PETRE NĂCHILĂ CĂTĂLIN EUGEN NĂCHILĂ

TRIGONOMETRIE

PENTRU TOȚI

CLASELE a IX-a – a X-a

Editura NOMINA

Capitolul 1
UNGHIURI ŞI ARCE

1.1. Măsurarea unghiurilor şi arcelor. Cercul trigonometric

Se consideră cercul $\mathscr{C}(O, R)$ şi un punct fix A pe cerc. Pornind din punctul A, se împarte cercul în 360 părţi egale. Fiecare sector de cerc determinat de două puncte consecutive ale acestei diviziuni formează un unghi la centru de 1° (un grad sexagesimal), care este şi măsura arcului delimitat de cele două puncte. Semicercul are deci 180°, iar cercul are 360°. Dacă se împarte cercul în 400 de părţi egale vom avea gradele centesimale. Submultiplii:

$1° = 60$ min $= 60'$; $\quad 1^{\text{min}} = 1' = 60$ s $(60'')$.

$1° = 100^c$ (100 minute centesimale); $\quad 1^c = 100^{cc}$ (secunde centesimale)

Se numeşte radian (notat *rad*), măsura unghiului la centru care corespunde unui arc de lungime R (în cercul de rază R). Lungimea cercului este $2\pi R$.

Relaţia prin care se trece de la o măsură la alta este:

$$\frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha^g}{200^g} = \frac{a}{\pi}.$$

Avem $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57°14'$; $\quad 1^g = \frac{\pi}{180}$ rad; $\pi(\text{rad}) = 180° = 200^{-g}$.

Este util de reţinut următoarele corespondenţe:

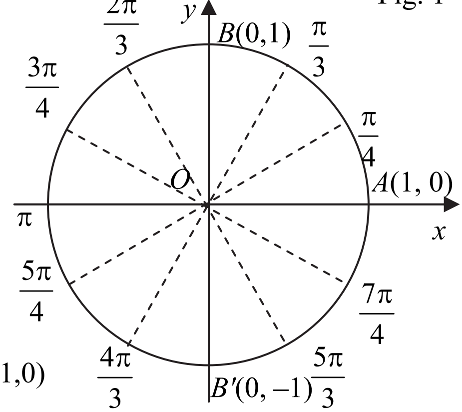
măsura în grade	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
măsura în radiani	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Considerăm cercul de centru O (originea sistemului axelor de coordonate) şi rază 1.

Cercul poate fi parcurs de la $A(1, 0)$ spre $B(0, 1)$ (sens pozitiv – trigonometric) (fig. 1) sau de la A spre $B'(0, -1)$ (sens negativ).

Cercul definit mai sus se numeşte *cerc trigonometric*.

Fig. 1



Teoremă. Pentru orice număr real t, există $k \in \mathbb{Z}$ şi $\alpha \in [0, 2\pi]$, astfel încât $t = 2k\pi + \alpha$ (se ia $k = \left[\frac{t}{2\pi}\right]$, $\alpha = \left\{\frac{t}{2\pi}\right\} \cdot 2\pi$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Demonstraţi că în orice triunghi ABC dreptunghic în A avem:

$$\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{2(b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

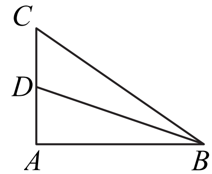


Fig. 2

Soluţie. Fie [AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ (figura 2). Din teorema bisectoarei avem: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$ şi atunci $\frac{AD}{AD+DC}=$ $=\frac{AB}{AB+BC}$, de unde $AD=\frac{bc}{a+c}$. Rezultă că $\sin\frac{B}{2}=\frac{AD}{BD}=$

$$=\frac{AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\frac{AD}{\sqrt{c^2+\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}}}=\frac{b}{\sqrt{(a+c)^2+b^2}}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2+2ac}}=$$

$=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{2a^2+2ac}}=\sqrt{\frac{a-c}{2a}}=\sqrt{\frac{1-\frac{c}{a}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}$. Analog se arată că $\sqrt{\frac{1+\cos B}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{a+c}{2a}}=\frac{AB}{AD}=\cos\frac{B}{2}$. Rezultă că $\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$, $\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=$

$=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ şi deci $\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{a-c}{a+c}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2(a^2-bc)}{(a+b)(a+c)}=$

$$\frac{2(b^2+c^2-bc)(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=\frac{2(b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

2. Demonstraţi că în orice triunghi dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90°$ avem $\sin B+\cos B=\frac{p+r}{p-r}$, unde p este semiperimetrul, iar r este raza cercului înscris.

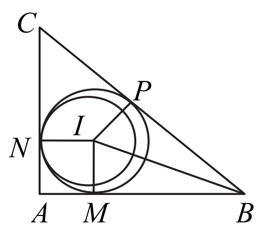


Fig. 3

Soluţie. Fie I centrul cercului înscris şi M, N, P punctele de tangenţă cu laturile (AB), (AC), (BC) (figura 3). Avem AM = $= AN = x$, BM = BP = y, $CN = CP = z$. Rezultă că $x + y = c$, $y + z = a$, $x + z = b$. Cum $2p = a + b + c = 2(x + y + z)$, rezultă că $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$. Patrulaterul $AMIN$ are trei unghiuri drepte în A, M, N şi cum $MI = NI$, rezultă că $AMIN$ este pătrat cu latura $AM = r = p - a$. Avem $\frac{p+r}{p-r}=\frac{2p-a}{a}=$

$$=\frac{b+c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\sin B+\cos B.$$

2.2. Aplicaţii ale trigonometriei în geometria triunghiului dreptunghic

Folosim notaţiile obişnuite dintr-un triunghi oarecare ABC, dar ţinem seama că $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.

