CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU
I. V. MAFTEI
D. OROS
MĂDĂLINA-GEORGIA NICOLESCU
GH. CHETA
CRISTINA-PAULA MARIN
PETRE SIMION
ANCA SILVIA NEGULESCU
FLORICA VORNICESCU
PETRU ORBULESCU MATEŞESCU

# GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

## exerciţii şi probleme pentru elevii claselor de liceu

Probleme pregătitoare pentru
EXAMENUL DE BACALAUREAT
şi concursul de admitere
în învăţământul superior

ROMANIA · ICAR · EDITURA ŞI TIPOGRAFIA

# CUPRINS


## I. GEOMETRIE

**Capitolul 1. Elemente de calcul vectorial** ........ 3
1.1. Rezultate remarcabile ........ 3
1.2. Probleme rezolvate ........ 5
1.3. Probleme propuse ........ 9
1.4. Indicații – soluții ........ 23

**Capitolul 2. Elemente de geometrie analitică** ........ 48
2.1. Rezultate remarcabile ........ 48
2.2. Probleme rezolvate ........ 50
2.3. Probleme propuse ........ 56
2.4. Indicații – soluții ........ 65

## II. TRIGONOMETRIE

**Capitolul 1. Elemente de trigonometrie** ........ 77
1.1. Unghiuri și arce ........ 77
1.2. Funcțiile trigonometrice în triunghiul dreptunghic ........ 77
1.3. Definirea funcțiilor trigonometrice:
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ pe $[0, 2\pi]$; $\mathrm{tg}\alpha$ pe $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; $\mathrm{ctg}\alpha$ pe $(0, \pi)$ ........ 83
1.4. Definirea funcțiilor trigonometrice pe domeniul maxim ........ 83
1.5. Reducerea la primul cadran ........ 85
1.6. Graficele funcțiilor trigonometrice ........ 86
1.7. Formule pentru calcularea valorilor funcțiilor trigonometrice pentru $\cos(x \pm y)$; $\sin(x \pm y)$; $\mathrm{tg}(x \pm y)$; $\mathrm{ctg}(x \pm y)$; ........ 104
1.8. Formule pentru calcularea valorilor funcțiilor trigonometrice ale arcului dublu, triplu, arcului pe jumătate ........ 107
1.9. Formule pentru transformarea sumei și diferenței a două funcții de același nume în produs ........ 113
1.10. Formule pentru transformarea produsului de funcții trigonometrice în sumă algebrică de funcții trigonometrice ........ 113
1.11. Identități condiționate ........ 123
1.12. Inegalități trigonometrice ........ 126
1.13. Rezolvări la problemele propuse ........ 128

**Capitolul 2. Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații trigonometrice** ........ 153
2.1. Ecuații trigonometrice ........ 153
2.2. Inecuații trigonometrice ........ 174
2.3. Sisteme de ecuații trigonometrice ........ 184

**Capitolul 3. Numere complexe** ........ 197
3.1.A. Forma algebrică a unui număr complex ........ 197
3.1.B. Forma trigonometrică a unui număr complex ........ 197
3.2. Operaţii cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică ........ 198
3.3. Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie ........ 198
3.4. Indicaţii – soluţii ........ 208

**Capitolul 4. Probleme date la concursurile de admitere în învăţământul superior şi concursurile şcolare** ........ 212
4.1. Enunţuri ........ 212
4.2. Indicaţii – soluţii ........ 221

**Capitolul 5. Teste de verificare** ........ 234
5.1. Elemente de trigonometrie ........ 234
5.2. Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii trigonometrice ........ 243
5.3. Numere complexe ........ 244
5.4. Indicaţii – soluţii ........ 247

**Capitolul 6. Aplicaţii ale trigonometriei** ........ 255
6.1. Rezultate remarcabile ........ 255
6.2. Probleme rezolvate ........ 257
6.3. Probleme propuse ........ 259
6.4. Indicaţii – soluţii ........ 272

