=1$.

**6.** Fie $x$ un număr real nenul. Calculați:

***a)*** $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ în funcție de $a=x+\dfrac{1}{x}$; ***b)*** $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ în funcție de $b=x-\dfrac{1}{x}$.

**7.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a-b=1$ și $a^3-b^3=37$. Calculați $a^2+b^2$.

**8.** Calculați:

***a)*** $\left(\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{3a^2+b^2}{2ab}+\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*$;

**b)** $\frac{1}{a^3}\left\{\left[a-\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)\right]\cdot\left(a^2+a+1\right)+1\right\}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$;

**c)** $\frac{a^3-b^3}{a^3+a^2b+ab^2}:\left[\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}+\frac{ab}{a^2-b^2}\right)\right]$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a\neq\pm b$.

**9.** Descompuneți în factori de forma $ax+b$:

**a)** $x^2-x-2$; **b)** $2x^2+5x+3$; **c)** $x^3-6x^2+11x-6$;

**d)** $2x^3+x^2-5x+2$; **e)** $x^4-3x^3+x^2+3x-2$; **f)** $x^4+x^3-3x^2-4x-4$.

**10.** **a)** Descompuneți în factori expresiile

$$A(x)=x^3-4x^2+x+6 \text{ și } B(x)=x^3-2x^2-3x.$$

**b)** Determinați numerele reale $x$ pentru care fracția $F(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ are valoarea definită.

**c)** Determinați numerele întregi $k$ pentru care $F(k)\in\mathbb{Z}$.

**

**11.** Se consideră expresia $E(x)=x^4-x^3-6x^2+4x+8$.

**a)** Calculați $E(-2)$ și $E(2)$.

**b)** Simplificați fracția $F(x)=\frac{x^4-x^3-6x^2+4x+8}{x^4-16}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

**12.** Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}+\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

**a)** Arătați că $E(x)=\frac{1}{x+1}$.

**b)** Calculați $E(1)\cdot E\left(\frac{1}{2}\right)\cdot E\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot E\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

**13.** Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât $x+y+z=1$ și $(x+y)(y+z)(z+x)=14$. Calculați

$$xy+yz+zx-xyz.$$

**14.** Fie $x,y\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $x^2-5xy+6y^2=0$. Determinați $\frac{x}{y}$.

**15.** Fie $x,y,z\in\mathbb{Q}$ astfel încât $xy+yz+zx=1$. Arătați că $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ este pătratul unui număr rațional.

**16.** Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ cu $a+b+c=0$. Arătați că

$$\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2-b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

**17.** Arătați că, oricare ar fi numerele reale $a,b,c$, au loc egalitățile:

**a)** $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

**b)** $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

**18.** Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

***a)*** Arătați că $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$.

***b)*** Dacă, în plus, $n$ este impar, arătați că

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + ... - xy^{n-2} + y^{n-1}\right).$$

***c)*** Folosind ***a)***, demonstrați că $(a+b)^n = a^n + Mb = Ma + b^n$ pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$.

***d)*** Arătați că, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$, numărul $2^{3m+1} + 3 \cdot 5^{2m+1}$ este divizibil cu $17$.

**19.** Numărul real $a > 0$ îndeplinește condiția $a^2 + \dfrac{1}{a^2} = 14$. Calculați $a^5 + \dfrac{1}{a^5}$.

**20.** Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$. Arătați că $\dfrac{a}{1+a+ab} + \dfrac{b}{1+b+bc} + \dfrac{c}{1+c+ca} = 1$.

**21.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați egalitățile, descompunând membrul stâng în produs:

***a)*** $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$;

***b)*** $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = (a+b)(b+c)(c+a)$;

***c)*** $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$;

***d)*** $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$;

***e)*** $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

**22.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$(x-a)^2(b-c) + (x-b)^2(c-a) + (x-c)^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

**23.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b \neq c \neq d$. Demonstrați egalitățile:

***a)*** $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$;

***b)*** $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$;

***c)*** $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c$;

***d)*** $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b(b-c)(b-a)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)} = \dfrac{1}{abc}$.

**24.** Numerele reale $a$, $b$, $c$ îndeplinesc condițiile

$$(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0 \quad \text{și} \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Demonstrați egalitățile:

***a)*** $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} = 0$; ***b)*** $\dfrac{a^3}{b+c} + \dfrac{b^3}{c+a} + \dfrac{c^3}{a+b} + a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

**25.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b \neq c \neq a$, astfel încât $\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b} = 0$. Arătați că

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

*******

**26.** Arătați că, dacă $x, y, z$ sunt numere raționale distincte, atunci numărul

$$s = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$$

este pătratul unui număr rațional.

