

PETRE NĂCHILĂ

GEOMETRIE
PENTRU TOȚI
CLASELE a IX-a – a X-a

Editura NOMINA

Capitolul 1

VECTORI ÎN PLAN

1.1. Segmente orientate. Relația de echipolență. Vectori

În știință și tehnică se lucrează cu mărimi de natură diferită. Unele mărimi sunt bine determinate doar de un număr care reprezintă măsura lor. Aceste mărimi se numesc mărimi scalare (sau scalari). Alte mărimi se numesc mărimi vectoriale. Exemple de mărimi scalare: lungimea, masa, volumul, lucrul mecanic, temperatura, rezistența unui conductor. Exemple de mărimi vectoriale: forța, viteza, accelerația, momentul unei forțe. O pereche ordonată (A, B) de puncte din plan se numește *segment orientat* (bipunct) și notează cu \overline{AB} . Punctul A este originea, iar punctul B este extremitatea segmentului orientat. Segmentul orientat \overline{AA} este segmentul nul. Dreapta AB reprezintă suportul (direcția) segmentului orientat. Modulul segmentului orientat \overline{AB} este lungimea segmentului $[AB]$ (notată cu AB). Dacă $A \neq B$, segmentele orientate \overline{AB} și \overline{BA} se numesc *opuse*. Două segmente orientate \overline{AB} și \overline{CD} au aceeași direcție dacă $AB \parallel CD$ sau dreptele AB și CD coincid. Două segmente orientate \overline{AB} și \overline{CD} cu aceeași direcție au același sens dacă:

- a) în cazul $AB \neq CD$, punctele B și D sunt de aceeași parte a dreptei (figura 1);
- b) în cazul în care dreptele AB și CD coincid avem una din pozițiile a), b), c), d) din figura 2.

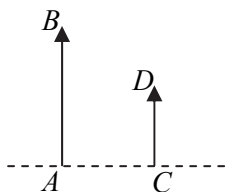


Fig. 1

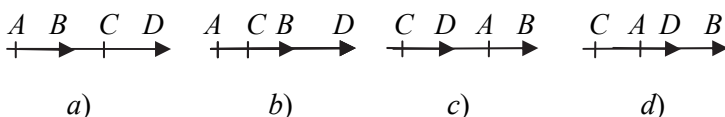


Fig. 2

Segmentul orientat \overline{AA} are sensul și direcția nedeterminate.

DEFINIȚIE. Două segmente orientate \overline{AB} și \overline{CD} se numesc *echipolente* (notăm $\overline{AB} \sim \overline{CD}$) dacă au același modul, aceeași direcție și același sens.

PROPOZIȚIA 1. Relația de echipolență „ \sim ” definită pe mulțimea segmentelor orientate este relație de echivalență, adică are proprietățile de:

- reflexivitate: $\overline{AB} \sim \overline{AB}$;
- simetrie: $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \sim \overline{AB}$;
- tranzitivitate: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$; $\overline{CD} \sim \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{EF}$.

1.2. Adunarea și scăderea vectorilor

DEFINIȚIE. Suma $\vec{u} + \vec{v}$ a doi vectori \vec{u} și \vec{v} se obține astfel:

Se consideră punctele O, A, B astfel încât $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$.

Se construiește paralelogramul $OACB$.

Atunci $\vec{u} + \vec{v} = \vec{OC}$ (Fig. 4).

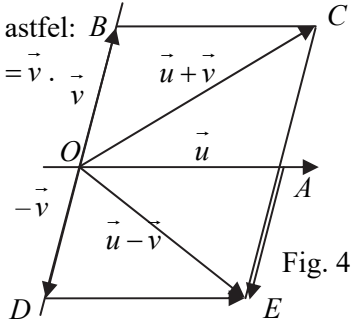


Fig. 4

OBSERVAȚII:

1. $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$ (formula lui Chasles) – Fig. 5

2. Dacă $B = A$ avem $\vec{AM} + \vec{MA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

TEOREMĂ. Adunarea vectorilor are proprietățile următoare:

a) *asociativitate*: pentru orice vectori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ avem:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w});$$

b) *comutativitate*: pentru orice $\vec{u}, \vec{v} \in V$ avem $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

c) *vectorul nul* este element neutru: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, $\forall \vec{u} \in V$;

d) pentru orice vector $\vec{u} \in V$ există vectorul opus $(-\vec{u})$:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$$

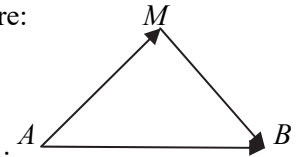


Fig. 5

DEFINIȚIE. Diferența vectorilor \vec{u} și \vec{v} este vectorul $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

OBSERVAȚIE. Din figura 4 avem $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{OA} + \vec{OD} = \vec{OE} = \vec{BA}$.