III. ANALIZĂ MATEMATICĂ ........ 290

**Capitolul 1. Probleme de analiză matematică cu conţinut trigonometric** ........ 290
Şiruri de numere reale ........ 290
Limite de funcţii. Funcţii continue ........ 291
Funcţii derivabile ........ 294
Integrala nedefinită ........ 298
Integrala definită ........ 300
Indicaţii şi răspunsuri ........ 304
Şiruri de numere reale ........ 304
Limite de funcţii. Funcţii continue ........ 306
Funcţii derivabile ........ 311
Integrala nedefinită ........ 330
Integrala definită ........ 336

**Capitolul 2. Probleme pregătitoare pentru examenul de bacalaureat** ........ 342
Indicaţii şi răspunsuri ........ 350

# I. GEOMETRIE

## CAPITOLUL 1

# ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL

## 1.1. REZULTATE REMARCABILE

$\mathscr{V}$ – mulţimea vectorilor (liberi) din plan.

Fiecare vector nenul $\vec{v} \in \mathscr{V}$ este caracterizat prin:
– direcţie
– sens
– lungime – notaţie $|\vec{v}| \in (0, +\infty)$.

$\vec{0}$ – vectorul nul; $-\vec{v}$ – opusul lui $\vec{v}$.

**Adunarea vectorilor – proprietăţi**

1. $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3, \forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathscr{V}$
2. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1, \forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathscr{V}$
3. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}, \forall\ \vec{v} \in \mathscr{V}$ (fig. 1 a).

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$$

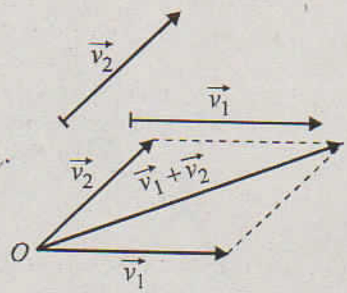


**Fig. 1 a**

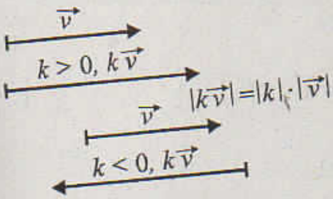


**Fig. 1 b**

**Înmulţirea unui vector cu un număr real (scalar) – proprietăţi**

1. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}, \forall\ \vec{v} \in \mathscr{V}$
2. $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2, \forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathscr{V}, \forall\ \alpha\ \mathbb{R}$
3. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\ \vec{v} + \beta\ \vec{v}, \forall\ \vec{v} \in \mathscr{V}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
4. $\alpha(\beta\ \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}, \forall\ \vec{v} \in \mathscr{V}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (fig. 1 b).

**Produsul scalar**

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{cases} |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos\alpha, & \text{dacă } \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ şi } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \\ 0 & \text{, dacă } \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ sau } \vec{v}_2 = \vec{0} \end{cases}$$

În cazul (i) avem $k = \frac{2}{3}$ şi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB})$.

În cazul (ii) avem $k_1 = -\frac{2}{7}$ şi $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{5}(7\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB})$.

În cazul (iii) avem $k_2 = -\frac{9}{4}$ şi $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{5}(9\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA})$ (fig. 4).

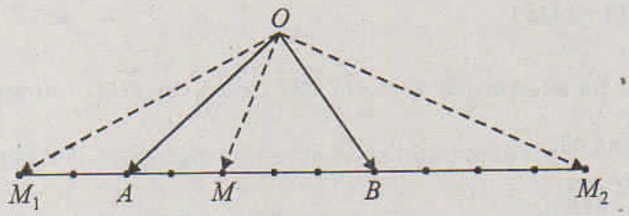


**Fig. 4**

**2.** Într-un triunghi $ABC$ se cunosc $AB = 3a$, $AC = 6a$ şi m$(\hat{A}) = 120°$. Pe latura $[BC]$ se iau punctele $D, E, F, G$ astfel încât $BD = DE = EF = FG = GC$. Să se calculeze lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG}$.

*Rezolvare*

Calculăm mai întâi $BC$ aplicând teorema cosinusului în triunghiul $ABC$ (fig. 5).

