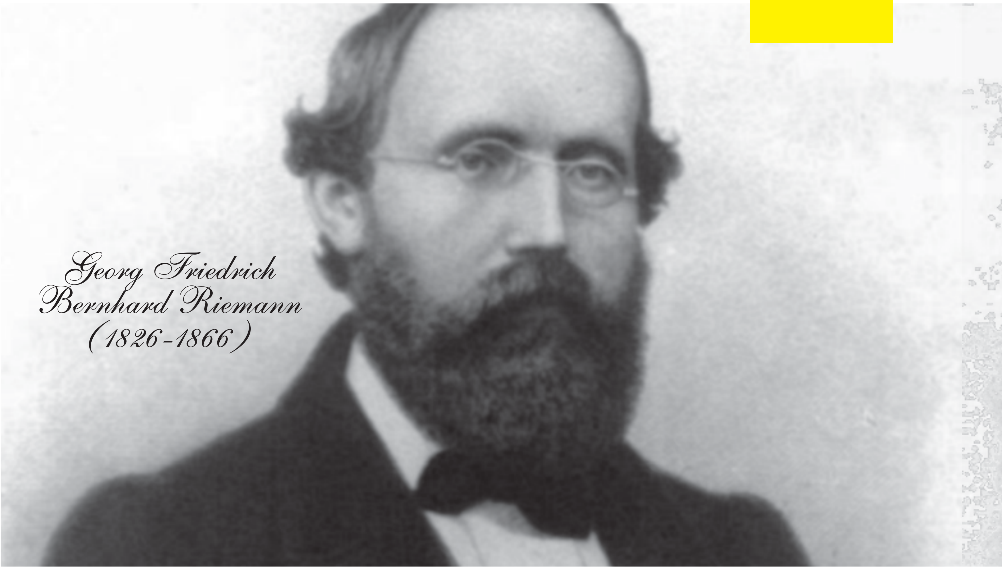
Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

EUGEN RADU
OVIDIU ȘONTEA

Manual pentru clasa a 12-a



MATEMATICĂ
M1

Editura ALL

Matematică – Manual pentru clasa a XII-a: M1

Eugen RADU, Ovidiu ŞONTEA

ISBN 978-973-684-793-6

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației, Cercetării şi Tineretului nr. 1262/43 din 6.06.2007 în urma evaluării calitative şi este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației şi Cercetării nr. 5959 din 22.12.2006.

Referenți: **conf. dr. Radu Miculescu**
prof. gr. I Gabriel Vrînceanu

Redactor: **Daniela Slavu**

Coperta colecției: **Alexandru Novac**

Tehnoredactare: **Gabriel Iancu**

Editura ALL
Bd. Constructorilor nr. 20A, et. 3,
sector 6, cod 060512, Bucureşti
Tel.: 021 402 26 00
Fax: 021 402 26 10

Distribuție:
021 402 26 30; 021 402 26 33

Comenzi:
comenzi@all.ro

www.all.ro

ALGEBRĂ

Capitolul 1

Grupuri

1.1. Legi de compoziţie

Să ne aducem aminte din clasele anterioare că, ori de câte ori am făcut cunoştinţă cu o mulţime, de fiecare dată am introdus pe orice mulţime una sau mai multe operaţii.

Cu privire la operaţiile introduse pe o mulţime (de exemplu, numerică) relevăm câteva aspecte:

- orice operaţie asociază unei perechi ordonate de numere un al treilea număr;
- ordinea în care apar termenii este esenţială (exemplu: $2 - 5$, $5 - 2$ etc.).

În acest paragraf intenţionăm să extindem noţiunea de operaţie. Într-o operaţie recunoaştem o anumită corespondenţă între mulţimea perechilor ordonate de elemente ale unei mulţimi şi mulţimea însăşi. Suntem conduşi către următoarea:

DEFINIŢIE

Fie M o mulţime nevidă fixată.

Se numeşte **lege de compoziţie (operaţie algebrică)** pe M o funcţie $f: M \times M \to M$. Elementul $f((x, y)) \in M$ se numeşte compusul lui x cu y prin legea de compoziţie (operaţia) f.

Pentru o scriere mai comodă obişnuită să notăm $f((x, y))$ cu simboluri precum $+$, $-$, $\cdot$, $\cup$, $\cap$, $\circ$, $*$ etc., interpuse între x şi y. Cele mai des întâlnite sunt notaţiile aditivă $(+)$ şi multiplicativă $(\cdot)$.

Exemple de legi de compoziţie

1. Adunarea pe mulţimea $\mathbb{Z}$ este funcţia care asociază perechii (x, y) elementul notat $x + y$ $((x, y) \to x \cdot y)$.
2. Înmulţirea pe $\mathbb{Q}$ este funcţia care asociază perechii (x, y) elementul notat $x \cdot y$ $((x, y) \to x \cdot y)$.
3. Adunarea pe o mulţime de matrice $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$, $(A, B) \to A + B$.
4. Reuniunea pe mulţimea părţilor unei mulţimi $(X, Y) \to X \cup Y$.
5. Compunerea funcţiilor pe mulţimea $\mathcal{F}(E)$ a funcţiilor definite pe E cu valori în E: $(f, g) \to f \circ g$.

6. Adunarea și înmulțirea modulo n:

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, fixat. Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci prin $x(\text{mod } n)$ notăm restul împărțirii lui x la n.

Exemple

$14(\text{mod } 7) = 0$, $6(\text{mod } 10) = 6$; $-13(\text{mod } 5) = 2$.

De asemenea: dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ spunem că $a \equiv b\ (\text{mod } n)$ (citim „a congruent cu b modulo n") dacă $(a - b)(\text{mod } n) = 0$ (adică a și b dau același rest la împărțirea cu n).

Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ definim:

- suma modulo n a lui a cu b, notată prin $\oplus$:
  $a \oplus b = (a + b)\ (\text{mod } n)$
- produsul modulo n al lui a cu b, notat prin $\odot$:
  $a \odot b = (a \cdot b)(\text{mod } n)$

Exemple

Pentru $n = 6$ avem

$8 \oplus 6 = 14(\text{mod } 6) = 2$; $\qquad -7 \oplus 5 = (-2)(\text{mod } 6) = 4$

$5 \odot 8 = 40(\text{mod } 6) = 4$; $\qquad 3 \odot (-5) = (-15)(\text{mod } 6) = 3$

Tabla unei legi de compoziţie

Funcțiile definite pe o mulțime finită pot fi introduse printr-un tabel.

La fel putem proceda cu legile de compoziție definite o mulțime oarecare finită. În acest caz preferăm să scriem valorile într-un tablou, asemenea matricelor.

Dacă $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ și legea de compoziție pe M este notată prin $*$, atunci elementul $x_i * x_j$ se scrie la intersecția liniei i cu coloana j.

$$\begin{array}{c|cccccc}
* & x_1 & x_2 & \ldots & x_j & \ldots & x_n \\
\hline
x_1 & x_1 * x_1 & x_1 * x_2 & \ldots & x_1 * x_j & \ldots & x_1 * x_n \\
x_2 & x_2 * x_1 & x_2 * x_2 & \ldots & x_2 * x_j & \ldots & x_2 * x_n \\
\vdots & & & & & & \\
x_i & \ldots & \ldots & \ldots & x_i * x_j & \ldots & \ldots \\
\vdots & & & & & & \\
x_n & x_n * x_1 & x_n * x_2 & \ldots & x_n * x_j & \ldots & x_n * x_n
\end{array}$$

Acest tablou se numește *tabla legii de compoziție* $*$.

Exemplu

Înmulțirea pe mulțimea de numere complexe $\{1, -1, i, -i\}$ poate fi dată prin tabla:

$$\begin{array}{c|cccc}
\cdot & 1 & -1 & i & -i \\
\hline
1 & 1 & -1 & i & -i \\
i & i & -i & -1 & 1 \\
-i & -i & i & 1 & -1
\end{array}$$

OBSERVAŢII

1. În timp ce pe $\mathbb{Z}$ scăderea este lege de compoziție, pe mulțimea $\mathbb{N}$ ea nu este lege de compoziție („nu este peste tot definită“). Perechii (3, 7) nu-i putem asocia prin scădere niciun număr natural.
2. Produsul scalar al vectorilor din plan (spațiu) nu este lege de compoziție. Perechii $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ i se asociază un număr real, nu un vector!

1.2. Parte stabilă a unei mulţimi în raport cu o lege de compoziţie

Să considerăm operația de înmulțire pe mulțimea $\mathbb{R}$. Ea nu este lege de compoziție pe orice submulțime a lui $\mathbb{R}$.

De exemplu, pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Această observație ne conduce la următoarea:

DEFINIŢIE

Fie M o mulțime nevidă pe care este definită legea de compoziție $\circ$ și H o submulțime nevidă a sa.

Submulțimea H se numește **parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea de compoziție** $\circ$ dacă

$$(\forall)\, x, y \in H, \text{ avem } x \circ y \in H.$$

În acest caz restricția operației $\circ$ la submulțimea H, adică funcția $\circ : H \times H \to H$, $(x, y) \to x \circ y$ se numește lege de compoziție *indusă* pe mulțimea H de legea $\circ$.

Exemple

1. Submulțimea $\mathbb{Q}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea (înmulțirea) numerelor reale.
2. Submulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea (înmulțirea) numerelor reale.
3. Submulțimea $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

   Într-adevăr: pentru $z_1, z_2 \in U_n$ avem $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = 1 \cdot 1 = 1$, deci $z_1 \cdot z_2 \in U_n$.
4. Mulțimea $M = (2, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$, $x * y = \dfrac{xy - 2}{x + y - 4}$.

   Într-adevăr: dacă $x, y \in (2, \infty)$, atunci $x + y - 4 > 0$, fracția având sens.

   În plus, $\dfrac{xy - 2}{x + y - 4} > 2 \Leftrightarrow xy - 2 > 2x + 2y - 8 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 > 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) + 2 > 0$, deci $x * y \in M$.

1.3. Proprietăţi ale legilor de compoziţie

DEFINIŢIA 1

O lege de compoziție $\circ$ pe mulțimea M este **asociativă** dacă
$$(\forall)\ x, y, z \in M \text{ avem } (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

Exemple

1. Adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție asociative pe $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

2. Adunarea și înmulțirea matricelor sunt legi de compoziție asociative pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Legea $*$ definită pe $(-\infty, 1)$ prin $x * y = \dfrac{2-xy}{3-x-y}$ este asociativă.

Într-adevăr: $(x * y) * z = \dfrac{2-xy}{3-x-y} * z = \dfrac{2-\dfrac{2-xy}{3-x-y}\cdot z}{3-\dfrac{2-xy}{3-x-y}-z} =$

$= \dfrac{xyz-2x-2y-2z+6}{xy+yz+zx-3x-3y-3z+7}$;

$x * (y * z) = x * \dfrac{2-yz}{3-y-z} = \dfrac{2-x\cdot\dfrac{2-yz}{3-y-z}}{3-x-\dfrac{2-yz}{3-y-z}} = \dfrac{xyz-2x-2y-2z+6}{xy+yz+zx-3x-3y-3z+7}$;

$(x * y) * z = x * (y * z)$, oricare ar fi $x, y, z \in M$.

4. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ scăderea nu este asociativă, așa cum se observă din exemplul: $(2-3)-1 \neq 2-(3-1)$

OBSERVAŢII

1. Dacă o lege de compoziție $\circ$ este asociativă, atunci prin $x \circ y \circ z$ înțelegem $(x \circ y) \circ z$ sau $x \circ (y \circ z)$.

2. Proprietatea de asociativitate poate fi extinsă la un număr finit, oarecare de termeni. De exemplu, dacă $x_1, x_2, x_3, x_4 \in M$, iar $\circ$ este o lege de compoziție pe mulțimea M, atunci $x_1 * (x_2 * x_3 * x_4) = (x_1 * x_2 * x_3) * x_4 = (x_1 * x_2) * (x_3 * x_4)$.
(Parantezele pot fi puse oricum, numai să nu schimbăm ordinea termenilor.)

3. Proprietatea de asociativitate se transmite de la o mulțime la orice parte stabilă a sa.

DEFINIŢIA 2

O lege de compoziție $\circ$ pe o mulțime M este **comutativă** dacă

$$(\forall)\ x, y \in M \text{ avem } x \circ y = y \circ x.$$

Exemple

1. Adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție comutative pe $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
2. Pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ adunarea este comutativă, dar înmulțirea nu este comutativă.
3. Pe mulțimea $\mathcal{F}(E)$ a funcțiilor definite pe E cu valori în E, compunerea funcțiilor este necomutativă.

OBSERVAŢII

1. Proprietatea de comutativitate se transmite de la o mulțime la orice parte stabilă a ei.
2. Pentru legile de compoziţie definite pe mulţimi finite, comutativitatea poate fi sesizată pe tabla legii, observând simetria tablei în raport cu „diagonala principală".

   Exemple

$\circ$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	a	a
c	b	a	a

$*$	a	b	c
a	a	c	a
b	b	a	b
c	a	c	a

   Legea $\circ$ este comutativă, dar legea $*$ este necomutativă.

DEFINIŢIA 3

O lege de compoziție $\circ$ pe o mulțime M are **element neutru** dacă

$$(\exists)\ e \in M\ (\forall)\ x \in M\ x \circ e = e \circ x = x.$$

În acest caz elementul $e \in M$ se numește *elementul neutru* al legii.

Exemple

1. Adunarea are ca element neutru numărul 0 pe fiecare dintre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
2. Înmulțirea are ca element neutru numărul 1 pe fiecare dintre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
3. Compunerea funcțiilor are ca element neutru funcția $1_E : E \to E$, $1_E(x) = x$, pe mulțimea $\mathcal{F}(E)$.
4. Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$, a submulțimilor lui M, considerăm legea de compoziție Δ: $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ (diferența simetrică). Elementul neutru este mulțmea vidă ($\varnothing \Delta X = X$, $X \Delta \varnothing = X$).

OBSERVAȚII

1. Dacă o lege de compoziție are un element neutru, acesta este unic. Într-adevăr: dacă e_1 și e_2 ar fi două elemente neutre, atunci
   • $e_1 * e_2 = e_2$ (e_1 element neutru)
   • $e_1 * e_2 = e_1$ (e_2 element neutru)
   Deducem că $e_1 = e_2$.

2. Există și accepția de element neutru la stânga sau la dreapta
   • $e \in M$ este element neutru la stânga dacă $e * x = x$, $(\forall)\ x \in M$
   • $e' \in M$ este element neutru la stânga dacă $x * e' = x$, $(\forall)\ x \in M$
   Dacă o lege are neutru la stânga și la dreapta, atunci cele două sunt egale (justificați!).

3. Elementul neutru nu se transmite de la o mulțime la orice parte stabilă a ei.

   Exemplu

   Pentru $a \in (0, \infty)$ definim funcția $f_a(x) = \begin{cases} ax, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ și mulțimea $G = \{f_a \mid a \in (0, \infty)\}$.

   G este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ în raport cu compunerea funcțiilor și nu conține $1_{\mathbb{R}}$ (elementul neutru al mulțimii $\mathcal{F}(\mathbb{R})$).

   Într-adevăr: $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = \begin{cases} abx, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$.

   Deci $f_a \circ f_b = f_{a \cdot b} \in G$.
   Compunerea funcțiilor are element neutru pe G, altul decât $1_{\mathbb{R}}$.
   Să analizăm: dacă $e \in (0, \infty)$ și $f_e \in G$ astfel încât $f_e \circ f_a = f_a \circ f_e = f_a$, pentru orice $a \in (0, \infty)$, deducem echivalent $f_a \circ f_e = f_a \Leftrightarrow f_{ae} = f_a \Leftrightarrow ae = a$.
   Deoarece ultima egalitate are loc pentru orice $a \in (0, \infty)$, deducem că $e = 1$.
   Observăm că $f_1 \circ f_a = f_a$, $(\forall)\ a \in (0, \infty)$; deducem că f_1 este elementul neutru al operației de compunere pe G, $f_1(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$.

4. Dacă legea de compoziție are un element neutru e, iar H este parte stabilă a lui M în raport cu legea astfel încât $e \in H$, atunci e este element neutru și pentru legea indusă pe H. Pe seama unei astfel de observații putem remarca mai rapid elementul neutru, în caz că există.

   Exemplu

   Mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{R} \right\}$ parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

   Observăm că $I_2 \in H$ $(x = 1)$, deci I_2 este elementul neutru al înmulțirii pe mulțimea H.

DEFINIŢIA 4

Fie M o mulţime nevidă, $*$ o lege de compoziţie pe M care are elementul neutru e. Elementul $x \in M$ este numit **simetrizabil** în raport cu legea $*$ dacă există $x' \in M$ astfel încât

$$x * x' = x' * x = e.$$

În acest caz x' se numeşte **simetricul** lui x în raport cu legea $*$.

Exemple

1. Orice număr real este simetrizabil în raport cu adunarea.
2. Toate numerele reale, nenule, sunt simetrizabile în raport cu înmulţirea.
3. În raport cu operaţia de compunere a funcţiilor pe mulţimea $\mathcal{F}(E)$, o funcţie este simetrizabilă dacă şi numai dacă este bijectivă. Simetricul unei funcţii f s-a notat f^{-1} (inversa funcţiei f).
4. Matricele pătratice simetrizabile în raport cu înmulţirea din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt matricele nesingulare (care au determinantul nenul).
5. Simetricul matricei A s-a notat A^{-1} (inversa matricei A).

OBSERVAŢII

1. Elementul neutru al oricărei legi este simetrizabil, fiind propriul său simetric.
2. Spre deosebire de elementul neutru, simetricul unui element, dacă există, poate să nu fie unic.

   Exemplu

   Pe mulţimea $\{e, a, b\}$ definim o lege de compoziţie dată prin următoarea tablă:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	a

   Elementul neutru este e; $a * a = e$, $a * b = b * a = e$.
   Rezultă că a este simetrizabil având două simetrice: a şi b.

În cazul operaţiilor asociative, simetricul unui element este unic, aşa cum va rezulta din teorema următoare.

Cu certitudine, tabla anterioară este tabla unei legi neasociative (verificaţi!).

TEOREMA 1

Dacă $\circ$ este lege de compoziție pe mulțimea M, asociativă și cu element neutru, iar $a \in M$ este simetrizabil, atunci simetricul său este unic.

Demonstrație

Fie e elementul neutru.

Presupunem că a are două simetrice, a_1' și a_2'.

Atunci $a \circ a_1' = a_1' \circ a = e$ (1) $\quad a \circ a_2' = a_2' \circ a = e$ (2)

Folosind asociativitatea legii de compoziție avem:

$a_1' = a_1' \circ e = a_1' \circ (a \circ a_2') = (a_1' \circ a) \circ a_2' = e \circ a_2' = a_2'$.

Deducem că $a_1' = a_2'$.

În legătură cu simetrizabilitatea unor elemente avem câteva proprietăți date de următoarea teoremă.

TEOREMA 2

Pe o mulțime M considerăm legea de compoziție $*$, asociativă și cu elementul neutru e. Atunci:

a) Dacă x este simetrizabil, atunci simetricul său x' este de asemenea simetrizabil având ca simetric pe x.

b) Dacă $x, y \in M$ sunt simetrizabile, atunci $x * y$ este simetrizabil. În plus: $(x * y)' = y' * x'$.

Demonstrație

a) Din $x' * x = x * x' = e$, rezultă că x' este simetrizabil.

b) Urmărim definiția: $(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = y' * y = e$. Analog obținem $(x * y) * (y' * x') = e$.
Deci $x * y$ este simetrizabil având ca simetric $y' * x'$, c.c.t.d.

OBSERVAȚII

1. În notație multiplicativă simetricul unui element x se notează x^{-1}, iar în notație aditivă se notează $-x$. În aceste cazuri proprietățile a) și b) din teorema 2 au următoarele transcrieri:

a) $(x^{-1})^{-1} = x$; $-(-x) = x$;

b) $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$; $-(x + y) = (-y) + (-x)$

2. Proprietatea b) din teoremă se extinde de la un număr finit n de elemente.
Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ sunt simetrizabile, atunci $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ este simetrizabil și $(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)' = x_n' * x_{n-1}' * \ldots * x_1'$.
(Demonstrație prin inducție.)

Exerciții rezolvate

1. Fie $M = (-\infty, 1)$ și asocierea $(x, y) \to x * y$, $x * y = \dfrac{xy-2}{x+y-3}$, $(\forall)\ x, y \in M$.

a) Demonstrați că $*$ este lege de compoziție pe M.

b) Deduceți că $\dfrac{xyz-2x-2y-2z+6}{xy+yz+zx-3x-3y-3z+7} < 1$, $(\forall)\ x, y, z \in (-\infty, 1)$.

Rezolvare

a) Demonstrăm că dacă $x, y \in M$, atunci $x * y \in M$.
Avem: $x + y - 3 < 1 + 1 - 3 = -1$, de unde rezultă $x + y - 3 < 0$.
Atunci $x * y < 1 \Leftrightarrow xy - 2 > x + y - 3 \Leftrightarrow xy - x - y + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0$.
Ultima inegalitate este adevărată deoarece $x - 1 < 0$, $y - 1 < 0$.

b) Dacă $x, y, z \in (-\infty, 1)$, atunci, conform cu a), numerele $x * y$ și $(x * y) * z$ aparțin și ele intervalului $(-\infty, 1)$. Mai rămâne să observăm că

$$(x*y)*z = \frac{xy-2}{x+y-3} * z = \frac{\dfrac{xy-2}{x+y-3}\cdot z - 2}{\dfrac{xy-2}{x+y-3} + z - 3} = \frac{xyz-2x-2y-2z+6}{xy+yz+zx-3x-3y-3z+7}.$$

2. Pe mulțimea numerelor reale considerăm legea de compoziție dată prin $x * y = 2xy - 3x - 3y + m$.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $M = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

b) Pentru $m = 6$, demonstrați că legea este asociativă, comutativă, are element neutru și toate elementele lui M sunt simetrizabile.

Rezolvare

a) Știm că pentru orice alegere a numerelor $x, y \in M$, avem și $x * y \in M$,

$x * y \in M \Leftrightarrow x * y \neq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2xy - 3x - 3y + m \neq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 4xy - 6x - 6y + 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-3)(2y-3) + 2m - 12 \neq 0$, $(\forall)\ x, y \neq \dfrac{3}{2}$. Rezultă $2m - 12 = 0$, adică $m = 6$.

b) Legea de compoziție este asociativă $(x * y) * z = x * (y * z)$, $(\forall)\ x, y, z \in M$.
Verificăm egalitatea calculând ambii membri ai săi:
$(x * y) * z = (2xy - 3x - 3y + 6) * z = 2(2xy - 3x - 3y + 6) \cdot z -$
$- 3(2xy - 3x - 3y + 6) - 3z + 6 = 4xyz - 6xz - 6yz - 6xy + 9x + 9y + 9z - 12$.
$x * (y * z) = x * (2yz - 3y - 3z + 6) = 2x(2yz - 3y - 3z + 6) - 3x -$
$- 3(2yz - 3y - 3z + 6) + 6 = 4xyz - 6xz - 6yz - 6xy + 9x + 9y + 9z - 12$.
Cei doi membri sunt egali, deci legea este asociativă.

