

CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA - GEORGIA NICOLESCU

MATEMATICĂ

clasa a XI-a

- ALGEBRĂ SUPERIOARĂ
- ANALIZĂ MATEMATICĂ

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCIȚII ȘI PROBLEME

- Fixarea cunoștințelor
- Aprofundarea cunoștințelor
- Performanță
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă



CUPRINS

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

E*

R**

Capitolul I. PERMUTĂRI

Permutări. Compunerea permutărilor. Inversiunile unei permutări. Transpoziții	
Breviar de teorie	3
Probleme propuse	9 431
Teste de evaluare	13 434

Capitolul II. MATRICE

1. Noțiunea de matrice. Transpusa unei matrice. Adunarea matricelor.	
Înmulțirea unei matrice cu un scalar	
Breviar de teorie	14
Probleme propuse	20 434
2. Înmulțirea a două matrice. Ridicarea matricelor la puterea n	
Breviar de teorie	24
Probleme propuse	30 437
Teste de evaluare	39 446

Capitolul III. DETERMINANȚI

1. Calculul determinanților	
Breviar de teorie	41
Probleme propuse	47 447
2. Proprietățile determinanților	
Breviar de teorie	50
Probleme propuse	54 448
3. Aplicații ale determinanților în geometria în plan	
Breviar de teorie	64
Probleme propuse	68 455
Teste de evaluare	71 458

Capitolul IV. INVERSA UNEI MATRICE PĂTRATICE

Breviar de teorie	73
Probleme propuse	80 459
Teste de evaluare	85 461

Capitolul V. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

1. Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Metoda lui Cramer.	
Metoda matriceală. Metoda lui Gauss	
Breviar de teorie	88
Probleme propuse	93 463
2. Rangul unei matrice	
Breviar de teorie	95
Probleme propuse	98 464
3. Sisteme de ecuații liniare. Studiul compatibilității acestora	
Breviar de teorie	101
Probleme propuse	113 465
Teste de evaluare	118 469

* E - enunțuri

** R - răspunsuri, rezolvări

Capitolul I. NUMERE REALE

Mulțimea numerelor reale.		
Breviar de teorie	121	
Structura de ordine pe \mathbb{R} . Mulțimi mărginite. Mulțimi nemărginite. Mulțimea $\bar{\mathbb{R}}$. Intervale.		
Noțiunea de vecinătate. Punct de acumulare al unei mulțimi. Punct izolat		
Probleme propuse	130	471
Teste de evaluare	133	472

Capitolul II. ȘIRURI

Șiruri de numere reale. Limite de șiruri		
Breviar de teorie	135	
1. Șiruri. Subșiruri		
2. Șiruri monotone		
3. Șiruri mărginite		
4. Limite de șiruri		
5. Șiruri convergente		
6. Operații cu limite de șiruri		
7. Operații cu șiruri care au limite infinite		
8. Limite importante		
9. Criterii de existență a limitei unui șir		
10. Șiruri recurente		
Probleme propuse	169	473
Teste de evaluare	180	482

Capitolul III. LIMITE DE FUNCȚII. ASIMPTOTE

1. Limita unei funcții într-un punct. Limite laterale		
Breviar de teorie	183	
2. Limite remarcabile. Asimptote		
Breviar de teorie	187	
Probleme propuse		
1. Limita unei funcții într-un punct. Limite laterale	210	486
2. Limite remarcabile	214	488
3. Asimptote	217	491
Teste de evaluare	218	492

Capitolul IV. FUNCȚII CONTINUE

Breviar de teorie	221	
1. Continuitatea unei funcții într-un punct și pe o mulțime. Continuitatea laterală.		
Puncte de discontinuitate. Operații cu funcții continue		
2. Proprietăți ale funcțiilor continue pe intervale reale. Proprietatea lui Darboux		
Proprietatea lui Darboux – exemple	232	
Probleme propuse	240	494
Teste de evaluare	246	497

Capitolul V. FUNCȚII DERIVABILE

1. Derivata unei funcții într-un punct. Derivate laterale		
Breviar de teorie	249	
Puncte unghiulare. Puncte de întoarcere. Derivata funcției inverse		
Probleme propuse	261	499

	E	R
2. Derivata unei funcții pe un interval		
Breviar de teorie	265	
Reguli de derivare. Derivata unei funcții compuse. Derivate de ordin superior.		
Tabele cu derivatele unor funcții		
3. Formula lui Taylor	270	
Probleme propuse	280	501
<i>Teste de evaluare</i>	288	511

Capitolul VI. TEOREME FUNDAMENTALE ALE ANALIZEI MATEMATICE

1. Teorema lui Fermat		
Breviar de teorie	292	
Probleme propuse	296	513
2. Teorema lui Rolle. Șirul lui Rolle		
Breviar de teorie	299	
Probleme propuse	309	515
3. Teorema lui Lagrange. Consecințe ale teoremei lui Lagrange		
Breviar de teorie	312	
Probleme propuse	319	518
4. Teorema lui Cauchy		
Breviar de teorie	325	
Probleme propuse	327	523
5. Regulile lui l'Hospital		
Breviar de teorie	328	
Probleme propuse	341	523
6. Teorema lui Darboux		
Breviar de teorie	343	
<i>Teste de evaluare</i>	344	525