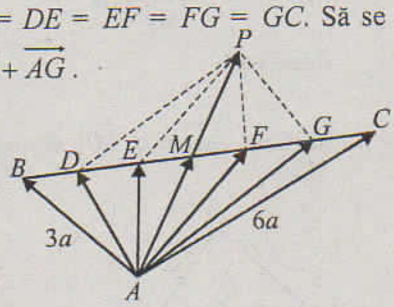


**Fig. 5**

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\, AB \cdot AC \cdot \cos 120°$,

$BC^2 = 9a^2 + 36a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 6a \left(-\frac{1}{2}\right) = 63a^2.$

Rezultă $BC = 3\sqrt{7}a$. Calculăm lungimea medianei $[AM]$.

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 2AM^2 = 9a^2 + 36a^2 - \frac{63}{2}a^2.$

$4AM^2 = 27a^2 \Rightarrow AM = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$. Avem $BD = DE = EF = FG = GC$.

Observăm că $MD = MG$ şi $ME = MF$.

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AM} \text{ şi } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AM}$$

$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AM}$.

Deducem $|\vec{v}| = 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a = 6a\sqrt{3}$.

**3.** Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Punctele $E$ şi $F$ sunt mijloacele laturilor $[AD]$ şi $[BC]$, iar punctele $M$ şi $N$ sunt mijloacele diagonalelor $[BD]$ şi $[AC]$.

Să se demonstreze că au loc următoarele egalităţi vectoriale:

i) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$;

ii) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$.

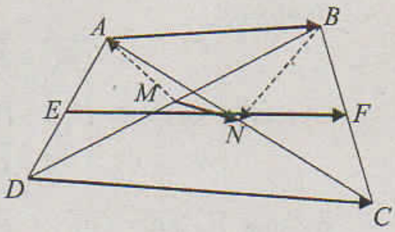


**Fig. 6**

*Rezolvare*

i) În patrulaterele $EABF$ şi $EDCF$ (fig. 6) au loc egalităţile vectoriale $\begin{cases} \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \end{cases}$ pe care le adunăm.

Întrucât $\begin{cases} \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC} = \vec{0} \end{cases}$, rezultă $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

ii) Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ şi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.

Rezultă $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$.

Observăm că $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$. Din prima egalitate deducem $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$, prin urmare

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}).$$

**4.** Se cunosc $|\vec{u}| = u \neq 0$, $|\vec{v}| = v \neq 0$ şi $\vec{u} \cdot \vec{v} = k$. Să se calculeze $|a\vec{u} + b\vec{v}|$, $a$ şi $b$ fiind numere reale date.

*Aplicaţie:* $u = 3$, $v = 5$, $a = 5$, $b = 8$, $k = 20$.

*Rezolvare*

Notăm $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ şi avem $|\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) = a^2|\vec{u}|^2 + b^2|\vec{v}|^2 + 2ab\,\vec{u} \cdot \vec{v} = a^2u^2 + b^2v^2 + 2abk$. Aşadar $|\vec{w}| = \sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + 2abk}$.

În cazul particular menţionat în enunţ rezultă

$$|\vec{w}| = \sqrt{25 \cdot 9 + 64 \cdot 25 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 20} = 5\sqrt{137}.$$

**5.** Fiind date în plan punctele $P, A, B, C$ să se arate că are loc egalitatea:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \qquad (*)$$

Folosind acest rezultat să se stabilească concurenţa înălţimilor într-un triunghi.

*Rezolvare*

Observăm că avem $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\\ \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\end{cases}$.

Rezultă $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})+\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})+\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})=0$.

Dacă punctul $P$ este intersecția înălțimilor din $B$ și $C$ în triunghiul $ABC$, avem $PB\perp CA$, $PC\perp AB$, prin urmare au loc egalitățile $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ și $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Ținem seama de aceste rezultate în egalitatea (*) și deducem că $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, așadar $PA\perp BC$.

Am stabilit în acest mod că înălțimile triunghiului sunt concurente în punctul $P$ (ortocentrul triunghiului).