Pentru comutativitate demonstrăm că $x * y = y * x$, $(\forall)\ x, y \in M$.
Într-adevăr: $y * x = 2yx - 3y - 3x + 6 = 2xy - 3x - 3y + 6$
(Expresia ce defineşte legea este simetrică în raport cu x, y). În fapt, verificarea celor două proprietăţi anterioare s-a bazat pe proprietăţi similare ale operaţiilor de adunare şi înmulţire pe $\mathbb{R}$.
Demonstrăm existenţa elementului neutru, adică demonstrăm că există $e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x$, oricare ar fi $x \in M$ (1)
$x * e = x \Leftrightarrow 2xe - 3x - 3e + 6 = x \Leftrightarrow e(2x - 3) = 2(2x - 3)$.
Ultima egalitate se realizează pentru orice $x \in M$ numai dacă $e = 2$.
Observăm că $2 \in M$ şi apoi, din comutativitatea legii sau prin calcul verificăm şi cealaltă egalitate din (1): $2 * x = x$.
Demonstrăm că orice element $x \in M$ este simetrizabil.
Trebuie să verificăm că există $x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = 2$
$x * x' = 2 \Leftrightarrow 2xx' - 3x - 3x' + 6 = 2 \Leftrightarrow x'(2x - 3) = 3x - 4$.

Deoarece $x \neq \dfrac{3}{2}$, rezultă că $x' = \dfrac{3x-4}{2x-3}$. Avem $\dfrac{3x-4}{2x-3} \neq \dfrac{3}{2}$, prin urmare $x' \in M$.
Verificăm că $x' * x = 2$.

3. Pe intervalul $[2, 4]$ considerăm asocierea $(x, y) \rightarrow x * y = xy - 3x - 3y + 12$.
a) Să se arate că asocierea defineşte o lege de compoziţie pe $[2, 4]$.
b) Să se arate că elgea are element neutru.
c) Să se determine elementele simetrizabile.

Rezolvare

a) Fie $x, y \in [2, 4]$; $x * y \in [2, 4] \Leftrightarrow 2 \leq x * y \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq xy - 3x - 3y + 12 \leq 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 \leq (x - 3)(y - 3) + 3 \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq (x - 3)(y - 3) \leq 1$ (1)
Însă $2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x - \leq 1 \Leftrightarrow |x - 3| \leq 1$ (2)
La fel, $y \in (2, 4) \Leftrightarrow |y - 3| \leq 1$ (3)
Prin înmulţire, din (2) şi (3) rezultă (1).

b) Căutăm $e \in [2, 4]$ a.î. $x * e = e * x = x$, $(\forall)\ x \in [2, 4]$
$x * e = x \Rightarrow xe - 3x - 3e + 12 = x \Leftrightarrow e(x - 3) = 4(x - 3)$ (4)
Ultima egalitate are loc pentru orice $x \in [2, 4]$, rezultă că $e = 4$.
Observăm că $4 \in [2, 4]$ şi $4 * x = x$, $(\forall)\ x \in [2, 4]$.

c) Analizăm care elemente $x \in [2, 4]$ sunt simetrizabile, adică există $x' \in [2, 4]$ astfel încât $x * x' = x' * x = 4$. Reţinem $x * x' = 4 \Leftrightarrow xx' - 3x - 3x' + 12 = 4 \Leftrightarrow x'(x - 3) = 3x - 8$.

Pentru $x \neq 3$ obţinem $x' = \dfrac{3x-8}{x-3}$. Însă $x' \in [2, 4] \Leftrightarrow 2 \leq \dfrac{3x-8}{x-3} \leq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \leq \dfrac{3x-9+1}{x-3} \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq 3 + \dfrac{1}{x-3} \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{1}{x-3} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x-3|} \leq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x - 3| \geq 1 \Leftrightarrow (x - 3 \geq 1 \text{ sau } x - 3 \leq -1) \Leftrightarrow (x \geq 4 \text{ sau } x \leq 2) \Leftrightarrow x \in \{2, 4\}$.
Deoarece $2 * 2 = 4$, rezultă că 2 este simetrizabil.
Singurele elemente simetrizabile sunt 2 şi 4.

4. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și φ operația de compunere a funcțiilor.
Definim funcția $f: A \to A$ prin tabelul

x	1	2	3	4	5
f	2	3	4	5	3

Notăm cu $H = \{f^2, f^3, f^4\}$, unde f^n este compusa lui f cu ea însăși de n ori.
a) Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{F}(A)$ în raport cu φ.
b) Să se studieze proprietățile operației φ*, unde φ* este operația indusă de φ pe H.

Rezolvare

a) Prin calcul se obțin rezultatele consemnate în tabela alăturată:

φ*	f^2	f^3	f^4
f^2	f^4	f^2	f^3
f^3	f^2	f^3	f^4
f^4	f^3	f^4	f^2

b) Deoarece legea φ este sociativă pe $\mathcal{F}(A)$, rezultă că și legea indusă, φ* este asociativă. Din simetria tablei deducem că φ* este comutativă (în timp ce φ nu este comutativă). Elementul neutru al legii φ* este f^3 (remarcați că f^3 este diferit de 1_A, elementul neutru al legii φ).
Toate elementele lui H sunt simetrizabile în raport cu φ*:
$(f^3)' = f^3$; $(f^2)' = f^4$; $(f^4)' = f^2$ (urmăriți tabla!)
Remarcați că niciun element din H nu este simetrizabil în raport cu φ, pentru că funcțiile f^2, f^3, f^4 nu sunt injective.
(Atenție, elementul neutru al lui φ în $\mathcal{F}(A)$ este 1_A, deci simetrizabilitatea este exprimată în mod diferit.)

5. Pe mulțimea $[-1, 1]$ considerăm asocierea

$(x, y) \to x * y = xy - \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}$, $(\forall)\, x, y \in [-1, 1]$.

a) Arătați că asocierea definește o lege de compoziție pe $[-1, 1]$.
b) Demonstrați că legea nu este asociativă și are element neutru.
c) Care sunt elementele simetrizabile?

Rezolvare

a) Fie $x, y \in [-1, 1]$; $x * y \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \le xy - \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1} \le 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1} \le xy + 1 \text{ și } xy - 1 \le \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}\right).$$

Verificați că amândouă inegalitățile sunt adevărate.

b) Considerăm numerele $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ și 0.

$$\left(-\frac{1}{2} * \frac{1}{2}\right) * 0 = (-1) * 0 = 0,\ -\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{2} * 0\right) = -\frac{1}{2} * \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultă că legea nu este asociativă. Din $x * 1 = 1 * x = x$, $(\forall)\, x \in [-1, 1]$ deducem că 1 este element neutru.

c) Fie $x \in [-1, 1]$, $x * x' = 1 \Leftrightarrow xx' - \sqrt{x^2 \cdot (x')^2 - x^2 - (x')^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xx' - 1 = \sqrt{x^2 \cdot (x')^2 - x^2 - (x')^2 + 1}$ (1).

Deoarece $xx' - 1 \leq 0$ egalitatea (1) este echivalentă cu $xx' - 1 = 0$ și

$\sqrt{x^2 \cdot (x')^2 - x^2 - (x')^2 + 1} = 0$.

$xx' - 1 = 0 \Leftrightarrow xx' = 1 \Leftrightarrow (x = 1$ și $x' = 1)$ sau $(x = -1$ și $x' = -1)$.

Perechile (1, 1) și (–1, –1) verifică egalitatea (1). Rezultă că 1 și –1 sunt singurele elemente siemtrizabile.

6. Fie $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se arate că operația de înmulțire a matricelor nu are element neutru la dreapta pe A, dar are o infinitate de elemente neutre la stânga.

Rezolvare

Observăm că înmulțirea matricelor este parte stabilă pe A, deoarece

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bc & bd \end{pmatrix} \in A$, deoarece $bc, bd \in \mathbb{Z}$.

Fie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix}$ element neutru la dreapta.

Atunci $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ $(\forall)\ a, b \in \mathbb{Z}$.

Din $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ be_1 & be_2 \end{pmatrix}$ deducem $\begin{cases} be_1 = a \\ be_2 = b \end{cases}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{Z}$, imposibil de realizat pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$.

Dacă $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e' & e'' \end{pmatrix}$ este neutru la stânga avem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e' & e'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ $(\forall)\ a, b \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e''a = a \\ e''b = b \end{cases}$ $(\forall)\ a, b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow e'' = 1$.

Așadar toate matricele $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e'' & 1 \end{pmatrix}$, $e' \in \mathbb{Z}$, sunt elemente neutre la stânga (în număr infinit).

Comentariu. Dacă o lege de compoziție are element neutru la stânga și la dreapta, atunci cele două sunt egale.

Prin urmare, dacă o lege are cel puțin două elemente neutre la stânga (dreapta) atunci nu are element neutru la dreapta (stânga). Exercițiul confirmă acest fapt.

7. Câte legi de compoziție pot fi definite pe o mulțime cu n elemente?
Câte dintre ele sunt comutative?

Rezolvare

O lege de compoziție pe o mulțime finită poate fi redată prin tabla acestei legi.

O tablă (matrice) cu n^2 elemente poate fi completată cu n elemente în n^{n^2} moduri.

Deci sunt n^{n^2} legi de compoziție. O lege de compoziție este comutativă dacă tabla legii este simetrică față de diagonala principală.

Demonstrăm că numărul legilor de compoziție comutative este $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

	x_1	x_2	x_3	...	x_n
x_1	•	•	•		•
x_1		•	•		•
x_n					•

Într-adevăr pentru a completa tabla unei legi comutative definite pe mulțimea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este suficient să completăm (arbitrar) numai pozițiile marcate în tablă.

Numărul acestor poziții este $n + (n-1) + \dots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Un număr de n elemente se pot așeza pe $\dfrac{n(n+1)}{2}$ poziții în $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ legi de compoziție comutative ce se pot defini pe o mulțime cu n elemente.

8. Pe mulțimea M se consideră legea de compoziție $*$ cu proprietățile:
a) Există $e \in M$ astfel încât $x * e = x$, $(\forall)\, x \in M$;
b) $(x * y) * z = (z * y) * x$, $(\forall)\, x, y, z \in M$.
Demonstrați că legea este comutativă, asociativă și are element neutru.

Rezolvare

Înlocuind y cu e în b) obținem $(x * e) * z = (z * e) * x \Leftrightarrow x * z = z * x$, $(\forall)\, x, z \in M$, deci legea este comutativă.
Din a) deducem $x * e = e * x = x$ $(\forall)\, x \in M$, adică e este element neutru. Pentru asociativitate observăm că $(x * y) * z = (z * y) * x = x * (z * y) = x * (y * z)$.

Exerciții propuse

1. Analizați care dintre asocierile următoare sunt legi de compoziție pe mulțimea M, indicată.

a) Fiecărei perechi de puncte distincte din plan îi asociem mijlocul segmentului determinat de cele două puncte; perechii (A, A) îi asociem punctul A, oricare ar fi punctul A; M este planul geometric.

b) Fiecărei perechi de funcții crescătoare pe $\mathbb{R}$ îi asociem funcția sumă, $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ crescătoare}\}$.

c) Fiecărei perechi de funcții injective îi asociem funcția sumă, $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ injectivă}\}$.

d) Fiecărei perechi de funcții derivabile pe $\mathbb{R}$ îi asociem funcția produs, $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ derivabilă}\}$.

e) $(x, y) \to x * y = xy - x - y + 1$, $(\forall)\, x, y \in (1, \infty)$; $M = (1, \infty)$

f) $(x, y) \to x \circ y = xy - x - y + 2$, $(\forall)\, x, y \in (1, \infty)$; $M = (1, \infty)$

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $*$ prin $x * y = |x| + |y| - |x||y|, (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$. Calculați:
$1 * (-2)$; $(-3) * 0$; $(0 * 2) * (-1)$; $(ab) * b$, $a, b \in \mathbb{R}$; $(a * 2) * 3$;
$(a * b) * c$, $a, b, c > 0$; $a * (b * c)$, $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

3. Pe mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se definește legea $\circ$ prin $(a, b) \circ (c, d) = (ac + ad + bc; bd)$. Calculați:

$(2, 1) \circ (0, 2)$; $((1, 3) \circ (2, 1) \circ (0, 1)$; $(a, b) * \left(\dfrac{-a}{b(a+b)}, \dfrac{1}{b}\right)$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$.

4. Pe mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ definim legea $a * b = c$, unde c este restul împărțirii lui a^b prin 5. Construiți tabla acestei legi și calculați $(2 * 3) * 1$; $(2 * 3) * (3 * 4)$.

5. a) Fie $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ și funcțiile $f_i : E \to E$, $i = \overline{1, 6}$ definite astfel:

$$f_1(x) = x;\ f_2(x) = \frac{1}{x};\ f_3(x) = 1 - x;\ f_4(x) = \frac{1}{1-x};\ f_5(x) = \frac{x-1}{x};\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Arătați că $H = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{F}(E)$ în raport cu operația de compunere alcătuind tabla operației induse pe H.

b) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este parte stabilă finită a mulțimii $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

6. Alcătuiți tablele operațiilor induse pe $\mathcal{R}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de operațiile de adunare și înmulțire modulo 6. Aceeași cerință pentru $\mathcal{R}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cu adunarea și înmulțirea modulo 7.

7. a) Să se arate că $H = (-2, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $\perp$:
$x \perp y = 3xy + 6(x + y) + 10$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.
b) Deduceți că $xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 8 > 0$, $(\forall)\ x, y, z > -2$.

8. Arătați că $x * y = xy - 9(x + y) + 90$ este lege de compoziție pe $[8, 10]$.

9. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ introducem legea de compoziție $\circ$ definită prin $x \circ y = 2xy - x - y + m$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea minimă a lui m pentru care mulțimea $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $\circ$.

10. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se introduce legea $x \circ y = xy - i(x + y) + 1 + i$.
Arătați că $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu $\circ$.

11. a) Determinați părțile stabile finite ale lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea numerelor întregi.
b) Determinați părțile stabile finite în raport cu adunarea numerelor întregi.
c) Dați exemple de părți stabile infinite ale lui $\mathbb{Z}$ cu adunarea.

12. Arătați că următoarele legi sunt asociative:
a) $a \circ b = a + b + ab$, legea fiind definită pe $\mathbb{N}$
b) $x * y = \dfrac{2 - xy}{3 - x - y}$, legea fiind definită pe $(-\infty, 1)$;
c) $x \circ y = x + y + \sqrt{3}$, legea fiind definită pe $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;
d) $A \perp B = AB + 2A + 2B + 2I_3$, definită pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

13. Arătați că următoarele legi de compoziție sunt comutative:
a) $x \circ y = xy - 3x - 3y$, definită pe $\mathbb{Z}$;
b) înmulțirea matricelor, definită pe mulțimea $\left\{ \begin{pmatrix} -x & 2y \\ 3y & -x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$;
c) $x \perp y = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$, definită pe $[-1, 1]$;
d) $x \circ y = 2 + (y - 2)^{\lg(x - 2)}$, definită pe $(2, \infty)$.

14. Arătați că următoarele legi au element neutru:
a) $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, definită pe $\mathbb{Z}$;
b) $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, definită pe $[1, \infty)$;
c) $x \perp y = xy + i(x + y) - 1 - i$, definită pe $\mathbb{C}$;
d) $(x, y) \circ (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$, definită pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

15. Studiați simetrizabilitatea elementelor următoarelor mulțimi în raport cu legile de compoziție precizate:

a) $\left\{\left.\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right| a, b \in \mathbb{R}\right\}$, înmulțirea matricelor; b) $[8, 10]$; $x \circ y = xy - 9x - 9y + 90$;

c) $\mathbb{R}$, $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$; d) $[0, \infty)$, $x \perp y = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$.

16. Dați exemple de legi de compoziție pe $\{0, 1, 2\}$ în care 2 este element neutru. Câte astfel de legi se pot defini?

17. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $*$ definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + xy}$.

a) Calculați $2 * (3 * 4)$; $(2 * 3) * 4$, $a * 0$, $a \in \mathbb{R}$.

b) Este legea asociativă? Dar comutativă?

c) Are operația dată element neutru?

18. Pe mulțimea $\{a, b, c\}$ definim legea de compoziție $*$ prin intermediul tablei alăturate. Stabiliți dacă legea este asociativă, comutativă, are element neutru și (eventual) elemente simetrizabile.

$*$	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

19. Pe mulțimea numerelor complexe definim legea de compoziție $x * y = x + y - xy$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{C}$.

a) Arătați că legea este asociativă, comutativă și are element neutru.

b) Determinați elementele simetrizabile.

c) Calculați $i * i * i * i$; $i * i * i * i * i$.

20. Fie $G = \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ și asocierea $(x, y) \to x * y = \dfrac{4xy + 3}{4(x + y + 1)}$, $(\forall)\, x, y \in G$.

a) Să se arate că $*$ este lege de compoziție pe G.

b) Să se arate că legea este asociativă și comutativă.

c) Are legea element neutru?

21. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $*$ prin $x * y = xy + 2x + 2y + 1$, $(\forall)$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că legea nu este asociativă și nu are element neutru.

22. Demonstrați că asocierea $(x, y) \to x \circ y = \dfrac{3xy}{2xy - 3x - 3y + 9}$ este lege de compoziție pe mulțimea $(0, 3)$.

23. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ introducem legea $x * y = x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că legea este asociativă, comutativă, are element neutru și toate numerele reale sunt simetrizabile în raport cu $*$.

24. Pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definește legea de compoziție $*$ astfel $A * B = AB + BA$, $(\forall)\, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați $(A * B) * B$; $A * (B * B)$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Are legea element neutru?

25. Pe mulţimea $\mathcal{P}(E)$ a submulţimilor mulţimii E considerăm operaţiile de reuniune, intersecţie şi de diferenţă simetrică. Verificaţi proprietăţile acestor operaţii.

26. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \middle| x,\ y \in \mathbb{Q},\ 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$.

a) Arătaţi că M este parte stabilă a mulţimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulţirea matricelor.
b) Determinaţi elementul neutru şi elementele simetrizabile ale înmulţirii pe M.

27. Fie $G = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$ şi legea $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + bc)$.
Studiaţi proprietăţile legii $\circ$.

28. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimea $M = \{(a, b)| \ a, b \in \mathbb{Z}, (a, n) = 1\}$, unde notaţia $(a, n) = 1$ semnifică „*a* şi *n* sunt prime între ele".
a) Dacă $(a, b), (c, d) \in M$ demonstraţi că $(ac, ad + bc) \in M$.
b) Arătaţi că legea de compoziţie $*$, definită pe M prin $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$ este comutativă şi asociativă.
c) Determinaţi elementul neutru şi elementele simetrizabile ale legii $*$.

***29.** Fie $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă. Definim pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ legea de compoziţie $A * B = A \cdot M^{-1} \cdot B, (\forall)\ A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Arătaţi că legea este asociativă şi are element neutru.
b) Determinaţi elementele simetrizabile.

***30.** a) Câte legi de compoziţie cu element neutru se pot defini pe o mulţime cu n elemente?
b) Câte dintre legile de la punctul a) sunt comutative şi au element neutru?

***31.** Pe $\mathbb{Q}^*$ se defineşte legea $*$ cu proprietăţile:
i) $(x * y) \cdot (z * t) = (x \cdot z) * (y \cdot t), (\forall)\ x, y, z, t \in \mathbb{Q}^*$;
ii) $x * x = 1, (\forall)\ x \in \mathbb{Q}^*$;
iii) $x * 1 = x, (\forall)\ x \in \mathbb{Q}^*$.

a) Arătaţi că $8 * 4 = 2$; $27 * 45 = \dfrac{3}{5}$.
b) Arătaţi că $*$ este operaţia de împărţire a numerelor din $\mathbb{Q}^*$.

***32.** Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $*$ prin $x * y = xy + ax + by$.
Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că $(-1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

***33.** a) Fie $H \subset \mathbb{N}$ parte stabilă în raport cu adunarea. Să se arate că dacă $6{,}7 \in H$, atunci $n \in H$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 30$. b) Ce sume de bani pot fi plătite cu monede de 6 şi de 7 unităţi monetare? Dar de 3 şi de 5 unităţi monetare?

***34.** Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi| \ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Dacă $A \subset \mathbb{Z}[i]$ este o parte stabilă a mulţimii $\mathbb{C}$ în raport cu adunarea, iar $\{1, -1, i, -i\} \subset A$, demonstraţi că:
a) $(\forall)\ a \in \mathbb{Z}, a \in A$; b) $(\forall)\ b \in \mathbb{Z}, bi \in A$; c) $A = \mathbb{Z}[i]$.

1.4. Grupuri

Am văzut în paginile anterioare că, făcând abstracție de semnificația concretă a elementelor unei mulțimi, legile de compoziție introduse pe ea pot avea proprietăți comune.

Pot fi concomitent asociative, comutative, cu element neutru etc. Începând cu acest paragraf abordăm studiul structurilor algebrice, adică al mulțimilor înzestrate cu una sau mai multe legi de compoziție care prezintă anumite proprietăți.

Vom studia structurile algebrice de grup, inel și corp.

Structura algebrică de grup este foarte importantă, având în cazul finit numeroase concretizări și aplicații.

DEFINIŢIE

O mulțime nevidă G împreună cu o lege de compoziție $*$, definită pe G, formează o structură numită **grup** dacă legea este asociativă, are element neutru și toate elementele din G sunt simetrizabile.

Dacă, în plus, legea este comutativă, atunci grupul se numește **comutativ (abelian)**.

Elementul neutru al legii de compoziție se numește elementul neutru al grupului.

Exemple

1. Grupuri numerice: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$. Aceste grupuri sunt comutative.

2. $(\mathcal{M}_n, (\mathbb{C}), +)$ este grup comutativ.
$(\mathrm{GL}(\mathbb{C}), \cdot)$ este grup necomutativ, unde $\mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \det A \neq 0\}$.

OBSERVAŢIE

În literatura de specialitate, premergător structurii de grup, este definită structura de monoid.

O mulțime nevidă M, împreună cu legea de compoziție $*$, definită pe M, se numește **monoid** dacă legea de compoziție este asociativă și are element neutru.

Dacă legea este și comutativă, atunci monoidul se numește **comutativ**.

Exemple

1. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ $(\mathbb{C}, \cdot)$ sunt monoizi comutativi.

2. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este monoid necomutativ

3. $(\mathcal{F}(E), \circ)$, card $(E) \geq 3$ este monoid necomutativ.

În exemplele anterioare cel puțin un element al mulțimii este nesimetrizabil. Putem defini grupul ca un caz particular de monoid – acela în care toate elementele sunt simetrizabile.

1.5. Exemple interesante de grupuri

1.5.1. Grupul claselor de resturi modulo n

■ Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

Mulțimea $\{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} \overset{\text{not}}{=} \hat{x}$ se numește clasă de resturi modulo n a numărului întreg x.

Numele de clasă de resturi vine de la faptul că toate elementele mulțimii dau același rest ca și x la împărțirea cu n.

Dacă r este restul împărțirii lui x la n, atunci, din teorema împărțirii cu rest avem:

$$x = nq + r, \text{ unde } q, r \in \mathbb{Z}, 0 \le r < n.$$

Prin urmare: $\hat{x} = \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nq + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + np \mid p \in \mathbb{Z}\} = \hat{r}$.

Deci: $\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}$.

Întrucât la împărțirea cu n resturile posibile sunt 0, 1, 2, …, $n - 1$, deducem că printre clasele de resturi modulo n există n clase distincte, două câte două.

Aceste clase pot fi notate: $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}$.

Notăm de asemenea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$.

Exemplu

Pentru $n = 4$, avem $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$, unde

$\hat{0} = \{0 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{1} = \{1 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{2} = \{2 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{3} = \{3 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, mulțimea claselor de resturi modulo 4.

Convenim să desemnăm clasa oricărui număr întreg prin clasa restului său la împărțirea cu n.