Capitolul VII. STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

Breviar de teorie	348	
1. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor.		
Puncte de extrem. Monotonia funcțiilor		
2. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor.		
Convexitate, concavitate. Puncte de inflexiune	349	
3. Grafice de funcții	351	
4. Reprezentarea grafică a unor ecuații. Separarea rădăcinilor unei ecuații	377	
Probleme propuse	386	529
5. Reprezentarea grafică a conicelor.		
Proprietățile elementare ale conicelor într-un sistem cartezian		
Cercul	393	
Elipsa	403	
Hiperbola	411	
Parabola	418	
<i>Teste de evaluare</i>	427	550

Bibliografie selectivă	554
------------------------------	-----

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ



Permutări

Permutări. Transpoziții

Breviar de teorie

Noțiuni introductive

- Fie mulțimea finită $A = \{1, 2, \dots, n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \rightarrow A$, se numește *permutare de ordinul n* sau *permutare de gradul n* , unde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Mulțimea tuturor permutărilor de ordin n se notează cu S_n , iar card $S_n = n!$.
- Orice permutare de ordinul n , se reprezintă astfel:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

- Permutarea $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ se numește *permutare identică* de ordin n (se mai notează și simplu cu e).
- *Exemple:*

$$1) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3, \text{ unde } \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1.$$

$$2) \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4, \text{ unde } \tau(1) = 4, \tau(2) = 3, \tau(3) = 2, \tau(4) = 1.$$

$$3) e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5.$$

Compunerea permutărilor

Definiție. Considerăm permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ și

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$, $\sigma, \tau \in S_n$. Atunci permutarea

$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$ se numește *compusa permutărilor* σ cu τ .

Observații:

1. Dacă $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_n$, atunci $\sigma \circ \tau \in S_n$ și $\tau \circ \sigma \in S_n$.
2. În general, $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.
3. Prin convenție, $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$ și $\sigma^n = \sigma^{n-1} \circ \sigma$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemplu (de compunere de permutări):

Fie permutările $\sigma, \tau \in S_4$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, iar $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Avem $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, deoarece:

$$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 4, \text{ adică } 1 \rightarrow 4,$$

$$(\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2, \text{ adică } 2 \rightarrow 2,$$

$$(\sigma \circ \tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 3, \text{ adică } 3 \rightarrow 3,$$

$$(\sigma \circ \tau)(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(4) = 1, \text{ adică } 4 \rightarrow 1.$$

Avem $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, deoarece:

$$(\tau \circ \sigma)(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(2) = 1, \text{ adică } 1 \rightarrow 1,$$

$$(\tau \circ \sigma)(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(3) = 2, \text{ adică } 2 \rightarrow 2,$$

$$(\tau \circ \sigma)(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(4) = 4, \text{ adică } 3 \rightarrow 4,$$

$$(\tau \circ \sigma)(4) = \tau(\sigma(4)) = \tau(1) = 3, \text{ adică } 4 \rightarrow 3.$$

Proprietăți (ale compunerii permutărilor)

1. Compunerea permutărilor este asociativă, dar nu este comutativă.

2. Compunerea permutărilor admite elementul neutru $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, adică: $\sigma \circ e_n = e_n \circ \sigma = \sigma$, pentru orice permutare $\sigma \in S_n$.

Inversa unei permutări

Propoziție. Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, există o unică permutare, notată cu σ^{-1} , unde $\sigma^{-1} \in S_n$, astfel încât $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e_n$.

Permutarea σ^{-1} se numește *inversa* permutării σ .

Exemplu:

Inversa permutării $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ este permutarea $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$(\tau \circ \tau^{-1})(1) = 1 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2, \text{ adică } 1 \rightarrow 2,$$

$$(\tau \circ \tau^{-1})(2) = 2 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3, \text{ adică } 2 \rightarrow 3,$$

$$(\tau \circ \tau^{-1})(3) = 3 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1, \text{ adică } 3 \rightarrow 1,$$

$$(\tau \circ \tau^{-1})(4) = 4 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4, \text{ adică } 4 \rightarrow 4.$$

$$(\tau^{-1} \circ \tau)(1) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1, \text{ adică } 3 \rightarrow 1,$$

$$(\tau^{-1} \circ \tau)(2) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2, \text{ adică } 1 \rightarrow 2,$$

$$(\tau^{-1} \circ \tau)(3) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3, \text{ adică } 2 \rightarrow 3,$$

$$(\tau^{-1} \circ \tau)(4) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4, \text{ adică } 4 \rightarrow 4.$$

Inversiunile unei permutări. Semnul unei permutări

- Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de ordin n , atunci o pereche ordonată (i, j) din mulțimea $M = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ cu proprietatea $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$, se numește *inversiune* a permutării σ .

