

PETRE NĂCHILĂ

CĂTĂLIN EUGEN NĂCHILĂ

TRIGONOMETRIE

PENTRU TOȚI

CLASELE a IX-a – a X-a

Editura NOMINA

Capitolul 1

UNGHIURI ȘI ARCE

1.1. Măsurarea unghiurilor și arcelor. Cercul trigonometric

Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și un punct fix A pe cerc. Pornind din punctul A , se împarte cercul în 360 părți egale. Fiecare sector de cerc determinat de două puncte consecutive ale acestei diviziuni formează un unghi la centru de 1° (un grad sexagesimal), care este și măsura arcului delimitat de cele două puncte. Semicercul are deci 180° , iar cercul are 360° . Dacă se împarte cercul în 400 de părți egale vom avea gradele centesimale. Submultiplii:

$$1^\circ = 60 \text{ min} = 60';$$

$$1^{\text{min}} = 1' = 60 \text{ s} (60'').$$

$$1^\circ = 100^c \text{ (100 minute centesimale);}$$

$$1^c = 100^{cc} \text{ (secunde centesimale)}$$

Se numește radian (notat *rad*), măsura unghiului la centru care corespunde unui arc de lungime R (în cercul de rază R). Lungimea cercului este $2\pi R$.

Relația prin care se trece de la o măsură la alta este:

$$\frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha^g}{200^g} = \frac{a}{\pi}.$$

$$\text{Avem } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 14';$$

$$1^g = \frac{\pi}{180} \text{ rad}; \pi(\text{rad}) = 180^\circ = 200^g.$$

Este util de reținut următoarele corespondențe:

măsura în grade	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
măsura în radiani	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

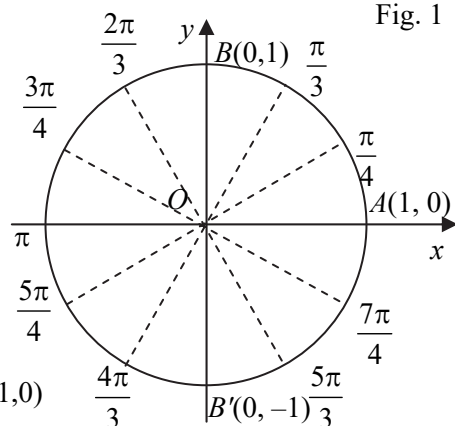
Considerăm cercul de centru O (originea sistemului axelor de coordonate) și rază 1.

Cercul poate fi parcurs de la $A(1, 0)$ spre $B(0, 1)$ (sens pozitiv – trigonometric) (fig. 1) sau de la A spre $B'(0, -1)$ (sens negativ).

Cercul definit mai sus se numește *cerc trigonometric*.

Teoremă. Pentru orice număr real t , există $k \in \mathbb{Z}$ și $\alpha \in [0, 2\pi]$, astfel încât $t = 2k\pi + \alpha$

$$\text{(se ia } k = \left[\frac{t}{2\pi} \right], \alpha = \left\{ \frac{t}{2\pi} \right\} \cdot 2\pi.$$



PROBLEME REZOLVATE

1. Demonstrați că în orice triunghi ABC dreptunghic în A avem:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{2(b^3 + c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

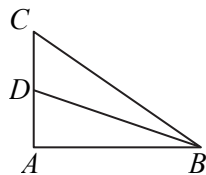


Fig. 2

Soluție. Fie $[AD]$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ (figura 2). Din teorema bisectoarei avem: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ și atunci $\frac{AD}{AD+DC} =$

$$= \frac{AB}{AB+BC}, \text{ de unde } AD = \frac{bc}{a+c}. \text{ Rezultă că } \sin \frac{B}{2} = \frac{AD}{BD} =$$

$$= \frac{AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{AD}{\sqrt{c^2 + \frac{b^2 c^2}{(a+c)^2}}} = \frac{b}{\sqrt{(a+c)^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{2a^2 + 2ac}} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}} = \sqrt{\frac{1-\frac{c}{a}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}. \text{ Analog se arată că } \sqrt{\frac{1+\cos B}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+c}{2a}} = \frac{AB}{AD} = \cos \frac{B}{2}. \text{ Rezultă că } \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}, \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \text{ și deci } \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{a-c}{a+c} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2(a^2 - bc)}{(a+b)(a+c)} =$$

$$\frac{2(b^2 + c^2 - bc)(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \frac{2(b^3 + c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

2. Demonstrați că în orice triunghi dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ avem

$$\sin B + \cos B = \frac{p+r}{p-r}, \text{ unde } p \text{ este semiperimetrul, iar } r \text{ este raza cercului înscris.}$$