Astfel, pentru $n = 4$, scriem $\hat{0}$ în loc de $\hat{8}$; scriem $\hat{1}$ în loc de $(\widehat{-15})$ etc.

■ Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ introducem două legi de compoziție numite sumă și produs al claselor (notate + și ·)

Dacă $a, b \in \mathbb{Z}_n$, atunci prin definiție

$$\boxed{\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b} \qquad \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}}$$

unde $\oplus$ și $\odot$ sunt adunarea respectiv înmulțirea modulo n a numerelor întregi a și b (vezi paragraful 1.1).

Pentru a aduna clasele $\hat{a}$ și $\hat{b}$, adunăm numerele întregi a și b și calculăm restul împărțirii numărului $a + b$ la n.

Clasa acestui rest este suma claselor a și b.

La fel procedăm la înmulțirea claselor.

Exemple

În $\mathbb{Z}_6$ avem: $\hat{3} + \hat{5} = \widehat{3 \oplus 5} = \hat{2}$, deoarece $(3 + 5)(\text{mod } 6) = 2$

$\hat{3} \cdot \hat{5} = \widehat{3 \odot 5} = \hat{3}$, deoarece $(3 \cdot 5)(\text{mod } 6) = 3$

OBSERVAŢIE

Definiția adunării și înmulțirii modulo n are consistență, în sensul că alegând alți reprezentanți pentru clasele $\hat{a}$ și $\hat{b}$, $a_1 \in \hat{a}$, $b_1 \in \hat{b}$ avem $\hat{a}_1 + \hat{b}_1 = \hat{a} + \hat{b}$; $\hat{a}_1 \cdot \hat{b}_1 = \hat{a} \cdot \hat{b}$.

Teorema următoare evidențiază două structuri algebrice, determinate pe $\mathbb{Z}_n$ de cele două operații definite anterior.

TEOREMĂ

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

1. $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup comutativ (numit grupul aditiv al claselor de resturi).
2. $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid comutativ.
3. Mulțimea elementelor inversabile ale monoidului $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ formează împreună cu înmulțirea claselor de resturi o structură de grup, numit *grupul multiplicativ al claselor de resturi modulo n*.

Demonstrație

1. Verificăm cele patru proprietăți:

a) Adunarea claselor este asociativă

Fie $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_n$. Atunci $(\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \widehat{a \oplus b} + \hat{c} = \widehat{(a \oplus b) \oplus c} \overset{(1)}{=}$

$= \widehat{a \oplus (b \oplus c)} = \hat{a} \oplus (\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c})$.

Egalitatea (1) exprimă asociativitatea legii $\oplus$)

b) Adunarea claselor are elementul neutru $\hat{0}$.

$\hat{a} + \hat{0} = \widehat{a \oplus 0} = \hat{a}$; $\hat{0} + \hat{a} = \widehat{0 \oplus a} = \hat{a}$ (am ținut cont că 0 este element neutru al legii $\oplus$).

c) Orice element $\hat{a}$ este simetrizabil, simetricul său fiind $\widehat{n-a}$. Într-adevăr:

$\hat{a} + \widehat{n-a} = \widehat{a \oplus (n-a)} = \hat{0}$; $\widehat{n-a} + \hat{a} = \widehat{(n-a) \oplus a} = \hat{0}$.

d) Adunarea claselor este comutativă

Într-adevăr: $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b} = \widehat{b \oplus a} = \hat{b} + \hat{a}$ (am ținut cont de comutativitatea legii $\oplus$).

2. Verificăm că sunt îndeplinite proprietățile de monoid.

a) Înmulțirea este asociativă:

$(\hat{a} \cdot \hat{b}) \cdot \hat{c} = \widehat{a \odot b} \cdot \hat{c} = \widehat{(a \odot b) \odot c} = \widehat{a \odot (b \odot c)} = \hat{a} \cdot \widehat{b \odot c} =$

$= \hat{a} \cdot (\hat{b} \cdot \hat{c})$ (am ținut cont de asociativitatea legii $\otimes$ pe $\mathbb{Z}$).

b) În cazul $n = 1$, $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}\}$ și elementul neutru este $\hat{0}$. Dacă $n \geq 2$, demonstrăm că $\hat{1}$ este element neutru al înmulțirii: $\hat{1} \cdot \hat{b} = \widehat{1 \odot b} = \hat{b}$; $\hat{b} \cdot \hat{1} = \widehat{b \odot 1} = \hat{b}$ (1 este element neutru al înmulțirii modulo n pe $\mathbb{Z}$).

c) Înmulțirea claselor este comutativă

$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b} = \widehat{b \odot a} = \hat{b} \cdot \hat{a}$.

3. Demonstrăm că:

> $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este simetrizabil în raport cu înmulțirea claselor dacă și numai dacă $(a, n) = 1$ (a și n sunt prime între ele).

Dacă $n = 1$, atunci $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}\}$, iar $\hat{0}$ este simetrizabil având simetricul $\hat{0}$. Prin convenție $(0, 1) = 1$ și deci echivalența este adevărată.
Dacă $n \geq 2$ avem:

$\Rightarrow$) Considerăm $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ simetrizabil și demonstrăm că $(a, n) = 1$.

Dacă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este simetrizabil, atunci există $\hat{b} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât avem echivalent: $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{1} \Leftrightarrow \widehat{ab} = \hat{1} \Leftrightarrow ab \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow ab - 1 \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow ab - 1 = nq$, $q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow ab - nq = 1 \Leftrightarrow (a, n) = 1$.

$\Leftarrow$) Este cunoscut faptul că $(a, n) = 1 \Leftrightarrow$ există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = ax + ny$. Atunci avem echivalențele:

$(a, n) = 1 \Leftrightarrow 1 = ax + ny \Leftrightarrow ax = 1 - ny \Leftrightarrow ax \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow \hat{a} \cdot \hat{x} = \hat{1}$.

Din comutativitate deducem și $\hat{x} \cdot \hat{a} = \hat{1}$, deci $\hat{a}$ este simetrizabil. Deoarece $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid, deducem că

$U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n \mid \hat{a}$ simetrizabil$\}$ este grup comutativ.

Exemple

$(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este grup comutativ;
$(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ nu este grup, este monoid;
$U(\mathbb{Z}_4) = \{\hat{1}, \hat{3}\}$ (vedeți tabla operației alăturată).

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

1.5.2 Grupul rădăcinilor de ordinul n ale unităţii

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Știm că ecuația $x^n = 1$, are n rădăcini complexe:

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Dacă $U_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ și notăm $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, atunci $U_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, conform formulei lui Moivre.

TEOREMA 2

Mulțimea U_n formează în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe o structură de grup comutativ, numit *grupul rădăcinilor de ordinul n ale unității*.

Demonstraţie Înmulțirea este lege de compoziție pe U_n.
Fie $x, y \in U_n$, atunci $x^n = 1, y^n = 1, (xy)^n = x^n \cdot y^n = 1$, deci $xy \in U_n$.

a) Înmulțirea este asociativă pe U_n, fiind asociativă pe $\mathbb{C}$.

b) Deoarece $1 \in U_n$, rezultă că 1 este elementul neutru al înmulțirii pe U_n.

c) Orice element din U_n este simetrizabil. Într-adevăr, dacă $x \in U_n$, atunci $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n} = 1$, deci $\frac{1}{x} \in U_n$. Rezultă că $x = \varepsilon^k$ este simetrizabil, având simetricul $\frac{1}{x} = \varepsilon^{n-k}$, unde $k = \overline{0, n-1}$.

d) Înmulțirea este comutativă pe U_n deoarece este comutativă pe $\mathbb{C}$.

1.5.3. Grupul permutărilor de grad n

Reamintim că prin *permutare de grad n* înțelegem o funcție bijectivă $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, n \geq 1$.

Mulțimea permutărilor de grad n are $n!$ elemente și se notează prin S_n.

Pe S_n avem o lege de compoziție – compunerea funcțiilor, numită în acest caz compunerea permutărilor.

TEOREMĂ

Mulțimea S_n formează împreună cu operația de compunere a permutărilor o structură de grup, numit *grupul permutărilor de grad n* (sau *grupul simetric de ordin n*).

Dacă $n \geq 3$, atunci S_n este grup necomutativ.

Demonstrație

a) Operația de compunere este asociativă deoarece compunerea funcțiilor este operație asociativă.

b) Fie $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Observăm că $e \circ \sigma = \sigma \circ e = \sigma$, oricare ar fi $\sigma \in S_n$.

c) Orice permutare este simetrizabilă, fiind funcție bijectivă.
Rezultă că $(S_n, \circ)$ este grup.

$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ este evident grup comutativ.

Pentru $n \geq 3$, $(S_n, \circ)$ este necomutativ, după cum se poate constata pe cazuri concrete.

Exemplu

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \sigma, \tau \in S_4.$$

Avem $\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, deci $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

1.5.4. Grupuri de matrice

Am notat cu $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | \det A \neq 0\}$, $GL_n(\mathbb{C})$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

DEFINIȚIE

Se numește **grup de matrice** o mulțime nevidă $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ care îndeplinește condițiile:
a) $(\forall)\ A, B \in G$ avem $AB \in G$
b) $I_n \in G$
c) $(\forall)\ A \in G$ avem $A^{-1} \in G$.

Exemplu

$G = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$, unde A^t este transpusa lui A, este grup de matrice.
Într-adevăr
a) Dacă $A, B \in G$, atunci $(AB)^t = B^t \cdot A^t = B^{-1} \cdot A^{-1} = (AB)^{-1}$, deci $AB \in G$.
b) $I_2^t = I_2^{-1}$ $(=I_2)$, deci $I_2 \in G$.
c) $(A^{-1})^t = (A^t)^t = A = (A^{-1})^{-1}$, deci $A^{-1} \in G$.

1.6. Reguli de calcul într-un grup

Puterile întregi ale unui element

Fie $(G, *)$ un grup cu elementul neutru e și $x \in G$.
Atunci definim puterea cu exponent 0 și puterea cu exponent pozitiv astfel:

$$x^0 = e \text{ și } x^n = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ ori}}$$

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci definim puterea cu exponent negativ astfel:

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} \text{ (simetricul elementului } x^n)$$

Teorema următoare dă câteva proprietăți ale puterilor

TEOREMA 1

Fie $(G, *)$ grup și $x, y \in G$. Atunci:
a) $x^n * x^m = x^{n+m}$ $(\forall)$ $n, m \in \mathbb{Z}$;
b) $(x^n)^m = x^{nm}$ $(\forall)$ $n, m \in \mathbb{Z}$;
c) $x^n * x^m = x^m * x^n$ $(\forall)$ $n, m \in \mathbb{Z}$ (puterile aceluiași element comută);
d) Dacă $x * y = y * x$, atunci $(x * y)^n = x^n * y^n$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstrație

a) $x^n * x^m = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ ori}} * \underbrace{x * x * \ldots * x}_{m \text{ ori}} = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n+m \text{ ori}} = x^{n+m}$

(în cazul $m, n \in \mathbb{N}$)
Dacă $m, n \in \mathbb{Z}$ mai avem cazurile $(n < 0, m \geq 0)$, $(n < 0, m < 0)$, $(n \geq 0, m < 0)$. Demonstrăm egalitatea în primul dintre ele, celelalte demonstrându-se analog. Avem subcazurile:

1) $|m| > |n|$. Putem scrie $m = -n + r$, unde $r > 0$;
deci $x^n * x^m = (x^{-n})^{-1} * x^{-n+r} = (x^{-n})^{-1} * (x^{-n} * x^r) =$
$= [(x^{-n})^{-1} * x^{-n}] * x^r = e * x^r = x^r = x^{n+m}$.

2) $|m| < |n|$ și scriem $m = -n - r$, unde $r \in \mathbb{N}$;
deci $x^n * x^m = (x^{-n})^{-1} * x^{-n-r} = (x^{-n})^{-1} * x^{-n} * x^{-r} =$
$= [(x^{-n})^{-1} * x^{-n}] * x^{-r} = e * x^{-r} = x^{-r} = x^{n+m}$.

b) Dacă $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $(x^n)^m = \underbrace{x^n * x^n * \ldots * x^n}_{m \text{ ori}} = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \cdot m \text{ ori}} = x^{nm}$.

Dacă $m < 0$ și $n \geq 0$, atunci notăm $m = -p$, $p \in \mathbb{N}$, și avem
$(x^n)^m = (x^n)^{-p} = [(x^n)^p]^{-1} = (x^{np})^{-1} = x^{-np} = x^{n(-p)} = x^{nm}$.
Analog tratăm celelalte cazuri: $m \geq 0$, $n < 0$ și $m < 0$, $n < 0$.

c) Rezultă din a) $x^n * x^m = x^{n+m}$; $x^m * x^n = x^{m+n}$.

d) Dacă $n \in \mathbb{N}$, aplicând repetat faptul că x comută cu y obținem

$$(x * y)^n = \underbrace{(x * y) * (x * y) * ... * (x * y)}_{n \text{ ori}} =$$

$$= \underbrace{(x * x * ... * x)}_{n \text{ ori}} * \underbrace{(y * y * ... * y)}_{n \text{ ori}} = x^n * y^n.$$

Dacă $n < 0$, notăm $n = -p$, $p \in \mathbb{N}$.
$(x + y)^n = [(x * y)^p]^{-1} = [x^p * y^p]^{-1} = [y^p * x^p]^{-1} = (x^p)^{-1} * (y^p)^{-1} = x^n * y^n$.

OBSERVAŢIE

Dacă $(M, *)$ este monoid putem defini *numai* puteri naturale, iar proprietățile din teorema 1 au loc numai în cazul $m, n \in \mathbb{N}$.

Reguli de simplificare într-un grup

TEOREMA 2

Fie $(G, *)$ un grup și $x, y, z \in G$. Avem următoarele reguli de simplificare:
$x * y = x * z \Rightarrow y = z$ (simplificare la stânga)
$y * x = z * x \Rightarrow y = z$ (simplificare la dreapta)

Demonstraţie Fie x' simetricul lui x; avem
$y = e * y = (x' * x) * y = x' * (x * y) = x' * (x * z) = (x' * x) * z = e * z = z$.
Analog se demonstrează regula de simplificare la dreapta.

OBSERVAŢII

1. Regulile de mai sus sunt valabile și într-un monoid *numai* dacă elementul x este *simetrizabil*. Altfel, putem întâlni situația din monoidul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \circ)$, cu

$$X, Y, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X \cdot Y = X \cdot Z = 0$, dar $Y \neq Z$.
Simplificarea nu poate fi aplicată deoarece X nu este simetrizabil.

2. Într-un grup orice ecuație de forma $a * x = b$ sau $x * a = b$, are soluție unică.
Într-adevăr, dacă a' este simetricul lui a, atunci
$a * x = b \Leftrightarrow a * x = a * (a' * b) \Leftrightarrow x = a' * b$
Analog $x * a = b \Leftrightarrow x = b * a'$

Exerciții rezolvate

1. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se arate că:

a) M este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor;
b) $(M, \cdot)$ este monoid comutativ. Care sunt elementele inversabile ale monoidului?

Rezolvare

a) Fie $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}$. $A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \in M.$

b) Verificăm îndeplinirea proprietăților de monoid.
Înmulțirea este asociativă pe M (fiind asociativă pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$).
Observăm că $I_3 \in M$, deci matricea unitate este elementul neutru.
$A_2 \cdot A_1 = A_1 \cdot A_2$ (înmulțirea este comutativă pe M)
Matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ este simetrizabilă dacă există $A' = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} \in M$ astfel încât $A \cdot A' = I_3$. Rezultă din identificare $aa' = 1$; $bb' = 1$; $cc' = 1$.
Deoarece $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Z}$ rezultă că ele nu pot fi decât elemente ale mulțimii $\{-1, 1\}$.
Deoarece fiecare poziție a diagonalei principale din A poate fi completată în două moduri, rezultă că avem opt posibilități de alegere a matricei A. Prin urmare monoidul M are 8 elemente simetrizabile. Enumerați-le!

2. Fie $G = (1, \infty)$ și $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$, $(\forall)\ x, y \in G$.
a) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.
b) Să se calculeze x_*^n (steluța cere să faceți distincția) între puterile lui x în $(G, *)$, respectiv în $(\mathbb{R}^*, \cdot)$).

Rezolvare

a) $*$ este lege de compoziție pe G întrucât dacă $x, y > 1$ atunci $x * y > 1$, după cum se poate observa în continuare:

$$x*y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2} = \sqrt{x^2 - y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1} = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1} > 1.$$

Verificăm că $*$ este asociativă; fie $x, y, z \in G$.

$$(x * y) * z = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1} = \sqrt{\left[(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1 - 1\right](z^2 - 1) + 1} =$$
$$= \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) + 1}$$

$x * (y * z) = x * \sqrt{(y^2-1)(z^2-1)+1} = \sqrt{(x^2-1)[(y^2-1)(z^2-1)+1-1]+1} =$

$= \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+1}$

Deci $(x * y) * z = x * (y * z)$

Verificăm că $*$ este comutativă; fie $x, y \in G$.

$y * x = \sqrt{y^2x^2 - y^2 - x^2 + 2} = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} = x * y.$

Căutăm elementul neutru e. Din condiția $e * x = x * e = x$, oricare ar fi $x \in G$, datorită comutativității este suficient să reținem $e * x = x$.

$e * x = x \Leftrightarrow \sqrt{e^2x^2 - e^2 - x^2 + 2} = x \Leftrightarrow e^2x^2 - e^2 - x^2 + 2 = x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^2(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1)$

Ultima egalitate este adevărată pentru orice $x \in G$ numai dacă $e^2 = 2$, adică $e = \sqrt{2}$.

Cum $\sqrt{2} > 1$, deducem că elementul neutru al legii este $\sqrt{2}$.

Verificăm că toate elementele lui G sunt simetrizabile.

Arătăm că pentru $x \in G$ există $x' \in G$ cu proprietatea $x * x' = x' * x = \sqrt{2}$.

$x * x' = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 \cdot x'^2 - x^2 - x'^2 + 2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 \cdot x'^2 - x^2 - x'^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'^2(x^2 - 1) = x^2 \Leftrightarrow x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Observăm că $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 1$, deci $x' \in G$.

Din comutativitate avem $x' * x = \sqrt{2}$, deci x este simetrizabil.

b) Avem $x * x = \sqrt{(x^2-1)^2+1}$; $x * x * x = \sqrt{(x^2-1)^3+1}$.

Demonstrăm prin inducție că $x_*^n = \sqrt{(x^2-1)^n+1}$. Verificați!

3. Pe o mulțime G este definită legea de compoziție $*$, asociativă și cu proprietățile:

a) Există $e \in G$ astfel încât $e * x = x$, $(\forall)\, x \in G$.

b) $(\forall)\, x \in G\ (\exists)\, x' \in G$ astfel încât $x' * x = e$.

Demonstrați că G este grup

Rezolvare

Arătăm că x' are proprietatea $x * x' = e$.

Deoarece $x' \in G$, conform cu b) există $x'' \in G$ astfel încât $x'' * x' = e$.

Atunci $x * x' = e * (x * x') = (x'' * x') * (x * x') = x'' * (x' * x) * x' =$
$= x'' * e * x' = x'' * x' = e.$

Arătăm că e este neutru și la dreapta.

$x * e = x * (x' * x) = (x * x') * x = e * x = x.$

Comentariu. Exercițiul arată că în cazul când pe o mulțime G este dată o lege $*$ asociativă, pentru a demonstra că $(G, *)$ este grup este *suficient* să verificăm că legea are *numai* neutru la stânga și toate elementele sunt simetrizabile la stânga.
Întrucât nu figurează ca teoremă cerută de programa școlară, el nu poate fi folosit în redactări de soluții ale unor exerciții precum exercițiul 2.
Rămâne însă un rezultat teoretic interesant.
De asemenea, există un rezultat „dual" cu proprietăți de neutru și simetrizabil la dreapta (reformulați exercițiul și demonstrați-l asemănător).

4. Demonstrați că dacă $H \subset S_n$, $H \neq \varnothing$ este parte stabilă a lui S_n în raport cu compunerea permutărilor, atunci
a) $e \in H$; b) $(\forall)\ \sigma \in H$ avem $\sigma^{-1} \in H$.

Rezolvare

Fixăm $\sigma \in H$ o permutare oarecare și definim funcția $f_\sigma: H \to H$, $f_\sigma(x) = \sigma \circ x$.
Deoarece H este parte stabilă a lui S_n avem $\sigma \circ x \in H$, deci f_σ este corect definită.
Arătăm că f_σ este surjectivă.
Deoarece H este finită, este suficient să arătăm că este injectivă (!)
Într-adevăr: $f_\sigma(x_1) = f_\sigma(x_2) \Leftrightarrow \sigma \circ x_1 = \sigma \circ x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (simplificare la stânga).
Demonstrăm cerințele:
a) Pentru $\sigma \in H$, deoarece f_σ este surjectivă, rezultă că $(\exists) \in H$ astfel încât $f_\sigma(y) = \sigma$, adică $\sigma \circ y = \sigma \Leftrightarrow y = e$, deci $e \in H$.
b) Folosind încă o dată surjectivitatea lui f_σ, obținem că există $z \in H$ astfel încât $f_\sigma(z) = e \Leftrightarrow \sigma \circ z = e \Leftrightarrow z = \sigma^{-1}$, deci $\sigma^{-1} \in H$, c.c.d.t..

5. Fie $M = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 2(1-a) \\ a-1 & 2a-1 \end{pmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{R}^* \right\}$. Arătați că $(M, \cdot)$ este grup de matrice.

Rezolvare

$\det M(a) = (2 - a)(2a - 1) + 2(a - 1)^2 = 4a - 2 - 2a^2 + a + 2a^2 - 4a + 2 = a \neq 0$.
Rezultă că $G \subset GL_2(\mathbb{C})$.
$M(a) \cdot M(b) = M(a \cdot b) \in G$ (verificați!).
Observăm că $I_2 \in G$ (în cazul $a = 1$).

$(M(a))^{-1} = M\left(\dfrac{1}{a}\right) \in G$.

Într-adevăr: $M(a) \cdot M(a') = I_2 \Leftrightarrow M(a) \cdot M(a') = M(1) \Leftrightarrow M(aa') = M(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M(aa') = M(1) \Leftrightarrow aa' = 1 \Leftrightarrow a' = \dfrac{1}{a}$.

Verificăm că $M\left(\dfrac{1}{a}\right) \cdot M(a) = I_2$ și deducem că $M(a)$ este inversabilă, având inversa $M\left(\dfrac{1}{a}\right) \in G$.

6. Fie $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a\in(0,\infty)\right\}$. Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup, dar nu grup de matrice.

Rezolvare

Fie $G(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, $G(b)=\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ aparținând G.

Avem $G(a)\cdot G(b)=\begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}=M(2ab)\in G.$

Evident, înmulțirea matricelor este asociativă și comutativă. Observăm că $I_3\notin G$, deci G ar putea avea alt element neutru, care trebuie căutat.
Din $G(a)\cdot G(e)=G(a)$ deducem $G(2ae)=G(a)\Leftrightarrow 2ae=a$, pentru orice $a>0\Leftrightarrow$ $e=\frac{1}{2}>0$; $G\left(\frac{1}{2}\right)\cdot G(a)=G\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\right)=G(a)$, deci $G\left(\frac{1}{2}\right)$ este elementul neutru.