**27.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați egalitatea, descompunând membrul stâng în produs:

$$(a+b)(b+c)(c+a) + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

**28.** Arătați că, dacă numerele reale pozitive $a, b, c$ îndeplinesc condiția $ab+bc+ca=1$, atunci

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} = \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

**29.** Demonstrați identitatea lui *Catalan*:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

**30.** Demonstrați următoarele egalități de numere reale:

***a)*** $\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2 + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2$;

***b)*** $\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2 + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2 + \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)^2 +$
$+ \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right)^2$.

**Generalizare** (identitatea lui *Lagrange*). Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

## TESTE DE EVALUARE

### Testul 1

(2p) **1.** ***a)*** Găsiți numerele $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracțiile $\frac{k^2+5}{2}$ și $\frac{2k^2+3}{3}$ sunt echivalente.

***b)*** Calculați: $1,(18)+2,5(45)-2,(72)$.

(2p) **2.** Se consideră numerele reale $a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ și $b=2+\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

***a)*** Arătați că $a,b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

***b)*** Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor $a$ și $b$.

(2p) **3.** ***a)*** Arătați că $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$ pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$.

***b)*** Numerele reale $a,b$ îndeplinesc condițiile $a-b=2$ și $ab=4$. Calculați $a+b$.

(3p) **4.** Fie fracția $F(x)=\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-x^2-9x+9}$.

***a)*** Determinați numerele reale $x$ pentru care fracția are valoarea definită.

***b)*** Calculați $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

***c)*** Simplificați fracția.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

### Testul 2

(2p) **1.** ***a)*** Găsiți numerele $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracțiile $\frac{k^2+2}{3}$ și $\frac{3k^2-1}{2}$ sunt echivalente.

***b)*** Calculați: $1,(27)+2,2(27)-3,5$.

(2p) **2.** Se consideră numerele reale $a=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ și $b=1+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

***a)*** Arătați că $a,b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

***b)*** Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor $a$ și $b$.

(2p) **3.** ***a)*** Arătați că $x^3+y^3=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)$ pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$.

***b)*** Numerele reale $a,b$ îndeplinesc condițiile $a^3+b^3=18$ și $a+b=3$. Calculați $a \cdot b$.

(3p) **4.** Fie fracția $F(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

***a)*** Determinați numerele reale $x$ pentru care fracția are valoarea definită.

***b)*** Calculați $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

***c)*** Simplificați fracția.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

## Testul 3

**(2p)** **1.** ***a)*** Scrieți numărul rațional $\frac{5}{7}$ sub formă de fracție zecimală.

***b)*** Dacă $\frac{5}{7} = 0,a_1a_2a_3\ldots$, calculați $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

**(3p)** **2.** ***a)*** Arătați că numerele $7-4\sqrt{3}$ și $7+4\sqrt{3}$ sunt iraționale.

***b)*** Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor $7-4\sqrt{3}$ și $7+4\sqrt{3}$.

***c)*** Arătați că numărul $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ este natural.

**(2p)** **3.** ***a)*** Arătați că $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

***b)*** Fie $a,b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a^2 - ab - 2b^2 = 0$. Determinați $\frac{a}{b}$.

**(2p)** **4.** Se consideră fracția $F(x) = \frac{(x^2-x)(x^2-x-5)+6}{(x^2-x-4)^2-4}$.

***a)*** Determinați numerele reale $x$ pentru care fracția are valoarea definită.

***b)*** Simplificați fracția $f$.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

## Testul 4

**(2p)** **1.** ***a)*** Scrieți numărul rațional $\frac{3}{7}$ sub formă de fracție zecimală.

***b)*** Dacă $\frac{3}{7} = 0,a_1a_2a_3\ldots$, calculați $a_1 + a_2 + \ldots + a_{101}$.

**(3p)** **2.** ***a)*** Arătați că numerele $6-4\sqrt{2}$ și $6+4\sqrt{2}$ sunt iraționale.

***b)*** Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor $6-4\sqrt{2}$ și $6+4\sqrt{2}$.

***c)*** Arătați că numărul $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ este natural.

**(2p)** **3.** ***a)*** Arătați că $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

***b)*** Fie $a,b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a^2 - 2ab - 3b^2 = 0$. Determinați $\frac{a}{b}$.

**(2p)** **4.** Se consideră fracția $F(x) = \frac{(x^2+x)(x^2+x+1)-6}{(x^2+x)(x^2+x-8)+12}$.

***a)*** Determinați numerele reale $x$ pentru care fracția are valoarea definită.

***b)*** Simplificați fracția $f$.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.