Soluție. Fie I centrul cercului înscris și M, N, P punctele de tangență cu laturile $(AB), (AC), (BC)$ (figura 3). Avem $AM = AN = x, BM = BP = y, CN = CP = z$. Rezultă că $x + y = c, y + z = a, x + z = b$. Cum $2p = a + b + c = 2(x + y + z)$, rezultă că $x = p - a, y = p - b, z = p - c$. Patrulaterul $AMIN$ are trei unghiuri drepte în A, M, N și cum $MI = NI$, rezultă că $AMIN$ este pătrat cu latura $AM = r = p - a$. Avem $\frac{p+r}{p-r} = \frac{2p-a}{a} =$

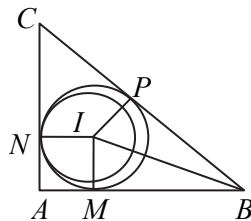


Fig. 3

$$= \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \sin B + \cos B.$$

2.2. Aplicații ale trigonometriei în geometria triunghiului dreptunghic

Folosim notațiile obișnuite dintr-un triunghi oarecare ABC , dar ținem seama că $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.

• I, O, G, H sunt centrul cercului înscris, centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul;

• I_a – centrul cercului exînscriș (intersecția unei bisectoare interioare cu două bisectoare exterioare);

• R – raza cercului circumscris; r – raza cercului înscris; r_a – raza cercului exînscriș tangent laturii $BC = a$; l_a – lungimea bisectoarei dusă din vârful A ; m_a – lungimea medianei din A .

În cazul $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ avem $H = A$; $O = M$ mijlocul ipotenuzei $BC = a$.

PROBLEME REZOLVATE

Fie triunghiul ABC dreptunghic în A , cu I, I_a centrul cercului înscris, respectiv centrul cercului exînscriș tangent la latura $BC = a$ și r, r_a razele celor două cercuri. Demonstrați că:

1. $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{a+b}{c}$;
2. $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}}$;
3. $r_a = p$;
4. $r_a = \frac{bc}{b+c-a}$;
5. $AI_a = p\sqrt{2}$;
6. $II_a = (p-r)\sqrt{2}$.

Soluții. 1. În problema rezolvată 1 din paragraful 2.1 avem $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$. Atunci

$$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a+c}{a-c}} = \sqrt{\frac{(a+c)^2}{a^2-c^2}} = \frac{a+c}{b}. \quad \text{2. Analog } \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{a+c}{b} \text{ și deci } \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{(a+b)(a+c)}{bc}. \text{ Aplicând teorema mediilor } \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geq \frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ab}}{bc} = \frac{4a}{\sqrt{bc}}.$$

$$\begin{aligned} \text{3. Conform figurii 4 avem } S &= A_{ABC} = A_{ABI_a} + A_{ACI_a} - A_{BCI_a} = \\ &= \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \frac{(b+c-a)r_a}{2} = \frac{(a+b+c-2a)r_a}{2} = \\ &= \frac{(2p-2a)r_a}{2} = (p-a)r_a \text{ și deci } r_a = \frac{S}{p-a}. \text{ Atunci} \end{aligned}$$

$$r_a = p \Leftrightarrow S = p(p-a) \Leftrightarrow p(p-a) = \frac{bc}{2} \Leftrightarrow 2p(2p-2a) =$$

$$= 2bc. \text{ Avem } 2p(2p-2a) = (b+c+a)(b+c-a) = b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc.$$

$$\text{4. Din problema 3 avem } r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{bc}{2(p-a)} = \frac{bc}{b+c-a}. \quad \text{5. Deoarece } m(\sphericalangle MAI_a) =$$

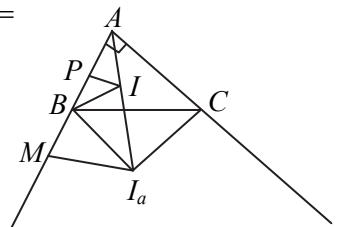


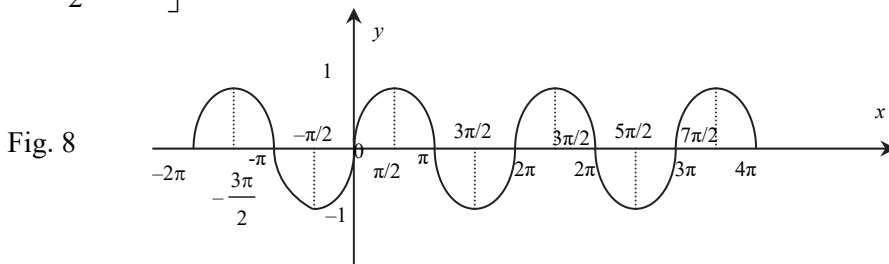
Fig. 4

3.4. Graficele funcțiilor trigonometrice

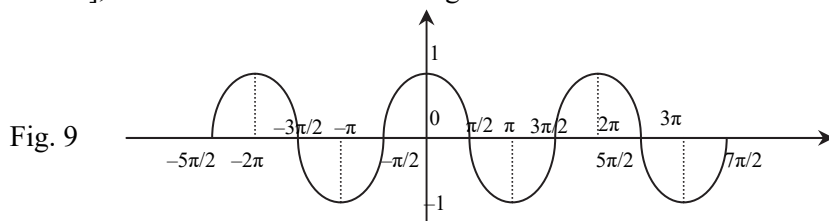
Funcția $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este strict crescătoare pe fiecare interval de forma

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ și este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma

$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ $k \in \mathbb{Z}$. Graficul este dat în figura 8.