$G(a)\cdot G(a')=G\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow G(2aa')=G\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow 2aa'=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a'=\frac{1}{4a}>0$

$G\left(\frac{1}{4a}\right)G(a)=G\left(2\cdot\frac{1}{4a}\cdot a\right)=G\left(\frac{1}{2}\right).$

Rezultă că $G(a)$ este simetrizabilă, având simetrica $G\left(\frac{1}{4a}\right)$.

$(G,\cdot)$ nu este grup de matrice pentru că determinantul oricărei matrice din G este 0 (sau observăm că $I_2\notin G$).

7. a) Determinați simetricul lui $\widehat{17}$ în $(\mathbb{Z}_{200},\cdot)$

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care $(\hat{5})^{-1}=\hat{5}$ $(\forall)\, n\geq 6$.

Rezolvare

a) $\widehat{17}\cdot\hat{a}=\hat{1}\Leftrightarrow 17a\equiv 1 \pmod{200}\Leftrightarrow 17a=1+200q,\ q\in\mathbb{Z}.$

Din ultima egalitate scoatem $a=\frac{1+200q}{17}=\frac{17\cdot 12q-4q+1}{17}=12q-\frac{4q-1}{17}\in\mathbb{Z}\,(1).$

Rezultă $4q-1=17k\Leftrightarrow q=\frac{17k+1}{4}=\frac{16k+k+1}{4}=4k+\frac{k+1}{4}\in\mathbb{Z}\,(2).$

Rezultă $k+1=4m$, $m\in\mathbb{Z}$, de unde $k=4m-1$, $q\overset{(2)}{=}4(4m-1)+m=17m-4$, iar

$a\overset{(1)}{=}12(17m-4)-(4m-1)=200m-47=200m-200+153=200(m-1)+153.$

Rezultă că $\hat{a}=\widehat{153}$, deci $(\widehat{17})^{-1}=\widehat{153}$.

b) $(\hat{5})^{-1} = \hat{5} \Leftrightarrow \hat{5} \cdot \hat{5} = \hat{1} \Leftrightarrow 25 \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow 25 = 1 + nq,\ q \in \mathbb{Z}$.
Prin urmare, $n \in \{6, 8, 12, 24\}$. Verificați că $(\hat{5})^{-1} = \hat{5}$ în $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{24}$.

OBSERVAŢIE

Se poate demonstra că numai în monoizii $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_{24}, \cdot)$ simetricul fiecărui element simetrizabil este el însuși.

8. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{12}$ ecuațiile: a) $\hat{5}x = \hat{4}$; b) $\hat{3}x = \hat{8}$; c) $\hat{2}x = \widehat{10}$.

Rezolvare

a) Deoarece $\hat{5}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_{12}$, rezultă că ecuația are soluția unică $x = (\hat{5})^{-1} \cdot \hat{4} = \hat{8}$
b) $\hat{3} \cdot x = \hat{8} \Leftrightarrow 3x \equiv 8 \pmod{12} \Leftrightarrow 3x = 8 + 12k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ultima egalitate este imposibilă, deoarece 8 nu este multiplu de 3.
c) Procedând ca la punctul b) sau examinând tabla înmulțirii pe $\mathbb{Z}_{12}$ obținem două soluții, $x = \hat{5}$ și $x = \widehat{11}$.

OBSERVAŢIE

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, în legătură cu ecuația $\hat{a}x = \hat{b}$, $x \in \mathbb{Z}_n$, $a, b \in \mathbb{Z}$ se pot demonstra următoarele:
1) Dacă $(a, n) = 1$, atunci ecuația are soluție unică, $x = (\hat{a})^{-1} \cdot \hat{b}$.
2) Dacă $(a, n) \neq 1$, fie $(a, n) = d$. Atunci
   a) dacă d nu divide b, atunci ecuația *nu are soluții*.
   b) Dacă d divide b și $\frac{n}{d} = n_1$, atunci ecuația are d soluții:
   $\widehat{x_0}$, $\widehat{x_0 + n_1}$, $\widehat{x_0 + 2n_1}$, ..., $\widehat{x_0 + (d-1)n_1}$, unde x_0 este o soluție oarecare.

9. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu legea notată multiplicativ, iar elementul neutru notat e.
a) Demonstrați că dacă pentru orice $x, y \in G$ avem $(x \cdot y)^5 = x^5 \cdot y^5$; $(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$ și $(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$, atunci grupul este comutativ.
b) Dacă $x^2 = y^6 = e$ și $x \cdot y = y^4 \cdot x$ atunci $y^3 = e$ și $x \cdot y = y \cdot x$.

Rezolvare

a) $(x \cdot y)^5 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x^5 \cdot y^5$
Simplificând la stânga prin x și la dreapta prin y obținem
$(y \cdot x) \cdot (y \cdot x) \cdot (y \cdot x) \cdot (y \cdot x) = x^4 \cdot y^4$.
Rezultă $(y \cdot x)^4 = (xy)^4$ (1)
Analog din $(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$, deducem $(y \cdot x)^3 = (xy)^3$ (2)
În (1) $\Leftrightarrow (y \cdot x)^3 \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y)^3 \cdot (x \cdot y)$, de unde, prin simplificare obținem $y \cdot x = x \cdot y$.
b) Deducem succesiv:
$(x \cdot y)^2 = x \cdot y \cdot x \cdot y = y^4 \cdot x \cdot x \cdot y = y^4 \cdot e \cdot y = y^5$
$(x \cdot y)^3 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y)^2 = (x \cdot y) \cdot y^5 = x \cdot y^6 = x \cdot e = x$
$(x \cdot y)^6 = ((x \cdot y)^3)^2 = x^2 = e$
Însă $(x \cdot y)^6 = ((x \cdot y)^2)^3 = (y^5)^3 = y^{15}$. Deducem $y^{15} = e$.
Dar $y^{15} = y^6 \cdot y^6 \cdot y^3 = y^3$, deci $y^3 = e$ și imediat $x \cdot y = y^4 \cdot x = y \cdot x$.

Exerciţii propuse

1. Arătaţi în fiecare dintre cazurile următoare că M cu legea menţionată determină o structură de monoid.

a) $M = \mathbb{Z}$ şi $x * y = -xy + x + y$;

b) $M = [2, \infty)$ şi $x * y = xy - 2x - 2y + 6$;

c) $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$.

2. Arătaţi în fiecare dintre cazurile următoare că G cu legea menţionată formează o structură de grup. Precizaţi dacă grupul este comutativ.

a) $G = (3, \infty)$ şi $x * y = xy - 3x - 3y + 12$;

b) $G = (0, 2)$, $x \circ y = \dfrac{xy}{xy - x - y + 2}$;

c) $G = (1, \infty) \setminus \{2\}$, $x * y = (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} + 1$;

d) $G = \{f_n : (2, \infty), f_n(x) = 2 + (x - 2)^{2^n}, n \in \mathbb{Z}\}$, compunerea funcţiilor;

e) $G = \{f : \mathbb{R} \to (0, \infty) \mid f \text{ continuă}\}$, înmulţirea funcţiilor;

f) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$; $(x, y, z) * (x', y', z') = (xx', yy', zx' + yz')$;

g) $G = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$; $z_1 * z_2 = z_1 \cdot z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$;

h) $G = \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$; $x \circ y = ixy - 2x - 2y - 6i$;

i) $G = \mathbb{R}$, $x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$;

j) $G = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{Q} \right\}$, adunarea matricelor;

k) $G = \left\{ \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$, înmulţirea matricelor.

3. Care dintre următoarele grupuri sunt grupuri de matrice?

a) $\mathcal{M} = \left\{ D_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{Z} \right\}$ cu înmulţirea matricelor;

b) $SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ cu înmulţirea matricelor;

c) $\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$, cu înmulţirea matricelor.

4. a) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \top y = ax + by$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\mathcal{M}, \top)$ să fie grup.

b) Pe mulţimea $G = (-1, 1)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{ax + by}{1 + xy}$, $x, y \in (-1, 1)$. Să se arate că $(G, *)$ este grup $\Leftrightarrow a = b = 1$.

c) Determinați $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compozție $x * y = xy - 3x - 3y + \alpha$ să determine pe $(3, \infty)$ o structură de grup.

5. Fie $(G, \cdot)$ grup și $a, b \in G$ astfel încât $a \cdot b = b \cdot a$.
Demonstrați că $a^m \cdot b^n = b^n \cdot a^m$, $(\forall)\ m, n \in \mathbb{Z}$.

6. Fie $(G, *)$ un grup comutativ și $a \in G$. Pe G definim legea $x \perp y = x * y * a$, $(\forall)\ x, y \in G$.
Arătați că $(G, \perp)$ este grup comutativ.

7. Se consideră permutările $p, q \in S_5$, $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $p^6 = e$ și calculați p^{123}, p^{-1} p^{-38}.
b) Calculați q^{-1}, q^{57}, q^{-15}.
c) Rezolvați în S_5 ecuațiile: $p \cdot x = q$, $p \cdot x \cdot q = p \cdot q$.

8. Rezolvați în $\mathbb{Z}_8$ ecuațiile:

a) $\hat{5}x = \hat{3}$; b) $\hat{2}x = \hat{4}$; c) $\hat{3}x = \hat{0}$; d) $\hat{4}x = \hat{3}$; e) $\hat{4}x = \hat{4}$.

***

9. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x * y = xy + x + y + 2$.
Arătați că $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este monoid și precizați elementele simetrizabile.

10. Fie X o mulțime nevidă. Notăm $I(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ injectivă}\}$ și $S(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ surjectivă}\}$. Arătați că $(I(X), \circ)$ și $(S(X), \circ)$ sunt monoizi necomutativi. Precizați care sunt elementele simetrizabile ale fiecărui monoid.

11. Să se arate că înmulțirea modulo n determină pe $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ o structură de monoid comutativ. Care sunt elementele simetrizabile?

12. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea: $x * y = xy - x - y$. Fie H o parte stabilă finită a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea $*$ și $a \in H$ cel mai mare element al mulțimii.
a) Arătați că $a \in \{0, 1, 2, 3\}$.
b) În cazul $a = 0$, arătați că $(H, *)$ este grup.

13. Fie $z_0 \in \mathbb{C}^*$ fixat și mulțimea $M_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + z_0| = |z| + |z_0|\}$.
Demonstrați că $(M_{z_0}, +)$ este monoid și nu este grup.

14. Fie $n \geq 2$ un număr natural.

Să se arate că mulțimea $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{C},\ A^n = I_2 \right\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor. Câte elemente are grupul?

15. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $G_a = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & ax^2+2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Z} \right\}$ împreună cu înmulțirea matricelor să formeze o structură de grup. Aflați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât suma elementelor matricei $(A(x))^{-1}$ să fie egală cu 0.

16. Fie $x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $M_x = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & x & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}$.

Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $(M_x, \cdot)$ să fie grup.

17. Pe mulțimea $G = [0, 1)$ se introduce legea de compoziție $*$ definită prin $x * y = \{x + y\}$ (partea fracționară a lui $x + y$). Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

18. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{40}$ ecuațiile: a) $\hat{3}x = \hat{2}$; b) $\hat{5}x = \hat{3}$; c) $\hat{6}x = \widehat{10}$.

19. Fie $A, B \in \mathcal{P}(M)$, unde M este o mulțime nevidă. Rezolvați ecuația $A \,\Delta\, X = B$ (Δ este diferența simetrică).

20. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $x \in S_5$ astfel încât $\sigma \circ x = x \circ \sigma$.
b) Rezolvați ecuațiile: a) $x^2 = \sigma$; b) $x^2 = \sigma^{-1}$, $x \in S_5$.

21. Fie $(G, \cdot)$ un grup și a un element astfel încât $a \notin G$. Notăm $G \cup \{a\} = M$.

Definim $x * y = \begin{cases} x \cdot y, & x, y \in G \\ a, & x = a \text{ sau } y = a \end{cases}$

Să se arate că $(M, *)$ este monoid și $U(M) = G$, unde $U(M)$ este mulțimea elementelor simetrizabile ale lui M.

22. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e.
Determinați $x, y \in G$ știind că $x^2y = yx$ și $x^8 = e$.

23. Se dă funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 3z - 4\bar{z}$.
a) Să se arate că f este bijectivă.
b) Determinați funcțiile $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ astfel încât $f(g(z)) = 2z - 1$ și $h(f(z)) = z + 2\bar{z}$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$.

1.7. Morfisme şi izomorfisme de grupuri

Prin definițiile și teoremele următoare vom vedea cum putem identifica două structuri algebrice de grup.

DEFINIŢIA 1

Fie $(G, \circ)$ și $(G', *)$ două grupuri. O funcție $f: G \to G'$ cu proprietatea

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y)\ (\forall)\ x, y \in G$$

se numește **morfism** de grupuri.

Exemple

1. Funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ este un morfism între grupurile $((0, \infty), \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$. Într-adevăr: $f(xy) = f(x) + f(y)$ (proprietate a logaritmilor).

2. Funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, f(z) = \mathrm{Re} z$ (partea reală a lui z) este morfism al grupurilor $(\mathbb{C}, +)$ și $(\mathbb{R}, +)$.
Într-adevăr: $f(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2 = f(z_1) + f(z_2)$. Evidențiem în continuare câteva proprietăți ale morfismelor.

TEOREMA 1

Fie $(G, *)$ și $(G', \circ)$ două grupuri cu elementele neutre e respectiv e' și $f: G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci

a) $f(e) = e'$

b) $f(x') = (f(x))'$, $(\forall)\ x \in G$, unde x' este simetricul lui x în G, iar $(f(x)')$ este simetricul lui $f(x)$ în G'.

c) $f(x^n) = (f(x))^n$, $(\forall)\ x \in G$, $(\forall)\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstrație

a) Avem $f(e) = f(e * e) = f(e) \circ f(e)$. Simplificând cu $f(e)$ în grupul G' obținem $f(e) = e'$.

b) Pentru orice $x \in G$ avem $e' = f(e) = f(x * x') = f(x) \circ f(x')$ (1)
$e' = f(e) = f(x' * x) = f(x') \circ f(x)$ (2)
Din (1) și (2) deducem că $f(x)$ este inversabil având inversul $f(x')$ adică $(f(x))' = f(x')$.

c) Pentru $n = 0$ egalitatea cerută revine la $f(e) = e'$ (punctul a). Pentru $n > 0$ avem: $f(x^n) = f(\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) * f(x) * \ldots * f(x)}_{n \text{ ori}} = (f(x))^n$.

Dacă $n < 0$, fie $m \in \mathbb{N}$, $n = -m$.
Atunci $f(x^n) = f(x^{-m}) = f((x')^m) = (f(x'))^m = ((f(x)')^m = (f(x))^{-m} = (f(x))^n$, c.c.t.d.

OBSERVAȚIE

Între două grupuri există cel puțin un morfism. În notațiile teormei 1, funcția $f: G \to G'$, $f(x) = e'$ $(\forall) x \in G$ este morfism de grupuri. Într-adevăr $f(x * y) = e'$; $f(x) \circ f(y) = e' \circ e' = e'$, deci $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$. Acest morfism constant este numit morfismul banal.

TEOREMA 2

Fie $(G, *)$, $(G', \circ)$ și $(G'', \cdot)$ trei grupuri, iar $f: G \to G'$, $g: G' \to G''$ două morfisme de grup. Atunci $g \circ f$ este morfism de grupuri.

Demonstrație Fie $x, y \in G$. Avem $(g \circ f)(x * y) = g(f(x * y)) = g(f(x) \circ f(g)) =$
$= g(f(x)), \ g(f(y)) = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y)$

TEOREMA 3

Fie $(G, *)$ și $(G', \circ)$ două grupuri și $f: G \to G'$ morfism de grupuri.
Dacă f este inversabilă, atunci $f^{-1}: G' \to G$ este un morfism de grupuri.

Demonstrație Pentru orice $\alpha, \beta \in C'$ avem $\alpha \circ \beta = f(f^{-1}(\alpha)) \circ f(f^{-1}(\beta)) =$
$= f(f^{-1}(\alpha) \ * f(f^{-1}(\beta))$.
Rezultă $f^{-1}(\alpha \circ \beta) = f^{-1}(\alpha) * f^{-1}(\beta)$.

DEFINIȚIA 2

Fie $(G, *)$ și $(G', \circ)$ două grupuri.
Funcția $f: G \to G'$ se numește **izomorfism** de grupuri dacă
a) f este bijectivă;
b) f este morfism de grupuri.

Spunem în acest caz că grupurile $(G, *)$ și $(G', \circ)$ sunt *izomorfe*, notând $(G, *) \approx (G', \circ)$.
Un izomorfism de la un grup la el însuși se numește *automorfism*.

Exemple de izomorfisme

1. Funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, este un izomorfism al grupurilor $((0, \infty), \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$ deoarece f este bijectivă și $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$.
2. Funcția $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = -x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}, +)$ deoarece g este bijectivă și $g(x + y) = g(x) + g(y)$.
3. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ este un izomorfism al grupurilor $(\mathbb{R}, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$ unde legea $*$ este dată prin $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Avem $f(x * y) = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$, iar f este, evident, bijecție.

OBSERVAȚII

- Relația de izomorfism „≈" între două grupuri are următoarele proprietăți:
  a) este reflexivă: $(G, *) \approx (G, *)$ (grupul este izomorf cu el însuși)
  b) este simetrică: dacă $(G, *) \approx (G', \circ)$, atunci $(G', \circ) \approx (G, *)$.
  c) este tranzitivă: dacă $(G, *) \approx (G', \circ)$ și $(G', \circ) \approx (G'', \cdot)$, atunci $(G, *) \approx (G'', \cdot)$.
  Cele trei proprietăți se deduc imediat din teoremele 3 și 2 și sunt foarte utile în rezolvarea unor probleme.

  Exemplu

  Să arătăm că grupul $(G, *)$ unde $G = (3, \infty)$ și $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$.
  Este mai ușor să probăm că grupul $(G, *)$ este izomorf cu $((0, \infty), \cdot)$ și este suficient deoarece $((0, \infty), \cdot) \approx (\mathbb{R}, +)$ (izomorfism evident, vezi exemplul 1).
  Într-adevăr: funcția $f : (0, \infty) \to (3, \infty)$, $f(x) = x + 3$, este evident bijectivă, iar $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ (verificați!)
  Așadar: $(G, *) \approx ((0, \infty), \cdot)$ și $((0, \infty), \cdot) \approx (\mathbb{R}, +)$, deci $(G, *) \approx (\mathbb{R}, +)$.

- Două grupuri care au același număr (finit) de elemente sunt izomorfe dacă tablele legilor lor sunt la fel structurate (organizate). Acest lucru se realizează când fiecare element al unui grup și imaginea sa printr-o funcție bijectivă ocupă aceleași poziții în cele două table.

  Exemplu

  Considerăm grupurile $(U_4, \cdot)$, $U_4 = \{1, i, i^2, i^3\}$ și $(\mathbb{Z}_4, +)$, $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$.
  Observați tablele legilor

$\cdot$	1	i	i^2	i^3
1	1	i	i^2	i^3
i	i	i^2	i^3	1
i^2	i^2	i^3	1	i
i^3	i^3	1	i	i^2

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

  Remarcăm că elementele (1 și $\hat{0}$), (i și $\hat{1}$), (i^2 și $\hat{2}$), (i^3 și $\hat{3}$) ocupă același locuri în tablele grupurilor lor.
  Rezultă că $(U_4, \cdot) \approx (\mathbb{Z}_4, +)$ un izomorfism fiind dat de funcția $f : U_4 \to \mathbb{Z}_4$,
  $f(1) = \hat{0}, f(i) = \hat{1}, f(i^2) = \hat{2}, f(i^3) = \hat{3}$.

- Dacă o anumită proprietate a elementelor unui grup nu caracterizează și elementele altui grup, atunci cele două grupuri *nu sunt izomorfe*.

  Exemplu

  Grupul $(S_3, \circ)$ este necomutativ $(\mathbb{Z}_6, +)$ este comutativ, deci $(S_3, \circ) \not\approx (\mathbb{Z}_6, +)$.

Comentariu

Două grupuri izomorfe au aceleași proprietăți, deci, practic, din punct de vedere al structurilor lor algebrice, sunt identice.

Două grupuri izomorfe diferă numai prin natura elementelor din care se compun.

Din acest punct de vedere, a recunoaşte un anume grup presupune evidenţierea altui grup, din cele cunoscute („clasice“), izomorf cu acesta. Acest fapt constituie un mare avantaj, putând fi valorificat în identificarea anumitor proprietăți, efectuarea unor calcule etc.

Exerciții rezolvate

1. Mulțimea $M = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ împreună cu legea $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$ este grup. (verificați!)

Să arătăm că $(M, \circ) \approx (\mathbb{R}^*, \cdot)$ și să determinăm părțile stabile finite ale lui M în raport cu legea $\circ$.

Rezolvare

$(M, *)$ este un grup cu elementul neutru 2.

Căutăm o funcție $f : M \to \mathbb{R}^*$, de forma $f(x) = ax + b$ pentru care $f(2) = 1$ și $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

Obținem $a = 2$, $b = -3$ și $f(x) = 2x - 3$. Funcția este evident bijectivă și se poate verifica ușor că este morfism de grupuri, adică $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$.
Să observăm că dacă A este parte stabilă a lui $\mathbb{R}^*$ în raport cu înmulțirea, atunci $f^{-1}(A)$ este parte stabilă a lui M în raport cu legea (remarcă valabilă pe cazul general).
Într-adevăr: fie $x, y \in f^{-1}(A)$, $x \circ y = f^{-1}(f(x) \circ f^{-1}(f(y)) = f^{-1}(f(x) \circ f(y)) \in f^{-1}(A)$, deoarece $f(x), f(y) \in A$, deci $f(x) \cdot f(y) \in A$.
Pentru că $\{1\}$ și $\{-1, 1\}$ sunt singurele (!) părți stabile finite ale mulțimii $\mathbb{R}^*$ în raport cu înmulțirea, rezultă că $f^{-1}(\{1\})$ și $f^{-1}(\{-1, 1\})$ sunt singurele părți stabile finite ale mulțimii M în raport cu $\circ$. Cum $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$, avem $f^{-1}(\{1\}) = \{2\}$; $f^{-1}(\{-1, 1\}) = \{1, 2\}$.

2. Mulțimea $G = (-1, 1)$, împreună cu legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, determină o structură de grup (verificați).
Să arătăm că $(G, *)$ este izomorf cu grupul $((0, \infty), \cdot)$ și să calculăm „produsul“ $p = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} * \frac{1}{7} * \ldots * \frac{1}{2n-1}$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Rezolvare

O funcție bijectivă care transformă $(-1, 1)$ în $(0, \infty)$ este dată prin $f: (-1, 1) \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$ (verificați). Ecuația $f(x) = y, y \in (0, \infty)$ are în $(-1, 1)$ soluția unică: $x = \dfrac{1-y}{1+y}$.

Deci f este bijectivă, iar $f^{-1}: (0, \infty) \to (-1, 1), f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$.

Verificăm că f este morfism de grupuri:

$$f(x * y) = \frac{1-x*y}{1+x*y} = \frac{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}} = \frac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1} = \frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} = f(x) \cdot f(y).$$

Calculul lui p poate fi făcut mai ușor valorificând idea de izomorfism probat anterior. Calculăm $f(p) = \alpha$ (fiind în $\mathbb{R}$, unde calculul ne este familiar!) și apoi deducem $p = f^{-1}(\alpha)$.

Deci: $f(p) = f\left(\dfrac{1}{3} * \dfrac{1}{5} * \ldots * \dfrac{1}{2n-1}\right) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot f\left(\dfrac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n}$.

Așadar $p = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{n-1}{n+1}$.