Probleme rezolvate

1. Demonstrați că patrulaterul convex $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă pentru orice punct $M \in (AC)$ avem $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$.

Soluție. Vom nota $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$ (semnificația notării va fi dată în paragraful 1.3). Fie $\triangle ABC$ și $M \in (BC)$. Demonstrăm că, dacă M este mijlocul lui (BC) , avem $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$ (figura 6).

Într-adevăr, avem $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$, unde $ABDC$ este paralelogram. Cum M este mijlocul lui (BC) , M este mijlocul lui (AD) și deci $\vec{AD} = \vec{AM} + \vec{MD} = \vec{AM} + \vec{AM} = 2\vec{AM}$. Reciproc, dacă $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$, atunci M este mijlocul lui BC . Avem

$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} \Leftrightarrow (\vec{AB} + \vec{MA}) + (\vec{AC} + \vec{MA}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow M \text{ este mijlocul lui } (BC).$$

Fie acum M un punct oarecare în planul paralelogramului $ABCD$ de centru O . Din triunghiurile MAC și MBD cu mediana \vec{MO} avem $\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MO}$, $\vec{MB} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$ și

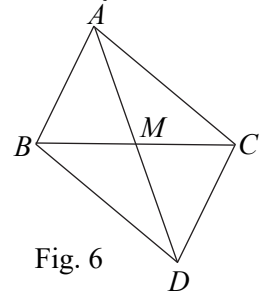


Fig. 6

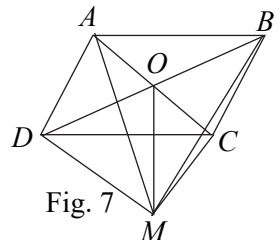


Fig. 7

28. Dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului convex $ABCD$ se intersectează în punctul E . Demonstrați că, pentru orice punct $O \in (ABC)$, avem:

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 4 \cdot \overline{OE}.$$

29. Fie pentagonul convex $ABCDE$ și M, N, P, Q mijloacele laturilor $(AB), (BC), (CD), (DE)$. Fie F și G mijloacele segmentelor (MP) și (NQ) . Demonstrați că $FG \parallel AE$.

30. Fie punctul $O \in (ABC)$. Demonstrați că A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât $a + b + c = 0$ și $a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC} = \vec{0}$.

1.4. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari

TEOREMĂ (descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari)

Fie în același plan vectorii nenuli și necoliniari \vec{a} și \vec{b} și vectorul \vec{v} . Atunci există și sunt unice x și y numere reale astfel încât $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$. (Fig. 11 și 12)

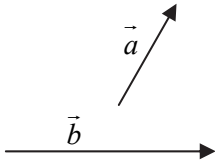


Fig. 11

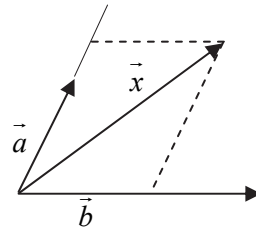
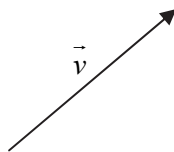


Fig. 12

Perechea (\vec{a}, \vec{b}) se numește bază în V , iar formula $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ se numește *descompunerea* lui \vec{v} în raport cu baza (\vec{a}, \vec{b}) . Numerele x, y reprezintă coordonatele lui \vec{v} pentru baza (\vec{a}, \vec{b}) .

DEFINIȚIE. Se numește *versor* sau *vector unitate* al unui vector nenul \vec{v} un vector \vec{u} care are aceeași direcție și același sens cu \vec{v} și modulul (norma) 1.

$$\text{Avem } \vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}.$$

Dacă d este o direcție în plan, un vector \vec{u} care are direcția lui d și modulul 1 se numește *versor* sau *vector unitate al direcției d*.

OBSERVAȚIE. Descompunerea unui vector după mai mult de două direcții (vectori) din același plan este nedeterminată.