**6.** i) Se dau vectorii $\vec{v}_1=3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}_2=-2\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}+11\vec{j}$. Știind că $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ și $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, să se determine numerele reale $\alpha$ și $\beta$ astfel încât $\vec{v}=\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2$.

ii) Să se determine $\lambda\in\mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ și $\vec{u}=3\lambda\vec{i}+2(1-\lambda)\vec{j}$ sunt ortogonali.

*Rezolvare*

i) $\alpha(3\vec{i}+\vec{j})+\beta(-2\vec{i}+4\vec{j})=5\vec{i}+11\vec{j}\Leftrightarrow(3\alpha-2\beta)\vec{i}+(\alpha+4\beta)\vec{j}=$ $=5\vec{i}+11\vec{j}$.

Din exprimarea unică a unui vector $\vec{v}$ cu ajutorul vectorilor bazei $(\vec{i},\vec{j})$, rezultă sistemul de ecuații $\begin{cases}3\alpha-2\beta=5\\ \alpha+4\beta=11\end{cases}$ care admite soluția $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\end{cases}$.

ii) $\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{i}+5\vec{j}$. Condiția de ortogonalitate este $\vec{u}\cdot(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=0$. Rezultă ecuația $3\lambda\cdot1+2(1-\lambda)5=0$, care admite soluția $\lambda=\frac{10}{7}$.

**7.** În raport cu reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(0,-1)$, $C(5,0)$, $D(2,4)$.

i) Să se precizeze coordonatele vectorilor $\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{BD}$.

ii) Să se calculeze $\cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}})$.

iii) Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

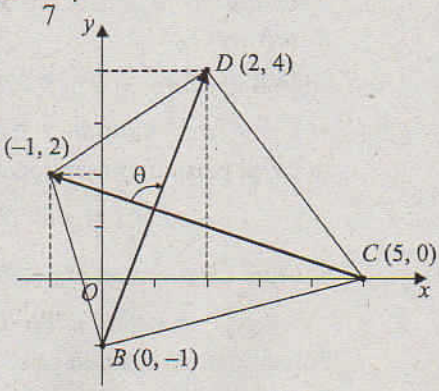


**Fig. 7**

*Rezolvare*

i) $\overrightarrow{CA} = (-1-5)\vec{i} + (2-0)\vec{j} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$ (fig. 7),

$\overrightarrow{BD} = (2-0)\vec{i} + (4+1)\vec{j} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.

ii) $CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$,

$BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-6)\cdot 2 + 2\cdot 5 = -2$. Fie $\theta = m(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}})$,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}}{CA\cdot BD} = \frac{-2}{2\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}} = -\frac{1}{\sqrt{290}}.$$

iii) $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{17}{\sqrt{290}}$; $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AC\cdot BD\cdot\sin\theta = 17$.

## 1.3. PROBLEME PROPUSE

**1.** Fiind dat triunghiul $ABC$ să se arate că există un punct $O$ astfel încât pentru orice punct $M$ din plan să aibă loc egalitatea $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\cdot\overrightarrow{MC}$.

**2.** Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater sunt vârfurile unui paralelogram.

**3.** Se consideră punctele $A$, $B$ și $C$ necoliniare, punctele $D$ și $E$ astfel încât $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$, iar $\{O\} = BD \cap CE$.

a) Să se exprime vectorii $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CE}$ și $\overrightarrow{AO}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

b) Să se arate că $[AO]$ este mediană în triunghiul $ABC$.

**4.** Se consideră un patrulater convex $ABCD$ și se notează cu $M$, $N$, $P$, $Q$ centrele de greutate ale triunghiurilor $BCD$, $ACD$, $ABD$, $ABC$. Să se arate că patrulaterele $ABCD$ și $MNPQ$ sunt asemenea.

**5.** În trapezul $ABCD$ lungimea bazei $[AB]$ este de $k$ ori mai mare decât lungimea bazei $[CD]$, $k \in \mathbb{R}_+^*$, $M$ fiind un punct oarecare în planul trapezului. Să se exprime vectorul $\overrightarrow{AB}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{MC}$.

