CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA - GEORGIA NICOLESCU

MATEMATICĂ

clasa a XI-a

- ALGEBRĂ SUPERIOARĂ
- ANALIZĂ MATEMATICĂ

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCIŢII ŞI PROBLEME

- Fixarea cunoştinţelor
- Aprofundarea cunoştinţelor
- Performanţă
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă

ROMANIA · EDITURA ŞI TIPOGRAFIA · ICAR ·

CUPRINS

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

** E – enunțuri*
*** R – răspunsuri, rezolvări*

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

I Permutări

Permutări. Transpoziții

Breviar de teorie

Noțiuni introductive

• Fie mulțimea finită $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \to A$, se numește *permutare de ordinul n* sau *permutare de gradul n*, unde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

• Mulțimea tuturor permutărilor de ordin n se notează cu S_n, iar card $S_n = n!$.

• Orice permutare de ordinul n, se reprezintă astfel:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

• Permutarea $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ se numește *permutare identică* de ordin n (se mai notează și simplu cu e).

• *Exemple*:

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, unde $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$.

2) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$, unde $\tau(1) = 4$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 2$, $\tau(4) = 1$.

3) $e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$.

Compunerea permutărilor

Definiție. Considerăm permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ și

$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n)\end{pmatrix}$, $\sigma,\tau\in S_n$. Atunci permutarea

$\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n))\end{pmatrix}$ se numește *compusa permutărilor* σ cu τ.

Observații:

1. Dacă $\sigma\in S_n$, $\tau\in S_n$, atunci $\sigma\circ\tau\in S_n$ și $\tau\circ\sigma\in S_n$
2. În general, $\sigma\circ\tau\neq\tau\circ\sigma$.
3. Prin convenție, $\sigma^2=\sigma\circ\sigma$ și $\sigma^n=\sigma^{n-1}\circ\sigma$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

Exemplu (de compunere de permutări):

Fie permutările $\sigma,\tau\in S_4$, unde $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$, iar $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$.

Avem $\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$, deoarece:

$(\sigma\circ\tau)(1)=\sigma(\tau(1))=\sigma(3)=4$, adică $1\to 4$,
$(\sigma\circ\tau)(2)=\sigma(\tau(2))=\sigma(1)=2$, adică $2\to 2$,
$(\sigma\circ\tau)(3)=\sigma(\tau(3))=\sigma(2)=3$, adică $3\to 3$,
$(\sigma\circ\tau)(4)=\sigma(\tau(4))=\sigma(4)=1$, adică $4\to 1$.

Avem $\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$, deoarece:

$(\tau\circ\sigma)(1)=\tau(\sigma(1))=\tau(2)=1$, adică $1\to 1$,
$(\tau\circ\sigma)(2)=\tau(\sigma(2))=\tau(3)=2$, adică $2\to 2$,
$(\tau\circ\sigma)(3)=\tau(\sigma(3))=\tau(4)=4$, adică $3\to 4$,
$(\tau\circ\sigma)(4)=\tau(\sigma(4))=\tau(1)=3$, adică $4\to 3$.

Proprietăți (ale compunerii permutărilor)

1. Compunerea permutărilor este asociativă, dar nu este comutativă.

2. Compunerea permutărilor admite elementul neutru $e_n=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\1&2&\dots&n\end{pmatrix}$, adică: $\sigma\circ e_n=e_n\circ\sigma=\sigma$, pentru orice permutare $\sigma\in S_n$.

Inversa unei permutări

Propoziție. Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, există o unică permutare, notată cu σ^{-1}, unde $\sigma^{-1} \in S_n$, astfel încât $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e_n$.

Permutarea σ^{-1} se numește *inversa* permutării σ.

Exemplu:

Inversa permutării $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ este permutarea $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$(\tau \circ \tau^{-1})(1) = 1 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2$, adică $1 \to 2$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(2) = 2 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3$, adică $2 \to 3$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(3) = 3 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1$, adică $3 \to 1$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(4) = 4 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4$, adică $4 \to 4$.

$(\tau^{-1} \circ \tau)(1) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1$, adică $3 \to 1$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(2) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2$, adică $1 \to 2$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(3) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3$, adică $2 \to 3$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(4) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4$, adică $4 \to 4$.

Inversiunile unei permutări. Semnul unei permutări

- Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de ordin n, atunci o pereche ordonată (i, j) din mulțimea $M = \{(i, j) | 1 \le i < j \le n\}$ cu proprietatea $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$, se numește *inversiune* a permutării σ.

  Mai putem spune că *o inversiune în permutarea* σ este o pereche de numere naturale $(\sigma(i), \sigma(j))$ situată pe linia a doua a tabloului, având proprietatea $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Numărul inversiunilor permutării σ se notează $m(\sigma)$.

  Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește *signatura* (*semnul*) permutării σ.

  - Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$, atunci permutarea se numește *permutare pară*.
  - Dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, atunci permutarea se numește *permutare impară*.

- Oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, $n \ge 2$, avem:

$$0 \le m(\sigma) \le \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proprietate. Dacă $\sigma_1 \in S_n$, $\sigma_2 \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2)$.

Exemplu:

Să se determine semnul permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

Aplicăm definiția inversiunii într-o permutare:

$1<2 \Rightarrow 3>2$, $\quad 2<4 \Rightarrow 2 \not> 5$,

$1<3 \Rightarrow 3>1$, $\quad 2<5 \Rightarrow 2 \not> 4$,

$1<4 \Rightarrow 3 \not> 5$, $\quad 3<4 \Rightarrow 1 \not> 5$,

$1<5 \Rightarrow 3 \not> 4$, $\quad 3<5 \Rightarrow 1 \not> 4$,

$2<3 \Rightarrow 2>1$, $\quad 4<5 \Rightarrow 5>4$.

Inversiunile sunt (3, 2), (3, 1), (2, 1), (5, 4), deci $m(\sigma)=4$.

Atunci $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^4=1$, deci permutarea σ este pară.

Transpoziții

Permutarea de ordin n, notată τ_{ij} și definită prin

$\tau_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ se numește *transpoziție* (τ_{ij} permută numai elementele i și j din linia a doua a tabloului, restul elementelor rămânând neschimbate).

Observații:

1) Orice transpoziție este o permutare impară.

2) $\tau_{ij}^{-1}=\tau_{ij}$ și $\tau_{ij}^2=e_n$.

Probleme rezolvate

1. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați permutările α^{-1} și β^{-1}.

b) Rezolvați ecuațiile $x \circ \alpha=\beta$ și $\beta \circ y=\alpha$, în S_3.

Rezolvare.

a) $\alpha^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $x \circ \alpha=\beta$. Se compune cu α^{-1}, la dreapta ecuației:

$$x=\beta \circ \alpha^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\beta \circ y=\alpha$. Se compune cu β^{-1}, la stânga ecuației:

$$y=\beta^{-1}\circ\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

2. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\in S_4$. Să se calculeze:

a) σ^2, σ^3, σ^4.

b) σ^{2012}.

Rezolvare

a) $\sigma^2=\sigma\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$

$$\sigma^3=\sigma^2\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}.$$

$$\sigma^4=\sigma^3\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e.$$

b) $\sigma^{2012}=\sigma^{2008+4}=\sigma^{2008}\circ\sigma^4=\left(\sigma^4\right)^{502}\circ\sigma^4=e^{502}\circ\sigma^4=e\circ\sigma^4=\sigma^4=e$.

3. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$.

a) Să se determine numărul de inversiuni și signatura permutării σ.

b) Să se arate că ecuația $x^2=\sigma$ nu are soluții în S_4.

Rezolvare.

a) Aplicăm definiția inversiunii în permutarea σ:

$1<2\Rightarrow 4>3$, $\quad 2<3\Rightarrow 3>1$,

$1<3\Rightarrow 4>1$, $\quad 2<4\Rightarrow 3>2$,

$1<4\Rightarrow 4>2$, $\quad 3<4\Rightarrow 1\not>2$.

Inversiunile sunt (4, 3), (4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2). Deci $m(\sigma)=5$, de unde rezultă că $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^5=-1$.

b) Deoarece $\varepsilon(x^2)=\varepsilon(x\circ x)=\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(x)=[\varepsilon(x)]^2=1\Rightarrow\varepsilon(x^2)=1$, iar $\varepsilon(\sigma)=-1$, deducem că x^2 este o permutare pară pentru orice $x\in S_4$, iar σ este o permutare impară. Cum $\varepsilon(x^2)\neq\varepsilon(\sigma)$, adică $1\neq-1$, atunci ecuația nu poate avea soluții.

Probleme propuse

1. Dacă S_n reprezintă mulțimea permutărilor de ordin n, să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, în următoarele cazuri:

a) card $S_n = 24$; b) card $S_n = 720$; c) card $S_n = 120$.

2. Să se calculeze $\sigma_1 \circ \sigma_2$ și $\sigma_2 \circ \sigma_1$, în cazurile următoare:

a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Să se calculeze σ^2, σ^3, σ^4 și σ^{2012} în cazurile următoare:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Arătați că pentru orice $\sigma \in S_n$, există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^p = e$, unde e este permutarea identică din S_n, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

5. Să se determine cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^n = e$, în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Să se calculeze inversele următoarelor permutări:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;