Observație: Dacă în formulele (4) luăm $a = b \neq 0$, obținem formulele pentru coordonatele mijlocului unui segment.

e) Fie G' baricentrul sistemului de puncte $(A, \alpha a)$, $(B, \alpha b)$. Atunci avem:

$$\overline{AG'} = \frac{\alpha b}{\alpha a + \alpha b} \overline{AB} = \frac{b}{a+b} \overline{AB} = \overline{AG} \text{ și deci } G = G'.$$

TEOREMA 5. Fie sistemul de puncte ponderate (A_i, a_i) , $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, astfel încât $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$. Notăm $a = \sum_{i=1}^n a_i$. Atunci există și este unic un punct G astfel încât $\sum_{i=1}^n a_i \overline{GA_i} = 0$. (5)

$$\text{Dacă } M \text{ este un punct oarecare în spațiu avem } \sum_{i=1}^n a_i \overline{MA_i} = a \overline{MG}. \quad (6)$$

Demonstrație: Fie funcția $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $f(\overline{M}) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{MA_i}$. Considerăm un punct O fixat în spațiul \mathcal{S} . Atunci $f(\overline{M}) = \sum_{i=1}^n a_i (\overline{OA_i} - \overline{OM}) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{OA_i} - \sum_{i=1}^n a_i \overline{OM} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{OA_i} - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \overline{OM}$ sau $f(\overline{M}) = f(O) - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \overline{OM}$.

Deoarece A_i și m_i sunt date, iar punctul O este fixat, condiția ca să existe un punct G pentru care $f(G) = 0$ devenind $\overline{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \overline{OA_i}}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \overline{OA_i}}{a}$ (7) ne arată că punctul G

este determinat (există).

Demonstrăm unicitatea lui G . Din relația (7) rezultă că $f(O) = a \cdot \overline{OG}$ și deci $f(M) = a \overline{OG} - a \overline{OM} = a \overline{MG}$.

DEFINIȚIA 3. Punctul G din teorema 5 (care există și este unic) se numește *baricentrul sistemului de puncte ponderate* (A_i, a_i) , $i = \overline{1, n}$.

Observație: Dacă $a = \sum_{i=1}^n a_i = 0$, atunci G nu există sau nu este unic.

TEOREMA 6. Pentru orice sistem de puncte ponderate (A_i, a_i) , $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, baricentrul G are proprietatea:

a) G este și baricentrul sistemului de puncte ponderate $(A_i, \alpha a_i)$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}^*$;

b) dacă avem $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$, într-un sistem de coordonate $Oxyz$, atunci baricentrul G are coordonatele: $x_G = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $y_G = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i y_i$, $z_G = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i z_i$. (8)

CUPRINS

Capitolul 1. VECTORI ÎN PLAN	3
1.1. Segmente orientate. Relația de echipolență. Vectori	3
1.2. Adunarea și scăderea vectorilor	7
1.3. Înmulțirea vectorilor cu scalari. Coliniaritate	11
1.4. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari	15
1.5. Coliniaritate. Reper al unei drepte	19
1.6. Probleme pentru concursurile școlare.....	21
1.7. Teste de evaluare	26
Capitolul 2. COLINIARITATE, CONCURENȚĂ, PARALELISM	27
2.1. Reper cartezian. Coordonatele carteziene. Distanța dintre două puncte.....	27
2.2. Vectorul de poziție al unui punct. Teorema lui Thales.....	30
2.3. Vectorul de poziție al centrului de greutate.....	34
2.4. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi	38
2.5. Relația lui Sylvester. Concurența înălțimilor unui triunghi. Cercul lui Euler ...	42
2.6. Teorema lui Menelaus. Probleme de coliniaritate. Teorema lui Ceva. Probleme de concurență.....	46
2.7. Teoreme clasice de geometrie	51
2.8. Probleme pentru concursurile școlare.....	54
2.9. Teste de evaluare	59
Capitolul 3. ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ	60
3.1. Coordonatele carteziene. Relația lui Stewart. Teorema medianei	60
3.2. Coordonatele unui vector în plan.....	64
3.3. Ecuații ale unei drepte în plan	67
3.4. Drepte paralele. Drepte perpendiculare	73
3.5. Calcul de distanțe și arii.....	77
3.6. Probleme de locuri geometrice	81
3.7. Produsul scalar a doi vectori.....	87
3.8. Probleme pentru concursurile școlare.....	95
3.9. Teste de evaluare	97
Capitolul 4. TRANSFORMĂRI GEOMETRICE	98
4.1. Transformări punctuale. Izometrii	98
4.2. Translația	101
4.3. Omotetia	106
Capitolul 5. BARICENTRE	116
Capitolul 6. PROBLEME PENTRU CONCURSURI (transformări geometrice, baricentre).....	126
SOLUȚII	134