PETRE NĂCHILĂ

GEOMETRIE
PENTRU TOŢI

CLASELE a IX-a – a X-a

Editura NOMINA

Capitolul 1
VECTORI ÎN PLAN

1.1. Segmente orientate. Relaţia de echipolenţă. Vectori

În ştiinţă şi tehnică se lucrează cu mărimi de natură diferită. Unele mărimi sunt bine determinate doar de un număr care reprezintă măsura lor. Aceste mărimi se numesc mărimi scalare (sau scalari). Alte mărimi se numesc mărimi vectoriale. Exemple de mărimi scalare: lungimea, masa, volumul, lucrul mecanic, temperatura, rezistenţa unui conductor. Exemple de mărimi vectoriale: forţa, viteza, acceleraţia, momentul unei forţe. O pereche ordonată (A, B) de puncte din plan se numeşte *segment orientat* (bipunct) şi notează cu $\overline{AB}$. Punctul A este originea, iar punctul B este extremitatea segmentului orientat. Segmentul orientat $\overline{AA}$ este segmentul nul. Dreapta AB reprezintă suportul (direcţia) segmentului orientat. Modulul segmentului orientat $\overline{AB}$ este lungimea segmentului $[AB]$ (notată cu AB). Dacă $A \neq B$, segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$ se numesc *opuse*. Două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au aceeaşi direcţie dacă $AB \parallel CD$ sau dreptele AB şi CD coincid. Două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ cu aceeaşi direcţie au acelaşi sens dacă:

a) în cazul $AB \neq CD$, punctele B şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei (figura 1);

b) în cazul în care dreptele AB şi CD coincid avem una din poziţiile a), b), c), d) din figura 2.

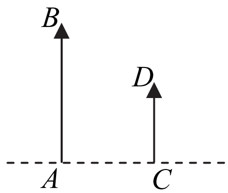

Fig. 1

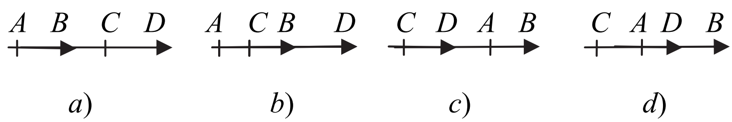

Fig. 2

Segmentul orientat $\overline{AA}$ are sensul şi direcţia nedeterminate.

DEFINIŢIE. Două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ se numesc *echipolente* (notăm $\overline{AB} \sim \overline{CD}$) dacă au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

PROPOZIŢIA 1. Relaţia de echipolenţă „~" definită pe mulţimea segmentelor orientate *este relaţie de echivalenţă*, adică are proprietăţile de:

– reflexivitate: $\overline{AB} \sim \overline{AB}$;

– simetrie: $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \sim \overline{AB}$;

– tranzitivitate: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$; $\overline{CD} \sim \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{EF}$.

1.2. Adunarea şi scăderea vectorilor

DEFINIŢIE. Suma $\vec{u}+\vec{v}$ a doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ se obţine astfel: Se consideră punctele O, A, B astfel încât $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. Se construieşte paralelogramul $OACB$. Atunci $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OC}$ (Fig. 4).

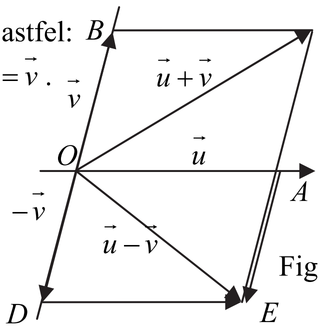

Fig. 4

OBSERVAŢII:

1. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ (formula lui Chasles) – Fig. 5

2. Dacă $B=A$ avem $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

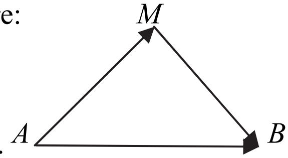

Fig. 5

TEOREMĂ. Adunarea vectorilor are proprietăţile următoare:

a) *asociativitate*: pentru orice vectori $\vec{u},\ \vec{v},\vec{w}\in V$ avem: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;

b) *comutativitate*: pentru orice $\vec{u},\ \vec{v}\in V$ avem $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

c) *vectorul nul* este element neutru: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u},\ \forall\vec{u}\in V$;

d) pentru orice vector $\vec{u}\in V$ există vectorul opus $\left(-\vec{u}\right)$: $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\left(-\vec{u}\right)+\vec{u}=\vec{0}$.

DEFINIŢIE. Diferenţa vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este vectorul $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$.

OBSERVAŢIE. Din figura 4 avem $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BA}$.

Probleme rezolvate

1. Demonstraţi că patrulaterul convex $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă pentru orice punct $M\in(ABC)$ avem $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Soluţie. Vom nota $\vec{u}+\vec{u}=2\vec{u}$ (semnificaţia notării va fi dată în paragraful 1.3). Fie ΔABC şi $M\in(BC)$. Demonstrăm că, dacă M este mijlocul lui (BC), avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ (figura 6). Într-adevăr, avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, unde $ABDC$ este paralelogram. Cum M este mijlocul lui (BC), M este mijlocul lui (AD) şi deci $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AM}$. Reciproc, dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, atunci M este mijlocul lui $\overline{BC}$. Avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ este mijlocul lui (BC).