**6.** Punctele $M_1$ și $M_2$ determină pe segmentul $[AB]$ trei segmente congruente. $O$ fiind un punct oarecare din plan să se exprime vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.

**7.** Latura $[BC]$ a triunghiului $ABC$ este împărțită de punctele $B_1$, $B_2$, $B_3$ și $B_4$, în cinci segmente congruente. Se notează $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ și $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

a) Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AB_2}$, $\overrightarrow{AB_3}$ și $\overrightarrow{AB_4}$ în funcție de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{c}$.

b) Dacă $m(\widehat{ABC}) = 90°$, $|\vec{a}| = 24$, $|\vec{c}| = 5$ și $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2} + \overrightarrow{AB_3} + \overrightarrow{AB_4} + \overrightarrow{AC}$ să se calculeze $|\vec{v}|$.

**8.** Pe dreptele $AB$, $BC$ şi $CA$ se iau respectiv punctele $A_1$, $B_1$şi $C_1$ astfel încât $\overrightarrow{AA_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{CA}$ unde $\lambda > 0$. Să se arate că triunghiurile $ABC$ şi $A_1B_1C_1$au acelaşi centru de greutate.

**9.** Fie $ABCDEF$ un hexagon, $M$, $N$ şi $P$ respectiv mijloacele laturilor $[AB]$, $[CD]$ şi $[EF]$, iar $Q$, $R$ şi $S$ respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[DE]$ şi $[FA]$. Să se demonstreze că triunghiurile $MNP$ şi $QRS$ au acelaşi centru de greutate.

**10.** Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Să se arate că dreapta determinată de centrele de greutate ale triunghiurilor $BCD$ şi $ACD$ este paralelă cu $AB$.

**11.** Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $M$ un punct oarecare. Să se arate că simetricele lui $M$ în raport cu mijloacele laturilor patrulaterului sunt vârfurile unui paralelogram.

**12.** Să se determine natura triunghiului $ABC$ dacă $a \cdot \overrightarrow{GA} + b \cdot \overrightarrow{GB} + c \cdot \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, unde $G$ este centrul de greutate al triunghiului şi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

**13.** Fie $A$ şi $B$ două puncte distincte. Să se arate că:

a) dacă un punct $C$ este pe dreapta $AB$, atunci pentru orice punct $M$ din plan există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = t \cdot \overrightarrow{MA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{MB}$;

b) dacă pentru două puncte distincte $C$ şi $M$ există $t \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{MC} = t \cdot \overrightarrow{MA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{MB}$, atunci punctul $C$ este pe dreapta $AB$.

**14.** În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu $O$ punctul de intersecţie al diagonalelor şi $\lambda = \frac{OC}{OA}$, $\mu = \frac{OD}{OB}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{DA}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

**15.** Fie $ABCD$ un patrulater şi punctele $M$, $N$ situate respectiv pe segmentele $[BC]$ şi $[AD]$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD}$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[MN]$ şi $[CD]$ sunt coliniare.

**16.** Dintr-un punct $E$ al laturii $[AB]$ al patrulaterului convex $ABCD$ se duc paralele $EF$ şi $EG$ respectiv la $AC$ şi $AD$, $F \in BC$, $G \in BD$. Să se arate că $FG \parallel CD$.

**17.** Fie $A$, $B$, $C$ trei puncte necoliniare. Să se arate că pentru orice punct $M$ situat în interiorul triunghiului $ABC$ există numerele reale pozitive $x$, $y$, $z$ care verifică relaţia $x + y + z = 1$ astfel încât pentru orice punct $O$, are loc $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$.

**18.** În paralelogramul $ABCD$ fie $E$ mijlocul laturii $[AB]$ şi $\{F\} = AC \cap DE$. Să se arate că $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$.

**19.** În paralelogramul $ABCD$ fie $E$ un punct pe latura $[AB]$ astfel încât $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $0 < k < 1$ şi $\{F\} = AC \cap DE$. Să se exprime $\overrightarrow{AF}$ cu ajutorul lui $\overrightarrow{AC}$.