Mai putem spune că o *inversiune în permutarea* σ este o pereche de numere naturale $(\sigma(i), \sigma(j))$ situată pe linia a doua a tabloului, având proprietatea $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Numărul inversiunilor permutării σ se notează $m(\sigma)$.

Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește *signatura* (semnul) permutării σ .

- Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$, atunci permutarea se numește *permutare pară*.

- Dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, atunci permutarea se numește *permutare impară*.

- Oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, avem:

$$0 \leq m(\sigma) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proprietate. Dacă $\sigma_1 \in S_n$, $\sigma_2 \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2)$.

Exemplu:

Să se determine semnul permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

Aplicăm definiția inversiunii într-o permutare:

$$1 < 2 \Rightarrow 3 > 2, \quad 2 < 4 \Rightarrow 2 \not> 5,$$

$$1 < 3 \Rightarrow 3 > 1, \quad 2 < 5 \Rightarrow 2 \not> 4,$$

$$1 < 4 \Rightarrow 3 \not> 5, \quad 3 < 4 \Rightarrow 1 \not> 5,$$

$$1 < 5 \Rightarrow 3 \not> 4, \quad 3 < 5 \Rightarrow 1 \not> 4,$$

$$2 < 3 \Rightarrow 2 > 1, \quad 4 < 5 \Rightarrow 5 > 4.$$

Inversiunile sunt $(3, 2), (3, 1), (2, 1), (5, 4)$, deci $m(\sigma) = 4$.

Atunci $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^4 = 1$, deci permutarea σ este pară.

Transpoziții

Permutarea de ordin n , notată τ_{ij} și definită prin

$$\tau_{ij} = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{array} \right) \text{ se numește } \textit{transpoziție} \text{ } (\tau_{ij} \text{ permută}$$

numai elementele i și j din linia a doua a tabloului, restul elementelor rămânând neschimbate).

Observații:

1) Orice transpoziție este o permutare impară.

2) $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$ și $\tau_{ij}^2 = e_n$.

Probleme rezolvate

1. Fie permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați permutările α^{-1} și β^{-1} .

b) Rezolvați ecuațiile $x \circ \alpha = \beta$ și $\beta \circ y = \alpha$, în S_3 .

Rezolvare.

$$a) \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) $x \circ \alpha = \beta$. Se compune cu α^{-1} , la dreapta ecuației:

$$x = \beta \circ \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\beta \circ y = \alpha$. Se compune cu β^{-1} , la stânga ecuației:

$$y = \beta^{-1} \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. Să se calculeze:

a) $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$.

b) σ^{2012} .

Rezolvare

$$a) \sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^4 = \sigma^3 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

$$b) \sigma^{2012} = \sigma^{2008+4} = \sigma^{2008} \circ \sigma^4 = (\sigma^4)^{502} \circ \sigma^4 = e^{502} \circ \sigma^4 = e \circ \sigma^4 = \sigma^4 = e.$$

3. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numărul de inversiuni și signatura permutării σ .

b) Să se arate că ecuația $x^2 = \sigma$ nu are soluții în S_4 .

Rezolvare.

a) Aplicăm definiția inversiunii în permutarea σ :

$$1 < 2 \Rightarrow 4 > 3,$$

$$2 < 3 \Rightarrow 3 > 1,$$

$$1 < 3 \Rightarrow 4 > 1,$$

$$2 < 4 \Rightarrow 3 > 2,$$

$$1 < 4 \Rightarrow 4 > 2,$$

$$3 < 4 \Rightarrow 1 \not> 2.$$

Inversiunile sunt $(4, 3), (4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2)$. Deci $m(\sigma) = 5$, de unde rezultă că $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^5 = -1$.

b) Deoarece $\varepsilon(x^2) = \varepsilon(x \circ x) = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(x) = [\varepsilon(x)]^2 = 1 \Rightarrow \varepsilon(x^2) = 1$, iar

$\varepsilon(\sigma) = -1$, deducem că x^2 este o permutare pară pentru orice $x \in S_4$, iar σ este o permutare impară. Cum $\varepsilon(x^2) \neq \varepsilon(\sigma)$, adică $1 \neq -1$, atunci ecuația nu poate avea soluții.

Probleme propuse

1. Dacă S_n reprezintă mulțimea permutărilor de ordin n , să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, în următoarele cazuri:
- a) $\text{card } S_n = 24$; b) $\text{card } S_n = 720$; c) $\text{card } S_n = 120$.
2. Să se calculeze $\sigma_1 \circ \sigma_2$ și $\sigma_2 \circ \sigma_1$, în cazurile următoare:
- a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- b) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
- c) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;
- d) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Să se calculeze σ^2 , σ^3 , σ^4 și σ^{2012} în cazurile următoare:
- a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Arătați că pentru orice $\sigma \in S_n$, există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^p = e$, unde e este permutarea identică din S_n , oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
5. Să se determine cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^n = e$, în fiecare dintre cazurile următoare:
- a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
6. Să se calculeze inversele următoarelor permutări:
- a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;