Exerciții propuse

1. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*, f(x) = \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x$ este morfism al grupurilor $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2. Arătați că funcția $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, f(z) = |z|$ este morfism de grupuri multiplicative.

3. a) Arătați că funcția $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = ax$ este morfism de grupuri aditive.
b) Funcția $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, g(x) = 2x - 1$ este morfism de grupuri aditive?

4. Fie S mulțimea soluțiilor întregi ale sistemului $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

Dacă (a_1, a_2, a_3) și $(b_1\ b_2, b_3) \in S$, definim $(a_1, a_2, a_3) + (b_1\ b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
a) Arătați că $(S, +)$ este grup comutativ.
b) Funcția $f: \mathbb{Z} \to S, f(x) = (x, -5x, 3x)$ este morfism de grupuri aditive.

5. a) Pe mulțimea $G = (2, \infty)$ se consideră legea $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.
Să se arate că G este grup comutativ.
b) Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to G, f(x) = 2 + e^x$ este izomorfism al grupurilor $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$.

6. Arătați că:

a) legea $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ determină pe $G_1 = (-1, 1)$ o structură de grup;

b) legea $x \circ y = \dfrac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}$ determină pe $G_2 = (1, 2)$ o structură de grup;

c) funcția $f: (-1, 1) \to (1, 2), f(x) = \dfrac{3x-2}{2}$ este un izomorfism de grupuri.

7. Fie $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in (0, +\infty) \right\}$.

Arătați ca $(M, \cdot)$ este grup comutativ izomorf cu grupul $\left((0, +\infty), \cdot\right)$.

8. Pe mulțimea $G = (0, 2)$ introducem legea de compoziție $x \circ y = \dfrac{xy}{xy-x-y+2}$.

a) Arătați că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

b) Arătați că $f: (0, 2) \to (0, +\infty), f(x) = \dfrac{2-x}{x}$ este izomorfism de grupuri.

c) Calculați în grupul G: $\dfrac{2\cdot 2^2}{2\cdot 2^2-1} \circ \dfrac{2\cdot 3^2}{2\cdot 3^2-1} \circ \ldots \circ \dfrac{2\cdot n^2}{2n^2-1}$.

***

9. a) Să se arate că funcțiile $f_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = mx, m \in \mathbb{Z}$ sunt morfisme de grupuri aditive.

b) Arătați că orice morfism de la $(\mathbb{Z}, +)$ la $(\mathbb{Z}, +)$ este de același tip.

10. a) Să se arate că singurul morfism de la $(\mathbb{Q}, +)$ la $(\mathbb{Z}, +)$ este morfismul nul.

b) Determinați morfismele de grup de la $(\mathbb{Z}, +)$ la $(\mathbb{Q}, +)$.

c) Deduceți că $(\mathbb{Q}, +) \not\cong (\mathbb{Z}, +)$.

11. Fie $a > 0$, funcția $f_a(x) = \begin{cases} ax, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ și $G = \{f_a \mid a \in (0, +\infty)\}$. Să se arate că G împreună cu operația de compunere determină o structură de grup, izomorf cu $\left((0, +\infty), \cdot\right)$.

12. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 1)$ introducem legea de compoziție: $M_1 * M_2 = M$, unde $M_1(\cos t_1, \sin t_1)$, $M_2(\cos t_2, \sin t_2)$, iar $M(\cos(t_1 + t_2), \sin(t_1 + t_2))$. Arătați că $(\mathcal{C}(0, 1), *)$ este grup comutativ, izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1.

13. Se consideră familia de drepte $d_m : (2 - m)x + (3 + 5m)y + 3m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.
Definim pe $M = \{d_m \mid m \in \mathbb{R}\}$ legea de compoziție $d_m * d_n = d_{m+n}$.
Arătați că $(M, *)$ este izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

14. Fie $G = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ și legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 \cdot z_2 + iz_1 + iz_2 - 1 - i$.

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

b) Să se arate că $f : G \to \mathbb{C}^*, f(z) = z + i$ este morfism de grupuri.

c) Determinați părțile stabile finite cu 6 elemente ale lui G în raport cu $\circ$.

15. a) Fie $G = (1, \infty)$ și $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$. Să se arate că $(G, \circ)$ este grup.

b) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $f : (0, +\infty) \to (1, +\infty), f(x) = \sqrt{mx + n}$ să fie izomorfism al grupurilor $((0, \infty), \cdot)$ și $(G, \circ)$.

c) Calculați în G: $\sqrt{\dfrac{2 \cdot 1^2 + 2}{1^2 + 1 + 1}} \circ \sqrt{\dfrac{2 \cdot 2^2 + 2}{2^2 + 2 + 1}} \circ \ldots \circ \sqrt{\dfrac{2n^2 + 2}{n^2 + n + 1}}$.

16. Fie $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ și legea $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1$.

a) Arătați că $(G, \circ)$ este grup abelian.

b) Arătați că $g : G \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = 2x + 2$, este izomorfism al grupurilor ($\mathbb{R}^*$ grup cu înmulțirea).

c) Calculați $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ ori}}$.

$*$**17.** Rezolvați în $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ecuația $x^3 = 1$; deduceți că $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

$*$**18.** Dacă $(G, \cdot)$ este grup, atunci funcția $f : G \to G, f(x) = x^{-1}$ este automorfism dacă și numai dacă grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

$*$**19.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, iar $f, g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ două morfisme de grupuri multiplicative astfel încât $f(z) = g(z)$ $(\forall)$ $z \in \mathbb{C}^* \setminus U_n$. Demonstrați că $f = g$.

1.8. Grupuri finite, tabla grupului, ordinul unui element

DEFINIŢIA 1

Un grup $(G, *)$ este numit **finit** dacă mulţimea G este finită.

În acest caz, numărul de elemente al mulţimii G se numeşte *ordinul grupului* şi se notează $|G|$.

Un grup care nu este finit se numeşte *infinit*.

Exemple

1. Grupul permutărilor de grad n este finit, având ordinul $n!$
2. Grupul rădăcinilor complexe de ordinul n ale unităţii este finit, având ordinul n.
3. Grupul aditiv al claselor de resturi modulo n, având ordinul n.
4. Dacă p este număr prim, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ este grup finit de ordinul $p - 1$.
5. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt grupuri infinite.

În cazul unui grup finit ştim că legea de compoziţie poate fi dată printr-o tablă.

În acest caz spunem că tabla legii de compoziţie este *tabla grupului*.

În continuare, folosind tabla, dăm un alt exemplu de grup, *grupul lui Klein*.

Grupul lui Klein este un grup cu patru elemente (de ordin 4), definit prin tabla următoare:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Elementul neutru este e.

Celelalte elemente a, b, c, au proprietăţile

$a^2 = b^2 = c^2 = e$;

$a \cdot b = b \cdot a = c$; $a \cdot c = c \cdot a = b$; $b \cdot c = c \cdot b = a$

OBSERVAŢIE

Pe orice linie (coloană) a tablei unui grup finit apar toate elementele grupului, fără repetări.

Într-adevăr: fie $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi $a \in G$ un element oarecare. Pe linia lui a, în tabla grupului, apar elementele $a \cdot a_1, a \cdot a_2, \ldots, a \cdot a_n$.

Evident, oricare două dintre ele sunt distincte, fiind tot elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, eventual într-o altă ordine.

Remarcaţi acest lucru pe tabla grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$ comparativ cu tabla monoidului $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ redate mai jos:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Pe linia I și a III-a se repetă elementele.

Iată încă un rezultat util în rezolvarea problemelor.

TEOREMA 1

Dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit de ordin n, având elementul neutru e, atunci pentru orice $x \in G$ avem $x^n = e$.

Demonstrație Vom face demonstrația într-un caz particular, acela al grupurilor comutative (cazul general depășind cadrul programei).

Fie $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ și $x \in G$. Am văzut anterior că elementele $x{\cdot}x_1, x{\cdot}x_2, \ldots, x{\cdot}x_n$ sunt distincte și $\{x{\cdot}x_1, x{\cdot}x_2, \ldots, x{\cdot}x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Deducem că $(x{\cdot}x_1){\cdot}(x{\cdot}x_2){\cdot} \ldots {\cdot}(x{\cdot}x_n) = x_1{\cdot}x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^n{\cdot}x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1{\cdot}x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \Leftrightarrow x^n = e$ (în urma simplificării cu $x_1{\cdot}x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$), c.c.t.d.

Probăm cele afirmate în teoremă prin următorul exemplu.

Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. $(S_5, \cdot)$ este grup necomutativ.

Conform teoremei $\sigma^{5!} = e$, însă există și puteri mai mici $p \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^p = e$.

Verificați, calculând succesiv $\sigma^2, \sigma^3, \ldots$, că $\sigma^6 = e$ și 6 este numărul natural cel mai mic cu această proprietate.

Teorema și exemplul anterior ne permit să formulăm:

DEFINIȚIA 2

Fie $(G, \cdot)$ un grup, cu elementul neutru e, și $x \in G$, $x \neq e$. Cel mai mic număr natural, nenul, p, pentru care $x^p = e$ se numește ordinul elementului x.

Ordinul elementului neutru se consideră egal cu 1 și este singurul element al grupului cu această proprietate (demonstrați!). Spunem că ordinul lui x în grup este infinit dacă $x^n \neq e$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple

1. Permutarea $\sigma \in S_5$ din exemplul anterior are ordinul 5.
2. În grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ elementul i are ordinul 4.
3. În grupul lui Klein toate elementele (diferite de elementul neutru) au ordinul 2.
4. Ordinul lui 1 în grupul $(\mathbb{Z}, +)$ este infinit întrucât nu există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\underbrace{1+1+...+1}_{n \text{ ori}} = 0$$

OBSERVAŢII

1. Din teorema 1 deducem că dintr-un grup finit ordinul oricărui element este finit. Reciproca acestei afirmații este falsă, luând drept contraexemplu o mulțime infinită E și $P(E)$ mulțimea părților sale.
   Știm că $(P(E), \Delta)$, unde Δ este diferența simetrică este grup (infinit), având elementul neutru $\varnothing$.
   Însă orice element $X \in P(E)$ este de ordin 2, pentru că $X \Delta X = \varnothing$.
2. În orice grup ordinul simetricului este egal cu ordinul elementului întrucât $x^k = e \Leftrightarrow (x^{-1})^k = e$.

Teoremele următoare sunt utile în justificarea faptului că un anumit număr natural, nenul este ordinul unui element.

TEOREMA 2

Fie $(G, \cdot)$ un grup, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in G$. Următoarele afirmații sunt echivalente:
a) Ordinul elementului a este n.
b) $a^n = e$ iar $a^k = e \Rightarrow n / k$.

Demonstrație

a) $\Rightarrow$ b)
Evident $a^n = e$; fie $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^k = e$
Prin teorema împărțirii cu rest rezultă că există $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k = n \cdot q + r$, $0 \leq r < n$. Atunci
$a^r = a^{k-nq} = a^k a^{-nq} = e \cdot e = e$
Deoarece $a^r = e$ și $r < n$, din definiția ordinului deducem că $r = 0$.
Prin urmare $k = nq$, adică n / k.
b) $\Rightarrow$ a)
Dacă $a^k = e$, $k \in \mathbb{N}^*$, deducem că n / k, adică $n \leq k$.
Așadar n este cel mai mic număr natural nenul pentru care $a^n = e$, adică este ordinul lui a.

TEOREMA 3

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$ un element de ordin n. Atunci:
Dacă $t \in \mathbb{Z}$, elementul a^t are ordinul n dacă și numai dacă $(t, n) = 1$.

Demonstrație Presupunem că $(t, n) = 1$ și arătăm că a^t verifică cele două condiții date de teorema anterioară.
Într-adevăr: $(a^t)^n = a^{tn} = (a^n)^t = e$; (a)
Fie $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât $(a^t)^k = e$.
Rezultă $a^{tk} = e$ și, deoarece ordinul lui a este n, deducem că n / tk. (1)
Întrucât $(n, t) = 1$, din (1) rezultă n / k adică (b).
Așadar a^t are ordinul n.
Reciproc: presupunem că a^t are ordinul n și demonstrăm că $(t, n) = 1$
Dacă notăm $d = (t, n)$, atunci există $n_1, t_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n = n_1 d$ și $t = t_1 d$. Însă $(a^t)^{n_1} = a^{tn_1} = a^{t_1 d n_1} = a^{t_1 n} = (a^n)^{t_1} = e^{t_1} = e$.
Deoarece ordinul lui a^t este n, deducem că n / n_1, adică $d = 1$.
Am demonstrat că c.m.m.d.c. al numerelor t și n este 1, c.c.t.d.

Aplicații

1. Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, o rădăcină de ordinul n a unității. Atunci:

a) ε este element de ordin n al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$
b) elementele de ordin n ale grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt numerele complexe de forma ε^r, unde $0 < r < n$ și $(r, n) = 1$.

Demonstrație

a) Conform formulei lui Moivre avem $\varepsilon^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$.
Dacă $\varepsilon^k = 1$, atunci $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.
Rezultă $k = ln$, deci n / k. Sunt îndeplinite condițiile teoremei 2, deci ordinul lui ε este n.

b) Fie $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ un element de ordin n în grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
Din $z^n = 1$ reducem $r = 1$ și $n\varphi = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.
În acest fel $z = \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\frac{2l\pi}{n} + i\sin\frac{2l\pi}{n} = \varepsilon^l$.
Conform teoremei 3 avem $(l, n) = 1$
Din teorema împărțirii cu rest, $l = nq + r$, $0 \le r < n$, iar $\varepsilon^l = \varepsilon^{nq+r} = \varepsilon^r$.
Mai observăm că $(r, n) = (l, n) = 1$.
Reținem că elementele de ordin n ale grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ se află printre elementele mulțimii $U_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^r, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, iar dintre acestea numai acelea cu *exponent prim cu n*.

Comentariu. Putem preciza chiar numărul acestor elemente de ordin n.
Se ştie că numărul numerelor naturale, nenule, mai mici decât n şi prime cu n se notează cu $\varphi(n)$ şi se numeşte *indicatorul lui Euler*.
Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ este descompunerea în factori primi a numărului n, se poate demonstra că:

$$\boxed{\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)}$$

Aşadar $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ are $\varphi(n)$ elemente de ordin n.
De exemplu, dacă $n = 24$, atunci grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ are $\varphi(24) = 8$ elemente de ordin 24:
$\varepsilon, \varepsilon^5, \varepsilon^7, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{17}, \varepsilon^{19}, \varepsilon^{23}$, unde $\varepsilon = \cos\dfrac{2k\pi}{24} + i\sin\dfrac{2k\pi}{24}$.

2. Mica teoremă a lui Fermat. Fie p un număr prim şi $a \in \mathbb{Z}$ un număr nedivizibil cu p. Atunci $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Demonstraţie

Deoarece p este număr prim, $\mathbb{Z}_p^*$ este grup finit de ordin $p - 1$.
De asemenea: a nedivizibil cu p este echivalent cu $(a, p) = 1$, deci $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p^*$.
Din teorema 1 deducem că $(\hat{a})^{p-1} = \hat{1} \Leftrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, c.c.t.d.

OBSERVAŢII

1. Teorema lui Fermat are o generalizare cunoscută sub numele de *teorema lui Euler*.
Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, n) = 1$, atunci $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$

Demonstraţia se bazează pe faptul că $(U(\mathbb{Z}n), \cdot)$ este grup.
Deoarece $(a, n) = 1$, atunci $\hat{a} \in U(\mathbb{Z}_n)$ şi $U(\mathbb{Z}_n)$ are ordinul $\varphi(n)$.
Conform teoremei 1, avem $(\hat{a})^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.

Exemple de aplicare a teoremelor Fermat şi Euler

a) Restul împărţirii lui 3^{37} la 13 este 3.
b) Dacă p este prim şi $(a, p) = 1$, atunci $a^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Rezolvare

a) $3^{37} = 3 \cdot 3^{36}$) $3 . (3^{12})^3$. Însă, aplicând teorema lui Fermat avem $3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, de unde $(3^{12})^3 \equiv 1 \pmod{13}$ şi apoi $3 \cdot (3^{12})^3 \equiv 3 \pmod{13}$

b) Dacă p este prim, atunci $\varphi(p^2) = p^2\left(1-\dfrac{1}{p}\right) = p(p-1)$.

Aplicând teorema lui Euler, deducem că $a^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}$, c.c.t.d.

2. Teorema lui Fermat poate fi reformulată astfel:
Pentru orice întreg a şi pentru orice număr prim p are loc congruenţa $a^p \equiv a \pmod p$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu patru elemente, $G = \{e, a, b, c\}$, unde e este elementul neutru, iar $a^2 = c^2 = e$. Alcătuiți tabla grupului.

Rezolvare

Trebuie completate spațiile libere din tabela legii (marcate cu steluță)
Trebuie să evităm repetările de elemente pe linii și coloane.
La intersecția liniei elementului a cu coloana elementului b trebuie să punem c; deci $ab = c$.
La fel procedăm și găsim $ac = b$; $bc = a$; $b^2 = e$; $ba = c$; $ca = b$; $cb = a$.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	⊛	*
b	b	*	*	*
c	c	*	*	e

2. Determinați ordinul elementului $\hat{6}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{40}, +)$.

Rezolvare

Căutăm $n \in \mathbb{N}^*$, minim, pentru care $n \cdot \hat{6} = \hat{0}$.
Avem echivalent $6n \equiv 0 \pmod{40} \Leftrightarrow 6n = 40q \Leftrightarrow 3n = 20q$.
Rezultă că $20 / n$, deci $n = 20$.

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Notăm ord (x) = ordinul lui x în grupul $(G, \cdot)$

a) Demonstrați că ord (xy) = ord (yx).

b) Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, $xy = yx$, ord $(x) = m$, ord $(y) = n$, atunci ord $(xy) = mn$.

c) Dacă ord $(x) = m$, $m \in \mathbb{N}^*$, atunci $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$ avem ord $(x^k) = \dfrac{m}{(m,k)}$.

Rezolvare

a) $(xy)^n = e \Leftrightarrow \underbrace{(xy)(xy)...(xy)}_{n \text{ ori}} = e \Rightarrow x(yx)^{n-1}y = e \Rightarrow (yx)^{n-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \Rightarrow (yx)^{n-1} = (yx)^{-1}$

$\Rightarrow (yx)^n = e \Rightarrow$ ord $(yx) \le$ ord(xy); analog demonstrăm că ord $(xy) \le$ ord (yx).

b) $xy = yx \Rightarrow (xy)^{mn} = x^{mn} \cdot y^{mn} = (x^m)^n \cdot (y^n)^m = e^n \cdot e^m = e.$

Fie $(xy)^k = e$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci $(xy)^{mk} = e$; deci $x^{mk} \cdot y^{mk} = e \Rightarrow y^{mk} = e \Rightarrow n / mk.$

Deoarece $(n, m) = 1$, deducem că n / k (1); analog rezultă m / k. (2)

Din (1) și (2), folosim încă o dată $(n, m) = 1$, deci nm / k.

c) Fie $d = (m, k)$. Observăm că $\left(x^k\right)^{\frac{m}{d}} = \left(x^m\right)^{\frac{k}{d}} = e^{\frac{k}{d}} = e.$

Fie $(x^k)^l = e$. Atunci $x^{kl} = e$, de unde rezultă m / kl, adică $mp = kl$, $p \in \mathbb{Z}$ (3).

Există k_1 și $m_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k = k_1 d$ și $m = m_1 d$.

În acest fel (3) devine $m_1 p = k_1 l$. (4)

Însă $(k_1, m_1) = 1$, deci din (4) deducem m_1 / l, adică $\left(\dfrac{m}{d}\right) / l$.

1.9. Subgrup

DEFINIŢIE

Fie $(G, *)$ un grup și H o parte stabilă a sa în raport cu $*$. Dacă H împreună cu operația indusă este grup, atunci H se numește **subgrup** al lui G.

Exemple

1. $(\mathbb{Z}, +)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

2. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

3. Orice grup de matrice este subgrup al grupului $GL_n(\mathbb{C})$.

4. Dacă $(G, *)$ este grup cu cel puțin două elemente, iar e este elementul său neutru, atunci $(\{e\}, *)$ și $(G, *)$ sunt subgrupuri (numite *subgrupuri improprii ale lui G*). Orice alt subgrup al unui grup se numește *subgrup propriu*.

Următoarele propoziții oferă condiții necesare și suficiente pentru ca o mulțime să fie subgrup.

TEOREMA 1

Fie $(G, *)$ un grup și H un subgrup al lui G. Atunci:
a) $(\forall)$ $x, y \in H$, rezultă $x * y \in H$;
b) $e \in H$ (unde e este elementul neutru al grupului G);
c) pentru orice $x \in H$ avem $x' \in H$ (x' fiind simetricul lui x în G)

Demonstrație a) Rezultă din definiția subgrupului.
b) Notăm cu e' elementul neutru al grupului $(H, *)$
Avem $e * e' = e'$ și $e' * e' = e'$; rezultă $e * e' = e' * e'$, de unde prin simplificare cu e', obținem $e = e'$, deci $e \in H$.
c) Notăm cu x'' inversul lui x în grupul $(H, *)$.
Atunci $x' * x = e$ și $x'' * x = e$; rezultă $x' * x = x'' * x$, de unde prin simplificare cu x, obținem $x' = x''$, deci $x' \in H$, c.c.t.d.

Reținem: orice subgrup conține elementul neutru al grupului.

TEOREMA 2

Fie $(G, *)$ un grup și $H \subset G$ o submulțime nevidă.
$(H, *)$ este subgrup al grupului G dacă și numai dacă avem
a) $(\forall)$ $x, y \in H$, rezultă $x * y \in H$
b) $(\forall)$ $x \in H$, rezultă $x' \in H$ (x' este simetricul lui x în G)

Demonstrație Din teorema anterioară deducem una dintre implicații: dacă H este subgrup al lui $(G, *)$, atunci sunt îndeplinite condițiile a) și b).
Cealaltă implicație: presupunem că $H \subset G$ îndeplinește cele două condiții și arătăm că $(H, *)$ este grup.

- Evident operația $*$ este asociativă pe H, fiind asociativă pe G.
- Demonstrăm că elementul neutru al grupului $(G, *)$, notat e, este și elementul neutru pentru H. Pentru aceasta este suficient să observăm că $e \in H$. Într-adevăr: fie $x \in H$; atunci, din b), rezultă că simetricul său (în G) aparține H; $x' \in H$; aplicând la a) deducem că $e = x * x' \in H$.
- Orice element al lui H este simetrizabil, simetricul său fiind simetricul din $(G, *)$, c.c.t.d.

Cele două condiții pot fi comasate într-una singură, dată de:

TEOREMA 3

Fie $(G, *)$ un grup și $H \subset G$ o submulțime nevidă. $(H, *)$ este subgrup al grupului G dacă și numai dacă avem îndeplinită condiția: $(\forall)\ x, y \in H$, rezultă $x * y' \in H$.

Demonstrația rezultă imediat din teorema 2.

Exerciții rezolvate

1. Fie $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ bijecție}, f(1) = 1\}$, $F_1 \subset S(\mathbb{R})$, unde $S(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ bijecție}\}$. Să se arate că F_1 este subgrup al grupului $(S(\mathbb{R}), \circ)$.

Rezolvare

Fie $f, g \in F_1$. Deoarece g^{-1} este bijecție, rezultă că $f \circ g^{-1}$ este bijecție.
În plus: $(f \circ g^{-1}(1) = f(g^{-1}(1)) = f(1) = 1$; rezultă că $f \circ g^{-1} \in F_1$, c.c.t.d.