- I, O, G, H sunt centrul cercului înscris, centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul;
- I_a – centrul cercului exînscris (intersecţia unei bisectoare interioare cu două bisectoare exterioare);
- R – raza cercului circumscris; r – raza cercului înscris; r_a – raza cercului exînscris tangent laturii $BC = a$; l_a – lungimea bisectoarei dusă din vârful A; m_a – lungimea medianei din A.

În cazul $m(\sphericalangle A) = 90°$ avem $H = A$; $O - M$ mijlocul ipotenuzei $BC = a$.

PROBLEME REZOLVATE

Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu I, I_a centrul cercului înscris, respectiv centrul cercului exînscris tangent la latura $BC = a$ şi r, r_a razele celor două cercuri. Demonstraţi că:

1. $\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{a+b}{c}$; **2.** $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}}$; **3.** $r_a = p$;

4. $r_a = \frac{bc}{b+c-a}$; **5.** $AI_a = p\sqrt{2}$; **6.** $II_a = (p-r)\sqrt{2}$.

Soluţii. **1.** În problema rezolvată 1 din paragraful 2.1 avem $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$. Atunci $\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a+c}{a-c}} = \sqrt{\frac{(a+c)^2}{a^2-c^2}} = \frac{a+c}{b}$. **2.** Analog $\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{a+c}{b}$ şi deci $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2} =$ $= \frac{(a+b)(a+c)}{bc}$. Aplicând teorema mediilor $\Rightarrow$ $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geq \frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{ab}}{bc} = \frac{4a}{\sqrt{bc}}$.

3. Conform figurii 4 avem $S = A_{ABC} = A_{ABI_a} + A_{ACI_a} - A_{BCI_a} =$

$= \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \frac{(b+c-a)r_a}{2} = \frac{(a+b+c-2a)r_a}{2} =$

$= \frac{(2p-2a)r_a}{2} = (p-a)r_a$ şi deci $r_a = \frac{S}{p-a}$. Atunci

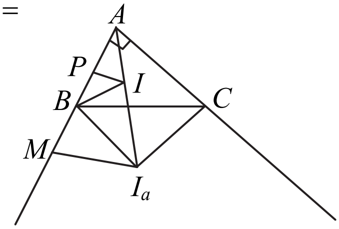


Fig. 4

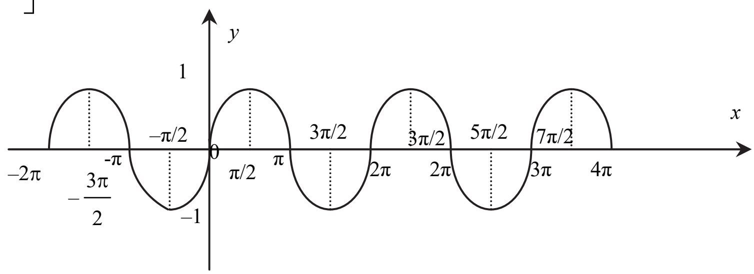
$r_a = p \Leftrightarrow S = p(p-a) \Leftrightarrow p(p-a) = \frac{bc}{2} \Leftrightarrow 2p(2p-2a) =$ $= 2bc$. Avem $2p(2p-2a) = (b+c+a)(b+c-a) = b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc$.

4. Din problema 3 avem $r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{bc}{2(p-a)} = \frac{bc}{b+c-a}$. **5.** Deoarece $m(\sphericalangle MAI_a) =$

3.4. Graficele funcţiilor trigonometrice

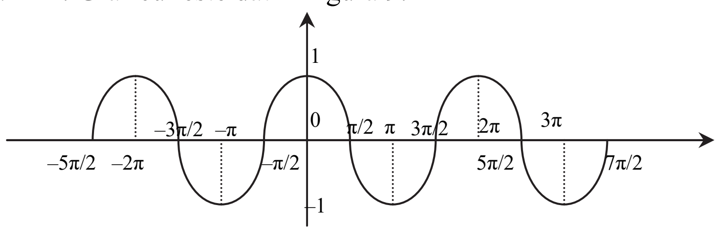
Funcţia $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ şi este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $k \in \mathbb{Z}$. Graficul este dat în figura 8.

Fig. 8



Funcţia $\cos : \mathbb{R} - [-1,1]$ este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ şi este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Graficul este dat în figura 9.

Fig. 9



Funcţia $\mathrm{tg} : \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Graficul este cel din figura 10.

Funcţia $\mathrm{ctg} : \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Graficul funcţiei ctg este dat în figura 11.

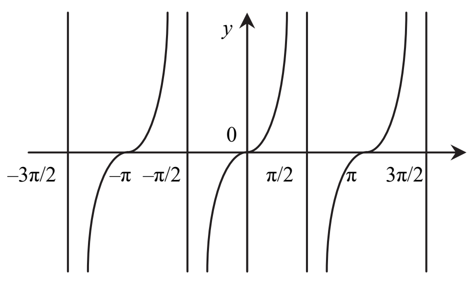


Fig. 10

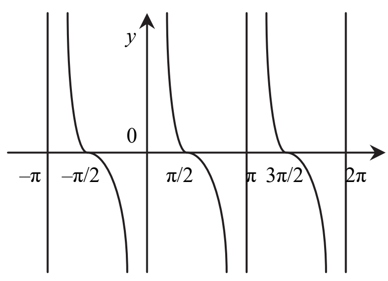


Fig. 11

Cuprins