Funcția $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ și este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Graficul este dat în figura 9.



Funcția $\operatorname{tg} : \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Graficul este cel din figura 10.

Funcția $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Graficul funcției ctg este dat în figura 11.

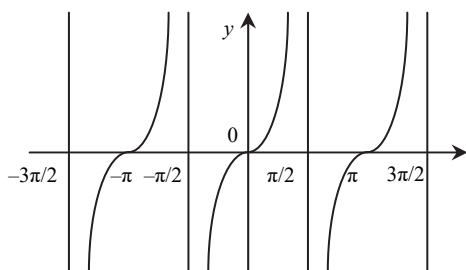


Fig. 10

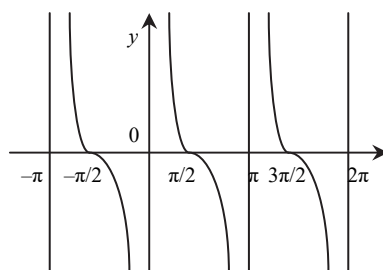


Fig. 11

Cuprins

Capitolul 1. UNGHIURI ȘI ARCE

- 1.1. Măsurarea unghiurilor și arcelor. Cercul trigonometric 3
- 1.2. Generalizarea noțiunii de unghi și a noțiunii de arc 7

Capitolul 2. TRIGONOMETRIE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIIC

- 2.1. Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic (funcțiile trigonometrice sin, cos, tg, ctg) 8
- 2.2. Aplicații ale trigonometriei în geometria triunghiului dreptunghic..... 13

Capitolul 3. FUNCȚII TRIGONOMETRICE

- 3.1. Funcții pare, funcții impare. Funcțiile sin și cos..... 15
- 3.2. Funcțiile tangentă și cotangentă 20
- 3.3. Reducerea la primul cadran. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia dintre ele 24
- 3.4. Graficele funcțiilor trigonometrice..... 29
- 3.5. Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri 33
- 3.6. Funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, unghiului triplu, respectiv ale jumătății de unghi 36
- 3.7. Transformarea unor sume și diferențe de funcții trigonometrice în produse. Transformarea unor produse de funcții trigonometrice în sume sau diferențe 41
- 3.8. Identități trigonometrice 47
- 3.9. Identități trigonometrice condiționate 52
- 3.10. Inegalități trigonometrice 55
- 3.11. Probleme pentru concursurile școlare..... 57
- 3.12. Teste de evaluare 65

Capitolul 4. APLICAȚIILE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

4.1. Produsul scalar a doi vectori.....	68
4.2. Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor	76
4.3. Funcții trigonometrice și relații între elementele unui triunghi	79
4.4. Rezolvarea triunghiului	83
4.5. Formule pentru aria triunghiului și razele cercului circumscris, cercului înscris, cercului exînscriș.....	85
4.6. Calculul unor distanțe între punctele remarcabile ale elementelor unui triunghi	87
4.7. Inegalități într-un triunghi	88
4.8. Rezolvarea unor probleme de geometrie cu ajutorul trigonometriei	89
4.9. Probleme pentru concursuri școlare	94
4.10. Teste de evaluare	99

Capitolul 5. FUNCȚIILE CIRCULARE INVERSE. ECUAȚII TRIGONOMETRICE

5.1. Funcțiile trigonometrice sin, cos, arcsin, arccos.....	101
5.2. Funcțiile trigonometrice tg, ctg, arctg, arcctg.....	106
5.3. Grafice și ecuații cu funcții trigonometrice inverse.....	111
5.4. Ecuații trigonometrice fundamentale și reductibile la acestea	114
5.5. Ecuații liniare în sin și cos. Ecuații omogene.....	118
5.6. Rezolvarea și discutarea ecuațiilor trigonometrice cu parametri.....	121
5.7. Alte tipuri de ecuații trigonometrice.....	123
5.8. Inecuații trigonometrice.....	125
5.9. Sisteme de ecuații trigonometrice.....	127
5.10. Probleme pentru concursuri școlare	129
5.11. Teste de evaluare	130

SOLUȚII	132
----------------------	-----