OBSERVAȚIE

În unele situații în loc să arătăm că o mulțime G împreună cu o lege de compoziție este grup, arătăm că G este subgrup al unei structuri „mai mari“ de grup, cunoscute anterior.

Exemplu:

Mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 4c & 5d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ împreună cu operația de adunare a matricelor este grup. Justificăm această cerință arătând că H este subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$.

Într-adevăr: dacă $A, B \in H$, $A = \begin{pmatrix} 2a_1 & 3b_1 \\ 4c_1 & 5d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2a_2 & 3b_2 \\ 4c_2 & 5d_2 \end{pmatrix}$, atunci

$-B = \begin{pmatrix} -2a_2 & -3b_2 \\ -4c_2 & -5d_2 \end{pmatrix}$, iar $A - B = \begin{pmatrix} 2(a_1 - a_2) & 3(b_1 - b_2) \\ 4(c_1 - c_2) & 5(d_1 - d_2) \end{pmatrix} \in H$.

2. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât mulţimea $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (a \cos x + b \sin x + c = 0\}$ să fie subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

Rezolvare

Elementul neutru al grupului $(\mathbb{R}, +)$ este 0; rezultă, conform teoremei 1, că $0 \in S$:
$a \cos 0 + b \sin 0 + c = 0 \Leftrightarrow a + c = 0 \Leftrightarrow c = -a$

Analizăm cazurile:

i) $a = 0$

1) $b = 0$. În acest subcaz, $S = \mathbb{R}$, deci $(S, +)$ este subgrup (impropriu)

2) $b \neq 0$. Deoarece $c = -a = 0$, ecuaţia devine $b \sin x = 0$, de unde $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ care este evident subgrup al lui $(\mathbb{R}, +)$.

ii) $a \neq 0$.

Rezolvăm ecuaţia, obţinând $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ U $\{2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Însă: $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \in S$, iar S este parte stabilă.

Deducem că $n x \in S$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$, ceea ce este posibil numai în cazul $x = 0$ (verificaţi), adică $b = 0$.

Aşadar am găsit soluţiile: ($a = 0$, $b = 0$, $c = 0$); ($a = 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c = 0$), ($b = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $c = -a$).

3. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup (notaţie multiplicativă), $H \subset G$, $H \neq \varnothing$.
Să se arate că H este subgrup al lui G dacă şi numai dacă H este parte stabilă a lui G în raport cu legea.

b) Determinaţi părţile stabile finite, cu n elemente, ale mulţimii $\mathbb{C}^*$ în raport cu înmulţirea.

Rezolvare

a) Arătăm că orice parte stabilă finită a lui $(G, \cdot)$ este subgrup, reciproca fiind evidentă.

• $(\forall)\, x, y \in H$ avem $x \cdot y \in H$ (H fiind parte stabilă).

• Fie $x \in H$. Şirul de puteri ale lui $x, x^2, \dots, x^k$, are termenii din H.

Presupunerea că oricare doi termeni ai şirului ar fi distincţi ar conduce la H infinită, contradicţie.

Prin urmare există $l, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^l = a^p$, iar dacă admitem că $p < l$, prin simplificarea cu a^p, deducem că $a^{p-l} = e$ (e elementul neutru).

Deoarece $a \cdot a^{l-p-1} = a^{l-p} = e$, rezultă că $a^{-1} = a^{l-p-1} \in H$, c.c.t.d.

b) Fie $H = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}^*$, parte stabilă a lui $\mathbb{C}^*$ în raport cu înmulţirea.

Conform cu a), H este subgrup cu n elemente al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Prin urmare $1 \in H$, iar dacă $a \in H$, atunci $a^n = 1$ (teorema 1, din paragraful anterior)

Am arătat că $a \in U_n$, adică $H \subset U_n$ (1).

Deoarece H şi U_n au acelaşi număr de elemente, rezultă că incluziunea (1) este chiar egalitate.

În concluzie: părțile stabile finite ale mulțimii $\mathbb{C}^*$ în raport cu înmulțirea sunt grupurile de rădăcini ale unității.

4. Dacă $(G, *)$ și $(G', \circ)$ sunt grupuri cu elementul neutru e, respectiv e', iar $f: G \to G'$ este morfism de grupuri, atunci:

a) $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$ și $f(G) = \{f(x) \mid x \in G\}$ sunt subgrupuri ale grupului $(G, *)$, respectiv $(G', \circ)$

b) În plus: dacă f este izomorfism, iar $a \in G$ are ordinul n, atunci $f(a) \in G'$ are tot ordinul n.

Rezolvare

a) Fie $x, y \in \operatorname{Ker} f$. Atunci $f(x * y') = f(x) \cdot f(y') = e' * f(y') = f(y') = ((f(y))' = e'$, deci $x * y' \in \operatorname{Ker} f$.

Fie $y_1, y_2 \in f(G)$. Atunci există $x_1, x_2 \in G$ astfel încât $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$.

Atunci: $y_1 \circ y'_2 = f(x_1) \circ (f(x_2))' = f(x_1) \circ f(x'_2) = f(x_1 \circ x'_2) \in f(G)$.

b) Presupunem că $a \in G$ are ordinul n; atunci $a^n = e$ și n este cel mai mic număr natural cu această proprietate.

Atunci $(f(a))^n = f(a^n) = f(e) = e'$; fie $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(f(a))^k = e'$.

Rezultă $f(a^k) = e' = f(e)$.

Deoarece f este injectivă, rezultă că $a^k = e$, deci n / k.

Reciproc: dacă $f(a)$ are ordinul n, atunci folosind faptul că f^{-1} este izomorfism, rezultă ca mai sus că $f^{-1}(f(a) = a$ are ordinul n.

Exerciții propuse

1. Fie mulțimea de funcții $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, unde $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$.

$f_1(x) = x; f_2(x) = \dfrac{1}{2}\ ; f_3(x) = -x; f_4(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Arătați că $(G, \circ)$ este grup abelian, alcătuind tabla grupului.

2. Pe mulțimea $G = \{2, 4, 6, 8\}$ considerăm operația de înmulțire modulo 10. Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ. Alcătuiți tabla grupului

3. Completați tabla grupului $G = \{a, b, c, d\}$ în fiecare situație:

a)

$\circ$	a	b	c	d
a				
b	b	a		
c			a	
d				

b)

$*$	a	b	c	d
a				
b	b	c		
c				
d				

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați puterile: $A^2, A^3, A^4, \ldots$

b) Arătați că $G = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este grup finit.

c) Arătați că grupul G este izomorf cu U_4.

d) Determinați ordinele elementelor din G.

5. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a \cdot b \neq b \cdot a$.
Demonstrați că elementele $a, b, a \cdot b, b \cdot a, e$ sunt distincte (e este elementul neutru).
Deduceți că orice grup cu mai puțin de cinci elemente este comutativ.

6. Fie $(G, \cdot)$ un grup de 5 elemente, iar e elementul neutru.
Arătați că orice element diferit de e are ordinul 5.
Deduceți că $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}$, unde $a \in G$, iar $G \simeq (\mathbb{Z}_5, +)$

7. Determinați ordinele elementelor:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ în grupul $(S_5, \circ)$; b) $\hat{8}$ în grupul $\mathbb{Z}_{12}$;

c) $\hat{9}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{30}, +)$; d) $1 + i$ în $(\mathbb{C}^*;)$.

8. Fie $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătați că A are ordinul 4, B are ordinul 6, iar produsul AB are ordin infinit în $GL_2(\mathbb{R})$

9. Determinați restul împărțirii numărului
a) 234^{16} la 17; b) 34^{76} la 17; c) 7^{90} la 23.

10. Fie $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Arătați că H este subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

11. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $n\mathbb{Z}$ mulțimea multiplilor numărului n. Arătați că $n\mathbb{Z}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

12. Arătați că mulțimea $\{\sigma \in S_6 / \sigma(2) = 2\}$ este subgrup al grupului $(S_6, \circ)$.

13. Dacă H este subgrup al grupului $(G, \cdot)$ și $a \in G$ este fixat, demonstrați $a^{-1} H a = \{a^{-1} h a \mid h \in H\}$ este subgrup al lui $(G, \cdot)$.

14. a) Dacă H_1 și H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(G, \cdot)$, demonstrați că $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui $(G, \cdot)$.

b) Demonstrați că $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\,\mathbb{Z}$.

c) Demonstrați că $U_4 \cap U_6 = U_2$.

***

15. Fie $(G, \cdot)$ un grup, $a \in G$ și $C_G(a) = \{x \in G \,/\, a \cdot x = x \cdot a\}$

a) Arătați că $C_G(a)$ este subgrup al lui G.

b) Determinați $C_G(a)$ în cazul $G = GL_2(\mathbb{R})$ și $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

16. Arătați că dacă într-un grup finit există un element de ordin 5, atunci ordinul grupului este multiplu de 5.

17. a) Arătați că grupul lui Klein nu este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$.

b) Arătați că orice grup cu 4 elemente este izomorf fie cu grupul lui Klein fie cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$.

18. a) Demonstrați că reuniunea a două subgrupuri ale unui grup nu este un subgrup.

b) Dacă H_1, H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(G, \cdot)$, atunci $H_1 \cup H_2$ este subgrup al lui $G \Leftrightarrow H_1 \subset H_2$ sau $H_2 \subset H_1$.

c) Fie grupul $(\mathbb{Z}, +)$ și subgrupurile $H = 20\mathbb{Z}$ și $K = p\mathbb{Z}$, unde p este număr prim. Determinați p astfel încât $H \cup K$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$.

19. Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitive, cu proprietatea că mulțimea primitivelor sale este subgrup al grupului bijecțiilor lui $\mathbb{R}$ (în raport cu compunerea funcțiilor).

20. Fie $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$. Să se arate că:

a) $(G, \cdot)$ este grup abelian;

b) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, există un singur grup cu n elemente al grupului $(G, \cdot)$ și să se determine acest subgrup.

21. Fie $H_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ și $H_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$

a) Să se arate că H_1 și H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

b) Să se arate că pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ există $A \in H_1$ și $B \in H_2$ astfel încât $X = A + B$.

***22.** Fie $(G, \cdot)$ grup și $H \subset G$ subgrup propriu. Demonstrați că:

a) $(\forall)\, x \in H, y \in G \setminus H$ atunci $xy \in G \setminus H$, $yx \in G \setminus H$;

b) $(\forall)\, x \in G \setminus H$ atunci $x^{-1} \in G \setminus H$.

***23.** $(G, \cdot)$ este grup, $f_1, f_2 : G \to G$ sunt morfisme de grupuri, iar $H \subset G$ este subgrup propriu. Demonstrați că dacă $f_1(x) = f_2(x)$ $(\forall)\, x \in G \setminus H$, atunci $f_1 = f_2$.

***24.** Fie $(G, \cdot)$ un grup pentru care există $a \in G$ astfel încât $H = G \setminus \{a\}$ este subgrup al grupului G.

a) Arătați că $a^2 = e$, e fiind elementul neutru al grupului și $\{e, a\}$ este subgrup al grupului G.

b) Arătați că $G \simeq \mathbb{Z}_2$.

Teste de verificare

Testul 1

1. Să se arate că mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -8y & x-4y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{Z} \right\}$, formează o structură de monoid în raport cu înmulțirea matricelor. Care sunt elementele inversabile?

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea $x * y = x + y - xy$.
   a) Demonstrați că $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ este grup comutativ.
   b) Calculați simetricele elementelor 2 și 3 în grup.
   c) Rezolvați ecuația $(2 * x) * 3 = 4$.

3. Se dă grupul $(G, *)$. Pentru fiecare $a \in G$ considerăm funcția $f: G \to G, f_a(x) = a * x$.
   a) Să se arate că f_a este bijectivă.
   b) Dacă $F(G) = \{ f_a \mid a \in G\}$ să se arate că $(F(G), \circ)$ este grup izomorf cu grupul $(G, *)$.

Timp de lucru: 45 de minute.
Pentru fiecare întrebare se acordă 1,5 p.
Se acordă un punct din oficiu.

Testul 2

Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea $x * y = 2ixy - x - y - i,\; x, y \in \mathbb{C}$.

   a) Arătați că mulțimea $G = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{i}{2} \right\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$ în raport cu $*$.
   b) Arătați că $(G, *)$ este grup.
   c) Arătați că funcția $f: G \to \mathbb{C}^*, f(x) = 2ix - 1$ este izomorfism al grupurilor $(G, *)$ și $(\mathbb{C}, \cdot)$.
   d) Determinați părțile stabile finite cu 6 elemente ale lui G în raport cu legea $*$.

Timp de lucru: 45 de minute.
Barem: a) 2p; b) 3p; c) 2p; d) 2p.
Se acordă un punct din oficiu.

Testul 3

Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea $x * y = 2ixy - 3(x + y) - 6i$, $x, y \in \mathbb{C}$.

a) Arătați că $G = \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{3i}{2}\right\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$ în raport cu $*$.

b) Arătați că $(G, *)$ este grup.

c) Arătați că funcția $f : G \to \mathbb{C}^*$, $f(x) = 2ix - 3$ este izomorfism al grupurilor $(G, *)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

d) Calculați în grupul G:

$$\frac{4 \cdot 2^2 + 2 - 2}{2 \cdot 2^2 i} * \frac{3 \cdot 3^2 + 3 - 2}{2 \cdot 3^2 \cdot i} * \ldots * \frac{4n^2 + n - 2}{2n^2 i} =$$

Timp de lucru: 45 de minute.
Barem: a) 2p; b) 3p; c) 2p; d) 2p.
Se acordă un punct din oficiu.

Testul 4

1. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, \cdot)$ să fie grup.

2. Determinați părțile stabile finite ale mulțimii $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea având 5 elemente. Generalizați.

3. Completați tabla operației unui grup, dată mai jos:

$\circ$	a	b	x	y	z	
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	y	z	x
b	b	e	a	z	x	y
x	x	z		e		a
y	y					
z	z					e

Timp de lucru: 30 de minute.
Pentru fiecare exercițiu se acordă 3 p.
Se acordă un punct din oficiu.

Capitolul 2

Inele şi corpuri

2.1. Definiţia inelului. Exemple

În capitolul anterior, am avut în vedere un anume tip de structură algebrică, determinată de o singură lege de compoziție (pe o anumită mulțime).

Pentru structura de inel pe care o vom defini în continuare avem în vedere două legi de compoziție pe o mulțime.

Fiecare dintre aceste legi de compoziție, prin proprietățile sale, determină câte o structură algebrică pe mulțime, cele două structuri fiind legate prin intermediul unei axiome numite *distributivitate*.

Mai exact, avem următoarea:

DEFINIŢIE

Mulțimea nevidă A, împreună cu legile de compoziție $+$ şi $\cdot$, definite pe mulțimea A, se numeşte **inel**, dacă sunt îndeplinite condițiile:

a) Perechea $(A, +)$ este grup comutativ

b) Perechea $(A, \cdot)$ este monoid

c) $(\forall)\ a, b, c \in A$, avem $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Dacă, în plus, legea este comutativă, adică

$$(\forall)\ x, y \in A,\ x \cdot y = y \cdot x$$

atunci inelul se numeşte *comutativ*.

Inelul va fi de obicei notat $(A, +, \cdot)$, punând în evidență rolul diferit al celor două operații: prima dintre ele, notată pentru mai multă simplitate aditiv, determină o structură mai bogată (grup), comparativ cu a doua (notată multiplicativ), ce are numai proprietăți de monoid.

Condiția c) din definiție este numită *distributivitatea legii a doua* $(\cdot)$ *față de prima lege* $(+)$.

Grupul comutativ $(A, +)$ se numeşte *grupul aditiv subiacent inelului*.

Elementul neutru al acestui grup se notează 0_A (sau chiar 0) şi se numeşte *elementul zero* al grupului.

Simetricul unui element $a \in A$ în raport cu prima operație se notează cu $-a$.

Elementul neutru al monoidului $(A, \cdot)$ se notează 1_A (sau 1) şi se numeşte *elementul unitate* al inelului $(A, +, \cdot)$.

Elementele simetrizabile ale monoidului $(A, \cdot)$ se numesc *elemente inversabile* ale inelului sau *unități* ale inelului. Notăm mulțimea acestor elemente prin $U(A)$.

Exemple de inel

1. **Inele numerice:**
   ($\mathbb{Z}$, +, ·) – inelul întregilor raționali
   ($\mathbb{Q}$, +, ·) – inelul numerelor raționale
   ($\mathbb{R}$, +, ·) – inelul numerelor reale
   ($\mathbb{C}$, +, ·) – inelul numerelor complexe
   Toate aceste inele sunt comutative.
   În toate aceste inele, elementul zero este numărul 0, iar elementul unitate este 1.
   $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$; $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$; $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$; $U(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

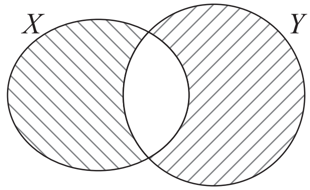
2. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, fiecare din tripletele:
   $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}), +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$
   este inel comutativ. Se numesc **inele de matrice**.
   Elementul zero este matricea nulă 0_n, iar elementul unitate este matricea I_n.
   Ne reamintim că: $U(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\}$.
   $U(\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) \mid \det A \neq 0\}$.
   $U(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} = GL_n(\mathbb{R})$.
   $U(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\} = GL_n(\mathbb{C})$.

3. **Inele de funcții reale**
   Mulțimea $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funcție}\}$ împreună cu operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor reale formează o structură de inel comutativ, numit *inelul funcțiilor reale*.
   Elementul zero este funcția constantă 0, iar elementul unitate este funcția constantă 1.
   $U(F(\mathbb{R})) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0, (\forall)\, x \in \mathbb{R}\}$.

4. Un exemplu banal de inel este inelul cu un singur element.
   Într-un astfel de inel 1 = 0.

5. Inelul **claselor de resturi modulo *n*,** $n \geq 2$, notat $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$
   Pe mulțimea claselor de resturi am introdus două legi de compoziție, adunarea și înmulțirea.
   S-a arătat că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup comutativ, iar $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid.
   Distributivitatea înmulțirii față de adunare pe inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ se transferă pe $\mathbb{Z}_n$: înmulțirea claselor este distributivă față de adunare.
   Într-adevăr:
   $\hat{a} \cdot (\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a} \cdot \widehat{(b+c)} = \widehat{a \cdot (b+c)} = \widehat{a \cdot b + a \cdot c} = \widehat{a \cdot b} + \widehat{a \cdot c} = \hat{a} \cdot \hat{b} + \hat{a} \cdot \hat{c}$
   Analog demonstrăm că $(\hat{b} + \hat{c}) \cdot \hat{a} = \hat{b} \cdot \hat{a} + \hat{c} \cdot \hat{a}$
   Așadar elementul zero este clasa $\hat{0}$, elementul unitate este $\hat{1}$.
   De asemenea, ne amintim: $U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n \mid (a, n) = 1\}$.

6. Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{P}(A)$ familia părților sale. Tripletul $(\mathcal{P}(A), \Delta, \cup)$ este inel comutativ, unde Δ este diferența simetrică, iar $\cap$ este operația de intersecție. Într-adevăr, să ne reamintim că $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ și că Δ are proprietățile:



- $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$
- $X \Delta Y = Y \Delta X$, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$
- $X \Delta \varnothing = X$ ($\varnothing$ este elementul zero)
- $X \Delta X = \varnothing$ (orice element X este simetrizabil în raport cu Δ).

De asemenea:

- $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$
- $X \cap Y = Y \cap X$, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$
- $X \cap A = X$, $\forall X \in \mathcal{P}(A)$ (A este elementul unitate)

Și în final:

$X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$

Verificați aceste proprietăți ca exercițiu recapitulativ.

Oricum, veți reveni asupra acestor proprietăți rezolvând un exercițiu propus la pagina 89.

7. Inelul $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ – **inelul întregilor lui Gaus**.

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

Deoarece $\mathbb{Z}[i]$ este submulțime a mulțimii $\mathbb{C}$, rezultă că adunarea și înmulțirea au proprietățile cerute în definiția inelului.

Elementul zero este numărul complex $0 = 0 + 0 \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$

Arătăm că $U(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\}$

Este evident că $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, $a + bi \neq 0$ este inversabil în $\mathbb{Z}[i]$ dacă inversul său din $\mathbb{C}$, $\dfrac{1}{a+bi}$, aparține lui $\mathbb{Z}[i]$. Însă

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i \in \mathbb{Z}[i] \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Observăm că: $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \dfrac{1}{a^2+b^2}$

Rezultă că $\dfrac{1}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z}$. Prin urmare $a^2 + b^2 = 1$.

Avem posibilitățile $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases}$

Deducem $(a, b) \in \{(1, 0); (-1, 0); (0, 1); (0, -1)\}$.

Așadar: $a + bi \in \{1, 0, -1, \mathrm{i}, -1\}$, c.c.t.d.

OBSERVAŢII

1. Asupra unei structuri de inel asemănătoare celei anterioare vom reveni cu una mai generală, în cadrul rubricii de exerciții rezolvate de la finalul paragrafului (pagina 70).

2. Nu este complicat de demonstrat că dacă $(A, +, \cdot)$ este inel, atunci mulțimea $U(A)$ este parte stabilă a lui A față de legea $\cdot$ („multiplicativă“), iar perechea $(U(A), \cdot)$ este grup, numit grupul *multiplicativ al elementelor inversabile* din inelul A.

2.2. Divizori ai lui zero într-un inel

DEFINIŢIA 1

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Elementul $x \in A$, $x \neq 0$, se numește **divizor al lui zero la stânga** dacă există $y \in A$, $y \neq 0$, astfel încât $x \cdot y = 0$.

Elementul $x \in A$, $x \neq 0$, se numește **divizor al lui zero la dreapta** dacă există $y \in A$, $y \neq 0$, astfel încât $y \cdot x = 0$.

Evident, în definiția anterioară dacă x este divizor la stânga, atunci y este divizor la dreapta.

În cele ce urmează unui divizor la stânga sau la dreapta îi vom spune scurt: divizor al lui zero.

Exemple

1. În inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$, $\hat{4}$ este divizor al lui zero, deoarece $\hat{4} \neq \hat{0}$, $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{0}$, iar $\hat{3} \neq \hat{0}$.
   În acest inel rezultă că și $\hat{3}$ este divizor al lui zero.

2. În inelul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ este divizor al lui zero.

   Pentru justificare, este suficient să observăm că există o matrice nenulă $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru care $A \cdot B = 0_2$.

3. Nu toate elementele unui inel sunt divizori ai lui zero:
   Orice element inversabil nu este divizor al lui zero.
   Într-adevăr: dacă $x \neq 0$ este inversabil și $x \cdot y = 0$, atunci
   $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = 0 \Leftrightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

4. Există inele care nu au divizori ai lui zero.
   Exemple: inelele numerice, unde $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$.

Acest exemplu justifică definiția următoare:

DEFINIŢIA 2

Un inel comutativ fără divizori ai lui zero se numește **domeniu de integritate**.

$(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ este un alt exemplu de domeniu de integritate.

Următoarea remarcă rezultă din definiția divizorului la stânga (dreapta) într-un inel și are în vedere o situație nou-creată într-o astfel de structură: dacă „un produs“ de factori poate fi zero fără ca factorii să fie zero.

Să reţinem!

Într-un inel $(A, +, \cdot)$ următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Inelul nu are divizori ai lui zero.