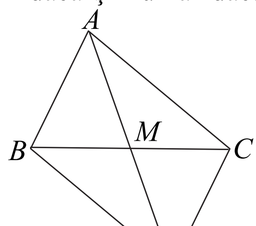

Fig. 6

Fie acum M un punct oarecare în planul paralelogramului $ABCD$ de centru O. Din triunghiurile MAC şi MBD cu mediana $\overrightarrow{MO}$ avem $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO},\ \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$ şi

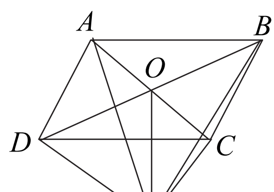

Fig. 7

28. Dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului convex *ABCD* se intersectează în punctul *E*. Demonstraţi că, pentru orice punct $O \in (ABC)$, avem:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4 \cdot \overrightarrow{OE}\ .$$

29. Fie pentagonul convex *ABCDE* şi *M*, *N*, *P*, *Q* mjloacele laturilor (*AB*), (*BC*), (*CD*), (*DE*). Fie *F* şi *G* mjloacele segmentelor (*MP*) şi (*NQ*). Demonstraţi că $FG \parallel AE$.

30. Fie punctul $O \in (ABC)$. Demonstraţi că *A*, *B*, *C* sunt coliniare dacă şi numai dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât $a + b + c = 0$ şi $a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

1.4. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari

TEOREMĂ (descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari)

Fie în acelaşi plan vectorii nenuli şi necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi vectorul $\vec{v}$. Atunci există şi sunt unice *x* şi *y* numere reale astfel încât $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$. (Fig. 11 şi 12)

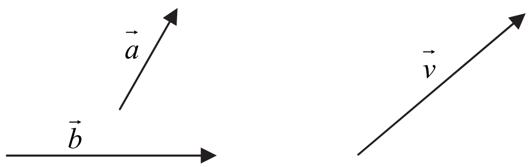

Fig. 11

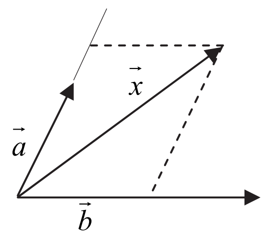

Fig. 12

Perechea $(\vec{a}, \vec{b})$ se numeşte bază în *V*, iar formula $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ se numeşte *descompunerea* lui $\vec{v}$ în raport cu baza $(\vec{a}, \vec{b})$. Numerele *x*, *y* reprezintă coordonatele lui $\vec{v}$ pentru baza $(\vec{a}, \vec{b})$.

DEFINIŢIE. Se numeşte *versor* sau *vector unitate* al unui vector nenul $\vec{v}$ un vector $\vec{u}$ care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\vec{v}$ şi modulul (norma) 1.

Avem $\vec{u} = \dfrac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$.

Dacă *d* este o direcţie în plan, un vector $\vec{u}$ care are direcţia lui *d* şi modulul 1 se numeşte *versor* sau *vector unitate al direcţiei d*.

OBSERVAŢIE. Descompunerea unui vector după mai mult de două direcţii (vectori) din acelaşi plan este nedeterminată.

Observaţie: Dacă în formulele (4) luăm $a = b \neq 0$, obţinem formulele pentru coordonatele mijlocului unui segment.

e) Fie G' baricentrul sistemului de puncte $(A, \alpha a)$, $(B, \alpha b)$. Atunci avem:

$\overrightarrow{AG'} = \dfrac{\alpha b}{\alpha a + \alpha b}\overrightarrow{AB} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$ şi deci $G = G'$.

TEOREMA 5. Fie sistemul de puncte ponderate (A_i, a_i), $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. Notăm $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Atunci există şi este unic un punct G astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{GA_i} = 0$. (5)

Dacă M este un punct oarecare în spaţiu avem $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i} = a\overrightarrow{MG}$. (6)

Demonstraţie: Fie funcţia $f : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, $f(\overrightarrow{M}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i}$. Considerăm un punct O fixat în spaţiul $\mathscr{S}$. Atunci $f(\overrightarrow{M}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{OA_i} - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{OM} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{OA_i} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\overrightarrow{OM}$ sau $f(\overrightarrow{M}) = f(O) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\overrightarrow{OM}$.

Deoarece A_i şi m_i sunt date, iar punctul O este fixat, condiţia ca să existe un punct G pentru care $f(G) = 0$ devenind $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{OA_i}}{a}$ (7) ne arată că punctul G este determinat (există).

Demonstrăm unicitatea lui G. Din relaţia (7) rezultă că $f(O) = a \cdot \overrightarrow{OG}$ şi deci $f(M) = a\overrightarrow{OG} - a\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{MG}$.

DEFINIŢIA 3. Punctul G din teorema 5 (care există şi este unic) se numeşte *baricentrul sistemului de puncte ponderate* (A_i, a_i), $i = \overline{1,n}$.

Observaţie: Dacă $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$, atunci G nu există sau nu este unic.

TEOREMA 6. Pentru orice sistem de puncte ponderate (A_i, a_i), $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, baricentrul G are proprietatea:

a) G este şi baricentrul sistemului de puncte ponderate $(A_i, \alpha a_i)$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$;

b) dacă avem $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,n}$, într-un sistem de coordonate $Oxyz$, atunci baricentrul G are coordonatele: $x_G = \dfrac{1}{a}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, $y_G = \dfrac{1}{a}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i$, $z_G = \dfrac{1}{a}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_i$. (8)

CUPRINS