2. Oricare ar fi $x, y \in A, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$.

3. Dacă $x, y \in A$ astfel încât $x \cdot y = 0$, atunci $x = 0$ sau $y = 0$.

Să mai reținem că într-un inel putem face orice fel de amplificări, dar nu întotdeauna putem face *simplificări*.

Adică: pentru $x, y \in A, x \in A, a \neq 0$, avem:

$x = y \Rightarrow a \cdot x = a \cdot y$ (amplificare la stânga cu factorul nenul a)

$x = y \Rightarrow x \cdot a = y \cdot a$ (amplificare la dreapta)

Însă din $a \cdot x = a \cdot y, a \neq 0$, nu putem trage concluzia $x = y$ (nu putem simplifica prin a).

De exemplu: în inelul $\mathbb{Z}_6$ avem $\hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{4} \cdot \hat{5}$ și $\hat{2} \neq \hat{5}$.

Dacă însă A este un *inel fără divizori* ai lui zero și $a, x, y \in A, a \neq 0$, atunci:

$a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$ (simplificare la stânga cu factorul nenul a)

$x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y$ (simplificare la dreapta cu $a \neq 0$)

Într-adevăr: $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow a \cdot x - a \cdot y = 0 \Rightarrow a\,(x + (-y)) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ (penultima implicație având loc pentru că $a \neq 0$ și inelul nu are divizori ai lui zero.

2.3. Reguli de calcul într-un inel

Ca şi în structura de grup, într-un inel putem face calcule: în grupul $(A, +)$, în monoidul $(A, \cdot)$, dar și calcule specifice, datorate legăturii dintre cele două operații.

Propoziția următoare extinde la nivelul unui inel oarecare regulile de calcul algebric întâlnite la operațiile cu numere întregi, raționale, reale sau complexe.

PROPOZIŢIE

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel oarecare. Atunci:

1. $x \cdot 0 = 0 \cdot x$, $(\forall)\ x \in A$

2. $(\forall)$ avem: $\left.\begin{array}{l}(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -xy \\ (-x) \cdot (-y) = x \cdot y\end{array}\right\}$ regula semnelor

3. Dacă notăm $x + (-y)$ cu $x - y$ atunci:

$(\forall)\ x, y, z \in A$ $\left.\begin{array}{l}x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z \\ (y - z) \cdot x - z \cdot x\end{array}\right\}$ distributivitatea înmulțirii față de „scădere“

4. Într-un *inel comutativ* sunt adevărate formulele de calcul prescurtat învățate anterior:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ (unde $2\,ab = ab + b$)

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$(a + b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1} \cdot b + C_n^2\, a^{n-1} \cdot b^2 + \ldots + C_n^n\, b^n$, $a \in \mathbb{N}^*$

Demonstraţie

1. $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, de unde prin simplificare (în grupul $(A, +)$) prin $x \cdot 0$, deducem $x \cdot 0 = 0$; analog deducem $0 \cdot x = 0$.

2. Din $0 = 0 \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = x \cdot y + (-x) \cdot y$, deducem că $(-x) \cdot y$ este simetricul (opusul) lui $x \cdot y$, deci $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$; analog deducem că $x \cdot (-y) = -xy$.

3. $x \cdot (y - z) = x \cdot (y + (-z)) = x \cdot y + x \cdot (-z) = x \cdot y + (-xz) = xy - xz$

4. Se arată prin calcul direct, respectiv, pentru binomul lui Newton, demonstrație prin inducție, asemănătoare celei din clasa a X-a (exercițiu util).

OBSERVAŢIE

Legat de calculul într-un inel, să facem și următoarea remarcă:

Dacă un inel are cel puțin două elemente, atunci $1 \neq 0$.

Într-adevăr: dacă prin absurd am avea $1 = 0$, atunci $(\forall)\ x \in A$ avem $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$. De unde ar rezulta $A = \{0\}$, în contradicție cu ipoteza.

2.4. Inele de matrice cu elemente dintr-un inel oarecare

Avem în vedere o extindere a inelului de matrice pătratice cu elemente dintr-un inel numeric la un inel de matrice cu elemente dintr-un inel comutativ oarecare, care conţine cel puţin două elemente.

DEFINIŢIE

Dacă $x_{ij} \in A$, $i = \overline{1, n}$ şi $j = \overline{1, n}$ sunt elemente ale inelului $(A, +, \cdot)$, atunci un tablou de forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se numeşte **matrice** de ordin n, cu elemente din inelul $(A, +, \cdot)$.

Notăm cu $\mathcal{M}_n(A)$ mulţimea acestor matrice.

Pe mulţimea $\mathcal{M}_n(A)$ introducem două operaţii numite tot adunare (+) şi înmulţire (·), extensii ale celor cu acelaşi nume definite în clasa a X-a:

Dacă $X = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$ şi $Y = (y_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$, atunci

$$X + Y = (\alpha_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}, \text{ unde } \alpha_{ij} = x_{ij} + y_{ij} \Big\} \text{ operaţia de adunare din inelul } A$$

$$X \cdot Y = (\beta_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}, \text{ unde } \beta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \cdot y_{kj} \Big\} \text{ operaţia de înmulţire din inelul } A$$

PROPOZIŢIA 1

Dacă $(A, +, \cdot)$ este un inel comutativ, cu cel puţin două elemente atunci, $(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot)$ este un inel necomutativ, numit *inelul matricelor pătratice* de ordin n peste inelul A.

Proprietăţile celor două operaţii pot fi demonstrate asemănător celor din clasa a XI-a.

Reţinem că elementul zero al inelului este matricea $0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$,

iar elementul unitate este matricea $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$ (aici 0 este elementul zero al inelului, iar 1 este elementul unitate al inelului A).

Dacă $n \geq 2$, inelul $(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot)$ este necomutativ și are divizori ai lui zero, luând ca exemplu matricele $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \neq 0_n$ și $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \neq 0_n$ pentru care $X \cdot Y = 0_n$.

Exemplu

Considerăm $X = \{0, 1\}$ și mulțimea părților lui X, $\mathcal{P}(X)$.
Știm că $(\mathcal{P}(X), \Delta; \cap)$ este inel comutativ.

Fie matricele $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \varnothing & \{0\} \\ \{1\} & \{0,1\} \end{pmatrix}$, $\mathbb{N} = \begin{pmatrix} \{1\} & \{0\} \\ \{0,1\} & \varnothing \end{pmatrix}$. Să calculăm $X + Y$ și $X \cdot Y$

$X + Y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, unde

$a_{11} = \varnothing \,\Delta\, \{1\} = \{1\}$ $\quad a_{12} = \{0\} \,\Delta\, \{0\} = \varnothing$
$a_{21} = \{1\} \,\Delta\, \{0, 1\} = \{0\}$ $\quad a_{22} = \{0, 1\} \,\Delta\, \varnothing = \{0, 1\}$

$X \cdot Y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, unde

$b_{11} = (\varnothing \cap \{1\}) \,\Delta\, (\{0\} \cap \{0, 1\}) = \{1\} \,\Delta\, \{0\} = \{0, 1\}$ („linia I – coloana I“)
$b_{12} = (\varnothing \cap \{0\}) \,\Delta\, (\{0\} \cap \varnothing) = \varnothing \,\Delta\, \varnothing = \varnothing$ („linia I – coloana a II-a“)
$b_{21} = (\{1\} \cap \{1\}) \,\Delta\, (\{0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{1\} \,\Delta\, \{0, 1\} = \{0\}$ („linia a II-a – coloana I“)
$b_{22} = (\{1\} \cap \{0\}) \,\Delta\, (\{0, 1\} \cap \varnothing) = \varnothing \,\Delta\, \varnothing = \varnothing$ („linia a II-a – coloana a II-a“)

Unei matrice oarecare dintr-un inel de matrice peste un inel oarecare i se poate atașa un element din inel numit determinantul matricei (o extensie a noțiunii de determinant).

DEFINIŢIE

Dacă $X = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$, atunci $\det X \overset{\text{def.}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot X_{1\sigma(1)} \cdot X_{2\sigma(2)} \dots X_{n\sigma(n)}$,

unde $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$, $m(\sigma)$ = numărul inversiunilor permutării σ.

Toate proprietățile determinanților se extind pe caz general.

Suntem pregătiți să determinăm unitățile inelului de matrice pătratice cu elemente dintr-un inel oarecare.

PROPOZIŢIA 2

Matricea $X \in \mathcal{M}_n(A)$ este inversabilă în inelul $(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot)$ dacă și numai dacă $\det X \in U(A)$

Demonstraţie

Matricea $X \in \mathcal{M}_n(A)$ este inversabilă dacă există $Y \in \mathcal{M}_n(A)$ astfel încât

$$X \cdot Y = Y \cdot X = I_n \qquad (1)$$

Folosind proprietatea: determinantul produsului este egal cu produsul determinanților a două matrice și trecând la determinanți în (1), obținem:

$$\det X \cdot \det Y = \det Y \cdot \det X = 1, \text{ deci } \det X \in U(A).$$

Reciproc: presupunem că $\det X \in U(A)$.

Ca și în clasa a XI-a, construim în etape matricea inversă.

a) Construim X^t, matricea transpusă, obținută prin schimbarea liniilor matricei X în coloane.

b) Construim X^*, adjuncta matricei X, prin înlocuirea elementelor matricei X^t cu complemenții lor algebrici.

c) Verificăm egalitatea $X \cdot X^* = X^* \cdot X = (\det X) \cdot I_n$.

d) Deducem că $X^{-1} = (\det X)^{-1} \cdot X^*$.

Exemple

Fie $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{5} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$ și $Y = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Să arătăm că X este inversabilă și să calculăm X^{-1}.

$$\det X = \hat{5} \cdot \hat{1} - \hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{5} - \hat{6} = \widehat{11}$$

Deoarece $\det X = \widehat{11} \in U(\mathbb{Z}_{12})$ deducem că X este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$.

Parcurgând etapele descrise anterior obținem:

$$X^t = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{5} \end{pmatrix}; X^* = \begin{pmatrix} \hat{5} & -\hat{2} \\ -\hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}; X^{-1} = \left(\widehat{11}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{5} & -\hat{2} \\ -\hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{7} & \hat{2} \\ \hat{3} & \widehat{11} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\det Y = \hat{1} \cdot \hat{2} - \hat{0} \cdot \hat{3} = \hat{2}$, iar $\hat{2} \notin U(\mathbb{Z}_{12})$, deducem că Y nu este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$, deși determinantul matricei este nenul!

Reţineţi!

Într-un inel de matrice peste un inel oarecare noțiunea de matrice *inversabilă* nu coincide cu cea de matrice *nesingulară* (cu determinant nenul)!

Exerciții rezolvate

1. Fie $a \in \mathbb{Z}$ un număr întreg. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legile:
$x \perp y = x + y + a$; $x \top y = (x + a)(y + a) - a$.
Să se arate că $(\mathbb{Z}, \perp, \cdot)$ este inel comutativ, fără divizori ai lui 0.
Determinați elementele inversabile ale inelului.

Rezolvare

Verificăm axiomele de inel:

a) $(\mathbb{Z}, \perp)$ este grup comutativ
Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$; atunci:
- $(x \perp y) \perp z = (x + y + a) \perp z = x + y + a + z + a = x + y + z + 2a$, iar
$x \perp (y + z) = x \perp (y + z + a) = x \perp (y + z + a) + a = x + y + z + 2a$
Rezultă că legea $\perp$ este asociativă.
- Din $x \perp y = x + y + a = y \perp a$, rezultă că $\perp$ este comutativă.
- Din $x \perp \theta = x$ rezultă $x + \theta + a = x$, adică, $\theta = -a$ este elementul neutru al primei operații.
- $x \perp x' = \theta \Leftrightarrow x + x' + a = -a \Leftrightarrow x' = -x - 2a \in \mathbb{Z}$ este simetricul elementului x în raport cu $\perp$.
Rezultă că toate elementele lui $\mathbb{Z}$ sunt simetrizabile în raport cu $\perp$.

b) $(\mathbb{Z}, \top)$ este monoid comutativ
- $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{Z}$ avem
$(x \cdot y) \cdot z = [(x + a)(y + a) - a] \cdot z =$
$= [(x + a)(y + a) - a + a] \cdot (z + a) - a = (x + a)(y + a)(z + a) - a$
$x \cdot (y + z) = x \cdot [(y + a)(z + a) - a] = (x + a)[(y + a)(z + a) - a] =$
$= (x + a)(y + a)(z + a) - a.$ Deci legea este asociativă.
- Pentru $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{Z},\ x \top y = (x + a)(y + a) - a = (y + a)(x + a) - a = y \top x$ (legea $\cdot$ este comutativă).
- Elementul neutru:
Căutăm $e \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \top e = e \top x = x\ (\forall)\ x \in \mathbb{Z}$.
Datorită comutativității, ne ocupăm de egalitatea
$x \top e = x \Leftrightarrow (x + a)(e + a) - a = x \Leftrightarrow (x + a)(e + a) = x + a.$
Deoarece ultima egalitate trebuie să aibă loc, *pentru orice* $x \in \mathbb{Z}$, deducem că $e + a = 1$, adică $e = 1 - a \in \mathbb{Z}$ (element neutru).

c) Demonstrăm că a doua lege, $\top$, este distributivă față de prima lege, $\perp$.
Dacă $x, y, z \in \mathbb{Z}$, atunci:
$x \top (y \perp z) = x \top (y + z + a) = (x + a)(y + z + 2a) - a$
$(x \top y) \perp (x \top z) = [(x + a)(y + a) - a] \perp [(x + a)(z + a) - a] =$
$= (x + a)(y + a) - a + (x + a)(z + a) - a + a =$
$= (x + a)(y + a) + (x + a)(z + a) - a = (x + a)(y + z + 2a) - a.$
Rezultă că $x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$.
Din comutativitate deducem și a doua parte a axiomei.

Arătăm că inelul nu are divizori ai lui zero (este deci domeniu de integritate).
Într-adevăr: $x \top y = \theta \Leftrightarrow (x + a)(y + a) - a = -a \Leftrightarrow (x + a)(y + a) = 0$.

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $x + a = 0$ sau $y + a = 0 \Leftrightarrow x = -a$ sau $y = -a$, adică $x = \theta$ sau $y = \theta$
(echivalența (1) are loc pentru că inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este domeniu de integritate).
Să determinăm elementele inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$.
$x \in \mathbb{Z}$ este inversabil $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \top x' = x' \top x = e$
Deoarece a doua lege este comutativă, reținem:
$x \top x' = e \Leftrightarrow (x + a)(x' + a) - a = 1 - a \Leftrightarrow (x + a)(x' + a) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + a$ este divizor al lui $1 \Leftrightarrow x + a \in \{-1, 1\}$.
Deducem că inelul $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ are două elemente simetrizabile: $1 - a$ și $-1 - a$.

2. Numim *întreg liber de pătrate* un număr întreg $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ care nu este divizibil prin pătratul unui număr prim.
Știm că ecuația $x^2 - d = 0$ are două soluții complexe (eventual confundate).
Notăm cu $\sqrt{d}$ una dintre ele și $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] = \{x \in \mathbb{C} \mid x = a + b\sqrt{d}\,,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să arătăm că $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,], +, \cdot)$ este inel comutativ.

b) Definim funcția („normă“) $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] \to \mathbb{Z}$ prin $N(a + b\sqrt{d}\,) = a^2 - db^2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$. Să se demonstreze:

1) $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$ $(\forall)$ $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$.

2) Elementul $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ dacă și numai dacă $N(z) \in \{-1, 1\}$.

3) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ are o infinitate de elemente inversabile.

Rezolvare

a) Să observăm că adunarea și înmulțirea numerelor complexe sunt legi de compoziție pe $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$.
$(a + b\sqrt{d}\,) + (a' + b'\sqrt{d}\,) = (a + a') + (b + b')\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$
$(a + b\sqrt{d}\,) \cdot (a' + b'\sqrt{d}\,) = (aa + dbb') + (ab + a'b)\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$
Proprietățile de inel ale acestor legi sunt cunoscute, ele conferind mulțimii $\mathbb{C}$ structură de inel comutativ.
Elementul zero al inelului $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ este numărul complex $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{d}$, iar elementul unitate este numărul complex $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{d}$.
Să mai observăm că acest inel nu are divizori ai lui zero.

b) Notăm cu $z^* = a - b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ („conjugatul“ numărului $\mathbb{Z}$).
Deci $N(z) = z \cdot z^*$. Ținând cont că $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$ avem:
1) $N(z_1 \cdot z_2) = (z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1 \cdot z_2)^* = (z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1^* \cdot z_2^*) = N(z_1) \cdot N(z_2)$.

2) Fie $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ un element simetrizabil; deci există $z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ astfel încât $z \cdot z' = 1$. Trecând la „normă“, obținem $N(z \cdot z') = N(1) \Leftrightarrow N(z) \cdot N(z') = 1$, adică $N(z) \in \{-1, 1\}$
Reciproc: dacă $N(z) \in \{-1, 1\}$, luăm $z' = N(z) \cdot z^*$ și avem:
$z \cdot z' = N(z) \cdot z \cdot z^* = N(z)^2 = 1$, deci z este inversabil în $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Reținem: $a + b\sqrt{d} \in U[\sqrt{d}] \Leftrightarrow (a^2 + db^2) = \pm 1$.

3) Conform punctului anterior, $a + b\sqrt{2} \in U[\mathbb{Z}\sqrt{2}] \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = \pm 1$ (1)
$(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, $x_n \in \mathbb{Z}$, $y_n \in \mathbb{Z}$ (se obține în urma ridicării la putere cu formula binomului lui Newton și gruparea adecvată a termenilor).
Atunci: $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$, deci $x_n^2 - y_n^2 \cdot 2 = (x_n + y_n\sqrt{2})(x_n - y_n\sqrt{2}) =$
$= (1 + \sqrt{2})^n \cdot (1 - \sqrt{2})^n = (1 - 2)^n = (-1)^n = \pm 1$.
Numerele întregi, x_n, y_n verifică egalitatea (1) deci numerele distincte $(1 + \sqrt{2})^n$, $n \in \mathbb{N}$, sunt inversabile.

OBSERVAȚIE

În cazul $d > 0$, ecuația $a^2 - db^2 = 1$, numită ecuația lui Pell, poate fi rezolvată, având o infinitate de soluții $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Prin urmare, inelul $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$, $d > 0$, are o infinitate de elemente inversabile.

3. Fie $\mathcal{C}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$.
Arătați că $(\mathcal{C}([0, 1]), +, \cdot)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero.

Rezolvare

Cele două operații sunt legi de compoziție deoarece suma și produsul a două funcții continue sunt funcții continue. Restul proprietăților sunt evidente, ele conferind mulțimii $\mathcal{C}([0, 1])$ o structură de inel comutativ.
Considerăm funcțiile continue $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Observăm că funcțiile sunt continue pe $[0, 1]$, nenule, iar $f \cdot g = 0$.
Deci f și $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ sunt divizori ai lui zero.

4. Fie $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+\hat{3}b & b \\ \hat{4}b & a+\hat{3}b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_6,\ \det A = \hat{1} \right\}$.

Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu grupul lui Klein.

Rezolvare

$\det A = (a + \hat{3}\,b)^2 - \hat{4}\,b^2 = a^2 + 2\,(\hat{3} \cdot ab) + 3b^2 - 4b^2 = a^2 - b^2 = a^2 - b^2 = \hat{1}$.

Luând pe rând $\hat{b} \in \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\right\}$, obținem:

$(a, b) \in \left\{\left(\hat{1}, \hat{0}\right), \left(\hat{5}, \hat{0}\right), \left(\hat{2}, \hat{3}\right), \left(\hat{4}, \hat{3}\right)\right\}$. Deci $G = \{I_2, A, B, C\}$ unde

$A = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{5} \end{pmatrix}$. Avem

$A^2 = B^2 = C^2 = I_2, AB = BA = C, AC = CA = B, BC = CB = A$.

Rezultă că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu grupul lui Klein.

5. Să se rezolve în inelul $\mathbb{Z}_6$ sistemul $\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}\,y = \hat{3} \\ \hat{4}x + \hat{3}\,y = \hat{1} \end{cases}$

Rezolvare

Prezentăm mai multe metode.

Metoda substituției

Un singur coeficient este inversabil în $\mathbb{Z}_6$, adică $\hat{5}$, coeficientul lui x din prima ecuație.
Îl scoatem pe x din prima ecuație și îl înlocuim în a doua.
Obținem $\hat{5}\,x = \hat{3} - \hat{2}\,y \Leftrightarrow (\hat{5})^{-1}(\hat{5}\,x) = (\hat{5})^{-1}(\hat{3} - \hat{2}\,y) \Leftrightarrow x = \hat{5}\,(\hat{3} - \hat{4}\,y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \hat{3} - \hat{4}\,y$.
După înlocuire, ecuația a doua devine:
$\hat{4}\left(\hat{3} - \hat{4}\,y\right) + \hat{3}\,y = \hat{1} \Leftrightarrow \hat{5}\,y = \hat{1} \Leftrightarrow y = \left(\hat{5}\right)^{-1} \cdot \hat{1} = \hat{5}$.
Pentru $y = \hat{5}$, obținem $x = \hat{3} - \hat{4} \cdot \hat{5} = \hat{1}$. Sistemul are soluția unică $x = \hat{1}$, $y = \hat{5}$.

Metoda reducerii

Eliminăm necunoscuta x, amplificând prima ecuație cu $-\hat{4}$ și a doua cu $\hat{5}$.

Obținem sistemul: $\begin{cases} -\hat{2}\,x - \hat{2}\,y = \hat{0} \\ \hat{2}\,x + \hat{3}\,y = \hat{5} \end{cases}$.

Adunând cele două ecuații, se reduce și x și obținem $y = \hat{5}$.

Asemănător, eliminând y între cele două ecuații, obținem $x = \hat{1}$.

Verificăm că perechea $(\hat{1}, \hat{5})$ este soluție a sistemului (1).

OBSERVAȚIE

Amintiți-vă că într-un inel cu divizori ai lui 0 egalitățile $a \cdot b = a \cdot c$ și $b = c$ nu sunt echivalente.

Dacă a este element inversabil, atunci $b = c \Leftrightarrow a \cdot b = a \cdot c$.

Prin urmare: amplificând ecuațiile unui sistem cu coeficienți dintr-un inel, prin *elemente neinversabile*, nu obținem ecuații echivalente.

Procedând astfel este posibil să obține la final „soluții străine". Le putem elimina numai în urma verificării în sistemul dat inițial.

Metoda matriceală

Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}$ matricea coeficienților.

Sistemul se scrie echivalent $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} \\ \hat{1} \end{pmatrix}$ (1)

Deoarece $\det A = \hat{1} \in U(\mathbb{Z}_6)$, deducem că matricea A este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ și deci sistemul are soluție unică. Amplificând la stânga în (1) prin A^{-1} obținem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{3} \\ \hat{1} \end{pmatrix}.$$

Calculăm A^{-1}:

$$A^t = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix};\ A^* = \begin{pmatrix} \hat{3} & -\hat{2} \\ -\hat{4} & \hat{5} \end{pmatrix};\ A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^* = \begin{pmatrix} \hat{3} & -\hat{2} \\ -\hat{4} & \hat{5} \end{pmatrix}.$$

Atunci: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & -\hat{2} \\ -\hat{4} & \hat{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{3} \\ \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{5} \end{pmatrix}$. Găsim $x = \hat{1}$, $y = \hat{5}$.

OBSERVAȚIE

Cadrul restrâns al programei școlare nu permite o abordare mai generală a rezolvării sistemelor de ecuații liniare cu coeficienți într-un inel oarecare, prin metode matriceale (regulile lui Cramer sau Kroneker-Capelli).

6. Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ cu proprietatea $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

Rezolvare

Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{Z}_3$.

Obținem sistemul: $\begin{cases} x^2 + yz = \hat{2} \\ xy + yt = \hat{1} \\ zx + zt = \hat{1} \\ zy + t^2 = \hat{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = \hat{2} \\ y(x+t) = \hat{1} \\ z(x+t) = \hat{1} \\ zy + t^2 = \hat{2} \end{cases}$.

Scăzând ultima ecuație din prima obținem:

$x^2 - t^2 = \hat{0} \Leftrightarrow (x - t)(x + t) = \hat{0} \Leftrightarrow x - t = \hat{0}$ (1) sau $x + t = \hat{0}$ (2)
(deoarece $\mathbb{Z}_3$ nu are divizori ai lui zero).
Observăm că relația (2) nu poate avea loc, altfel ecuațiile a doua și a treia ar fi echivalente cu $\hat{0} = \hat{1}$.
Rămâne soluția (1) și de aici $t = x$.
Comparând ecuațiile 2) și 3) ale sistemului obținem $z = y$ și sistemul se reduce la

$\begin{cases} x^2 + y^2 = \hat{2} \\ xy + xy = \hat{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \hat{2} \\ xy = \hat{2} \end{cases}$

Rezultă soluțiile ($x = \hat{1}, y = \hat{2}$ și $x = \hat{2}, y = \hat{1}$) și matricele $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

7. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu cel puțin două elemente $(1 \neq 0)$ și $M = \{x \in A \mid x^2 = x\}$.
a) Să se demonstreze că dacă M este finită, atunci M are un număr par de elemente.
b) Dacă A este finită, să se calculeze produsul elementelor nenule din M.
c) Dacă $M = A$, să se arate că:
i) $x + x = 0$, $\forall\, x \in A$; ii) A este comutativ.

Rezolvare

a) Să observăm că dacă $x \in M$ atunci $1 - x \in M$. Într-adevăr:
$(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x = 1 - x$.
Deci elementele mulțimii M se pot aranja în perechi de forma $(x, 1 - x)$.
Demonstrația se încheie dacă arătăm că elementele oricărei perechi sunt diferite.
Într-adevăr: dacă ar exista $x_0 \in M$ astfel încât $x_0 = 1 - x_0$ (1), prin amplificare cu x_0, am obține $x_0^2 = x_0 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = 0$.
Atunci (1) ar deveni $0 = 1$, contradicție.

b) Avem două cazuri:

• $M = \{0, 1\}$. În acest caz, produsul este 1.

• M conține și alte elemente în afară de 0 și 1.

Fie x un astfel de element. Atunci și $1 - x \in M$, $1 - x \neq 0$ conform punctului anterior. Însă $x(1 - x) = x - x^2 = 0$. În acest caz produsul tuturor elementelor nenule din M este 0.

c) i) Dacă $x^2 = x$ $(\forall)$ $x \in A$, alegând $x = -1$ obținem $(-1)^2 = (-1)$.

Pe de altă parte, în orice inel $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ (regula „semnelor").

Rezultă $1 = -1$ adică $1 + 1 = 0$, de unde prin amplificare cu $x \in A$ obținem: $x + x = 0$.

ii) Acum: fie $x, y \in A$. Demonstrăm că $xy = yx$.

Din ipoteză avem că $(x + y)^2 = x + y$ (1)

Însă $(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x + y + xy + yx$.

Comparând cu (1) deducem $xy + yx = 0$; echivalent $xy = - yx$, iar din $- yx = yx$, obținută la i) deducem $xy = yx$, c.c.t.d.

OBSERVAȚIE

Un element $x \in A$ cu proprietatea $x^2 = 0$ se numește element *idempotent* al inelului. Un inel care are toate elementele idempotente se numește *inel boolean*.

Exerciții propuse

1. Arătați că mulțimea propusă are o structură algebrică de inel în raport cu operațiile date:

a) $(\mathbb{Z}, *, \top)$ unde $x * y = x + y + 2$ și $x \top y = 2xy + yx + 4y + 6$.

b) $(\mathbb{Z}, \top, \perp)$, unde $x \top y = x + y - 3$; $x \perp y = xy - 3y + 12$.

c) $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$, în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.

d) $\{a + b\sqrt{3}\, i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor

e) $(\mathbb{Z}[i], +, *)$, unde $x * y = x \cdot y + \operatorname{Im} x \cdot \operatorname{Im} y, x, y \in \mathbb{C}$.

f) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$, unde $(a, x) + (b, y) = (a + b, x + y)$ și $(a, x) \cdot (b, y) = (ab, ay + bx + xy)$.

g) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

h) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

2. Arătați că următoarele mulțimi *nu* formează o structură de inel împreună cu operațiile de adunare și înmulțire.

a) $3\mathbb{Z}$; b) $\{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in 2\mathbb{Z}\}$; c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 3\mathbb{Z} \right\}$.

3. Arătați că următoarele mulțimi de matrice împreună cu operațiile de adunare și înmulțire formează o structură de inel.

a) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Arătați că mulțimea $M = \left\{\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Q}, \, x \in \mathbb{R}\right\}$ este inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.
Are inelul divizori ai lui zero?

5. Fie $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$. Să se arate că:

a) $(M, +, \cdot)$ este inel necomutativ;
b) în inelul M, orice element x este inversabil sau este nilpotent (adică există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^k = 0_3$).
c) Calculați A^n, unde $A \in M$, $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că $(\mathbb{Q}(\varepsilon), +, \cdot)$ este inel comutativ. Determinați elementele inversabile ale inelului.

7. Arătați că $(\mathbb{Z}[i\sqrt{3}\,] = \{x + iy\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ este inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe. Determinați elementele inversabile ale inelului.

8. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ să fie inel.

9. Pe mulțimea $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ considerăm legile de adunare $\oplus$ și înmulțire $\odot$ modulo n. Să se arate că $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$ este inel comutativ. Determinați elementele inversabile ale inelului $(\mathcal{R}_{12}, \oplus, \odot)$.

10. Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} \hat{3}x + y = \hat{9} \\ x + \hat{2}y = \hat{8} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$; b) $\begin{cases} \hat{3}x + y = \hat{4} \\ \hat{x} + \hat{2}y = \hat{3} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_{10}$; c) $\begin{cases} x + y = \hat{1} \\ x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$.

11. Considerăm matricele $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$, $U = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{4} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

a) Calculați $U + V$, UV, VU.
b) Arătați că matricele U, V sunt inversabile și calculați U^{-1}, V^{-1}.
c) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ astfel încât $\mathrm{U} \times \mathrm{V} = I_2$.
d*) Arătați că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $U^n = I_2$; analog pentru V.

***

12. Fie $(G, +)$ un grup comutativ. Pe mulțimea $H = \{f: G \rightarrow G \,/\, f(x + y) = f(x) + f(y)\}$ definim legile de compoziție notate $\oplus$ și $\circ$ astfel $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ și $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Să se arate că $(H, \oplus, \circ)$ este inel.

13. Fie $A = \{f: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funcție}\}$. Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este inel de funcții cu divizori ai lui zero.

14. Fie $\mathcal{A} = M = \{xI_2 + y \,/\, x, y \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

Să se arate că $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ este inel în raport cu operațiile uzuale.

15. Fie $(A_1, +, \cdot)$, $(A_2, +, \cdot)$ două inele. Pe mulțimea $A_1 \times A_2$ introducem legile de compoziție: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ și $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
a) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este inel (se numește *produsul direct* al inelelor A_1 și A_2).
b) Să se determine elementele inversabile ale produsului direct $\mathbb{Z}_4$ și $\mathbb{Z}$.

16. Fie $A = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.
Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.

17. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\mathcal{M}_A = \{A \cdot X \cdot A \mid X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.

Să se arate că $(\mathcal{M}_A, +, \cdot)$ este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

18. a) Să se arate că ecuația $X^2 = 0_2$, are patru soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.
b) Să se arate că inelul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$ are 6 elemente inversabile.

19. Fie $T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ și $G = \{A \in T \,/\, \det A = \hat{1}\}$.

a) Determinați card T.
b) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup.
c) Arătați că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$.

20. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+y+z=\hat{1} \\ \hat{2}x+\hat{3}y+z=\hat{1} \\ x+y+\hat{2}z=\hat{4} \end{cases}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$; b) $\begin{cases} \hat{2}x+y+z=\hat{4} \\ x+y+\hat{3}z=\hat{5} \\ \hat{3}x+\hat{2}y+\hat{4}z=\hat{9} \end{cases}$ $x, y, z \in \mathbb{Z}_{12}$.

21. Determinați $a \in \mathbb{Z}_6$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ este element inversabil al inelului.

22. Determinați $f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ astfel încât $f(x) + f(\hat{4}x) = \hat{3}x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}_7$.

*__23.__ Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 204 & 376 & 818 \\ 222 & 321 & 253 \\ -88 & 424 & 496 \end{pmatrix}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) det A este număr par; b) det a este divizibil cu 3;

c) A este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$; d) A este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

24. a) Verificați că $a + a + a + a + a = \hat{0}$, $(\forall)\, a \in \mathbb{Z}_5$.

b) Deduceți că $(a + b)^5 = a^5 + b^5$, $(\forall)\, a, b \in \mathbb{Z}_5$.

25. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in A$, $a \cdot b = b \cdot a$. Să se arate că:

a) $a^n \cdot b^m = b^m a^n$ $(\forall)\, m, n \in \mathbb{N}$.

b) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

26. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel necomutativ și $a, b \in A$.

Presupunem că $1 - ab$ este inversabil și u este inversul său.

a) Calculați $(1 - ba)(1 + bua)$.

b) Deduceți că dacă $1 - ab$ este inversabil, atunci $1 - ba$ este inversabil.

27. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea $x^6 = x$, $(\forall)\, x \in A$.

Demonstrați că $x^2 = x$ $(\forall)\, x \in A$. Dați exemple de inel cu această proprietate.

28. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel în care $0 \neq 1$. Arătați că dacă grupul $(U(a), \cdot)$ are ordin finit impar, atunci $1 + 1 = 0$.

2.3. Corpuri

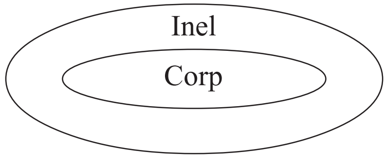
DEFINIŢIE

Fie $(K, +, \cdot)$ un inel cu cel puţin două elemente.
Inelul $(K, +, \cdot)$ se numeşte **corp** dacă

$$(\forall)\ x \in K, x \neq 0\ (\exists)\ x' \in K \text{ astfel încât } x \cdot x' = x' \cdot x = 1$$

Aşadar corpul este un inel particular, în care orice element nenul este inversabil.

Corpul $(K, +, \cdot)$ se numeşte **comutativ** dacă inelul este comutativ (a doua lege de compoziţie este comutativă).



Exemple

1. Corpurile numerice

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative.

2. Corpuri de numere pătratice

Reamintim că $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ se numeşte liber de pătrate dacă nu este divizibil cu pătratul oricărui număr prim.

În acest caz mulţimea

$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire ale mulţimii $\mathbb{C}$, este corp comutativ, numit *corp de numere pătratice* ($\sqrt{d}$ este una dintre cele două rădăcini complexe ale ecuaţiei $x^2 = d$).

Într-adevăr: am văzut în paragraful anterior că $(\mathbb{Z}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ este inel comutativ.

Asemănător demonstrăm că şi $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ este inel comutativ cu cel puţin două elemente.

În plus: în acest inel orice element nenul este inversabil: dacă $z = a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ şi $z \neq 0$, atunci:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - b^2 \cdot d} = \frac{a}{a^2 - b^2 \cdot d} - \frac{b}{a^2 - b^2 \cdot d} \cdot \sqrt{d} \in \mathbb{Q}\ \sqrt{d}$$ este inversul lui z în $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

În particular: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; $\mathbb{Q}(i)$; $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ sunt corpuri pătratice (am preferat notaţia $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ în locul scrierii $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$).

3. Exemplu de corp necomutativ

Fie $H = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C} \right\}$.

Este uşor de verificat că H împreună cu operaţia de adunare şi înmulţire a matricelor este inel (I_2 este elementul unitate).

Rămâne să arătăm că orice element $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \in H, A \neq 0_2$, este element inversabil al inelului.

Într-adevăr: $\det A = u \cdot \overline{u} + v \cdot \overline{v} = |u|^2 + |v|^2 = 0 \Leftrightarrow |u| = 0$ şi $|v| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ şi $v = 0$ $\Leftrightarrow A = 0$.

Rezultă că $A \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Deoarece matricea $A' = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{u}}{\det A} & \dfrac{-v}{\det A} \\ \dfrac{\overline{v}}{\det A} & \dfrac{u}{\det A} \end{pmatrix} \in H$ şi $AA' = A'A = I_2$, rezultă că A este inversabilă; deci $(H, +, \cdot)$ este corp.

Arătăm că înmulţirea pe H este necomutativă.

Fie $U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Avem: $U \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $V \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$; deci $UV \neq VU$.

OBSERVAŢIE

Există oare corpuri *finite* necomutative?

Răspunsul este negativ şi este cunoscut cu numele de *teorema lui Wedderburn*: *Orice corp finit este comutativ*.

4. Corpul $\mathbb{Z}_p$ al claselor de resturi modulo p.

> Dacă p este număr prim, atunci inelul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este corp comutativ.

Ştim că în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ clasa $\hat{a}$ este element inversabil dacă şi numai dacă $(a, n) = 1$. (1)

Astfel inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ nu este corp deoarece anumite elemente nenule sunt neinversabile: de exemplu $\hat{2}, \hat{3}$ etc.

În schimb, dacă p este prim, atunci pentru orice k, $1 \leq k \leq p - 1$, avem $(k, p) = 1$, deci clasele nenule, $\hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{p-1}$ sunt inversabile.

Rezultă că $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este corp comutativ, numit *corpul claselor de resturi modulo p*.

Proprietăţi

1. Orice corp este inel fără divizori ai lui zero.

Demonstraţie Demonstrăm prin reducere la absurd

Presupunem că există $x, y \in K$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, astfel încât $x \cdot y = 0$

Atunci: $x \cdot y = 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot (xy) = 0 \Rightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$, contradicție.

2. Mulțimea elementelor nenule ale unui corp formează împreună cu înmulțirea o structură de grup.

Demonstraţie Fie $(K, +, \cdot)$ un corp și $K^* = K \setminus \{0\}$.

- Dacă $a, b \in K^*$, atunci $a \cdot b \in K^*$, deci K^* este parte stabilă a lui K în raport cu înmulțirea.
- Înmulțirea este asociativă și are elementul neutru 1 (elementul unitate al inelului).
- Dacă $x \in K^*$, atunci x este element inversabil al inelului $(K, +, \cdot)$ și $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

  Deci x este element inversabil în raport cu operația indusă.

Deducem că perechea $(K, *, \cdot)$ este grup.

În particular $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ este grup, unde p este număr prim.

3. Orice inel fără divizori ai lui zero, finit, este corp.

Demonstraţie Notăm acest inel prin A. Arătăm că orice element $a \in A$, $a \neq 0$, este inversabil.

Pentru aceasta avem în vedere funcția $f_a : A \to A$, $f_a(x) = a \cdot x$.

Funcția este injectivă: $f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$ (deoarece inelul nu are divizori ai lui zero).

Deoarece mulțimea A este finită, rezultă că f_a este și surjectivă.

Atunci: există $a' \in A$ astfel încât $f_a(a') = 1$, ceea ce este echivalent cu $aa' = 1$, adică a este inversabil la dreapta.

Analog: folosind funcția $g_a(x) = x \cdot a$, demonstrăm că a este inversabil și la stânga.

Conform unei proprietăți cunoscute, dacă un element este inversabil și la stânga și la dreapta, atunci el este inversabil.

OBSERVAŢIE

În demonstrație a fost esențial faptul că A este finită.

O dovadă în plus este inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ care este fără divizori ai lui zero și nu este corp.

2.4. Morfisme de inele şi corpuri

Ca şi în cazul grupurilor, o modalitate de identificare şi clasificare a structurilor algebrice de inel (corp) este apelul la morfisme și izomorfisme.

DEFINIŢIA 1

Fie $(A, +, \cdot)$ şi $(A', +, \cdot)$ două inele. Se numeşte **morfism de inele** o funcţie $f: A \to A'$ cu proprietățile:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ $(\forall)$ $x, y \in A$;
2. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ $(\forall)$ $x, y \in A$;
3. $f(1_A) = 1_{A'}$.

Un morfism de la un inel la el însuşi se numeşte *endomorfism*.

Exemple

1. Funcţia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, f(x) = x$ este morfism de inele.

2. Funcţia $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, g(x) = \hat{x}$ este morfism de inele.

3. Funcţia $h: \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,], h(a + b\sqrt{2}\,) = a - b\sqrt{2}$ este un endomorfism de inele.

OBSERVAŢII

1. Prima condiţie din definiţia morfismului de inele arată că funcţia este morfism de grupuri. De aici rezultă că $f(0_A) = 0_{A'}$ şi $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)$ $x \in A$

2. Condițiile 1) și 2) din definiția morfismului de inele nu atrag și condiția a treia, cu referire la „transportul" elementului unitate.
Este cazul funcţiei $f: A \to A', f(x) = 0_{A'}, (\forall)$ $x \in A$, care îndeplinește primele două condiţii, dar $f(1_A) = 0_{A'} \neq 1_A$.

DEFINIŢIA 2

Fie $(A, +, \cdot)$ şi $(A', +, \cdot)$ două inele. Se numeşte **izomorfism de inele** o funcţie $f: A \to A'$ cu proprietățile:

1. f este bijectivă;
2. f este morfism de inele.

În acest caz spunem că inelele A și A' sunt izomorfe și scriem $A \simeq A'$.
Un izomorfism de inele de la un inel la el însuşi se numeşte **automorfism** al inelului.

Exemple

1. Fie inelele $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ şi $(A, +, \cdot)$, unde $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Funcţia $f : A \to \mathbb{Z}[i], f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + bi, (\forall)\ a, b \in \mathbb{Z}$ este un izomorfism de inele.

Verificare

1) f este bijectivă (verificaţi).

2) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}$, atunci

$$f(x+y) = f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ -(b+b') & a+a' \end{pmatrix}\right) = (a+a') + i(b+b') = (a+ib) + (a'+ib') = f(x) + f(y)$$

$$f(x \cdot y) = f\left(\begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+a'b \\ -(ab'+a'b) & aa'-bb' \end{pmatrix}\right) = (aa'-bb') + i\,(ab'+a'b) =$$

$$= (a+bi)\,(a+b'i) = f(x) \cdot f(y)$$

3) $f(I_2) = 1$

2. Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$ este un automorfism al inelului $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, după cum se poate uşor verifica.

OBSERVAŢIE

O funcţie bijectivă $f : A \to A'$ care îndeplineşte primele două condiţii din definiţia morfismului de inele o îndeplineşte automat şi pe a treia.

Într-adevăr. Să arătăm că $f(1_A) = 1_{A'}$

Fie $x' \in A'$. Din condiţia de surjectivitate deducem că există $x \in A$ astfel încât $f(x) = x'$. Atunci:

$x' = f(x) = f(x \cdot 1_A) = f(x) \cdot f(1_A) = x' \cdot f(1_A)$ şi

$x' = f(x) = f(1_A \cdot x) = f(1_A) \cdot f(x) = f(1_A) \cdot x'$.

Rezultă că $f(1_A)$ este elementul unitate al inelului A', deci $f(1_A) = 1_{A'}$

Prin urmare, în exemplul 1) nu mai era necesară verificarea condiţiei 3).

DEFINIŢIA 3

Fie $(K, +, \cdot)$ şi $(K', +, \cdot)$ două corpuri. Funcţia $f : K \to K'$ se numeşte **morfism de corpuri** dacă este morfism al inelelor K şi K'.

Un morfism de la un corp la el însuşi se numeşte *endomorfism* al corpului respectiv.

Exemple

1. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ este morfism de corpuri.

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x) = \overline{x}$ este endomorfism al corpului C.

OBSERVAŢII

1. Dacă $f : K \to L$ este un morfism de corpuri, atunci f este şi morfism al grupurilor $(K, +)$ şi $(L, +)$, respectiv $(K^*, \cdot)$ şi $(L^*, \cdot)$.
În particular avem $f(0_K) = 0_{K'}$; $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\ x \in K$;
$f(1_K) = 1_{K'}$; $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $(\forall)\ x \in K^*$

2. Orice morfism de corpuri este o funcţie injectivă.
Într-adevăr: fie $f : K \to K'$ un morfism de corpuri şi $a, b \in K, a \neq b$.
Atunci, din $a - b \neq 0$, rezultă că $a - b$ este inversabil şi deci există $c \in K$ astfel încât $(a - b) \cdot c = 1_K$. Deducem
$f((a - b) \cdot c) = f(1_K) \Leftrightarrow f(a - b) \cdot f(c) = 1_{K'}$.
Ultima egalitate arată că $f(a - b) \neq 0$, de unde $f(a) - f(b) \neq 0$, adică $f(a) \neq f(b)$, c.c.t.d.

DEFINIŢIA 4

Fie $(K, +, \cdot)$ şi $(K', +, \cdot)$ două corpuri. Funcţia $f: K \to K'$ se numeşte **izomorfism** de corpuri dacă este izomorfism al inelelor K şi K'.

În acest caz corpurile K şi K' sunt izomorfe, notând $K \simeq K'$. Un izomorfism de la un corp la el însuşi se numeşte *automorfism* al corpului respectiv.

Exemple

1. Să considerăm corpurile $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ şi $(K, +, \cdot)$, unde $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Funcţia $f : K \to \mathbb{C}, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right) = a + bi$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$ este un izomorfism de corpuri, deoarece:

1) f este bijectivă (evident).

2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ şi $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ $(\forall)\ x, y \in K$ (verificare asemănătoare celei din exemplul 1 de la izomorfisme de inele).

2. Funcţia $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}), f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ este un automorfism al corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (verificaţi).

Exerciţi rezolvate

1. Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}$. Arătaţi că mulţimea K împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor este o structură de grup.

Rezolvare

Notăm $M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$.

Observăm că $M(a, b)$ se poate scrie $M(a, b) = a \cdot I + b \cdot X$, unde $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarcăm că $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,I$.

- Verificăm că adunarea şi înmulţirea sunt legi de compoziţie pe K.
  $M(a, b) + M(c, d) = (aI + bX) + (cI + dX) = (a + c)I + (b + d)X = M(a + c, b + d) \in K$
  $M(a, b) \cdot M(c, d) = (aI + bX) + (cI + dX) = (ac + 2bd)I + (ad + bc)X =$
  $= M(ac + 2dd, ad + bc) \in K$
- Axiomele inelului sunt evidente, fiindcă adunarea şi înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ au proprietăţile respective.
  (Elementul zero este matricea $M(0, 0)$, iar elementul unitate este matricea $M(1, 0) = I$.
- Matricea $M(a, b)$ are determinatul $a^2 - 2b^2$ şi este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ dacă şi numai dacă determinantul său este nenul:
  $\det(M(a, b)) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ şi $b = 0$, deoarece $a, b \in \mathbb{Q}$

  $(M(a, b))^t = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$, $(M(a, b))^* = \begin{pmatrix} a-b & -b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$

  $$(M(a, b))^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a-b}{a^2-2b^2} & \dfrac{-b}{a^2-2b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2-2b^2} & \dfrac{a+b}{a^2-2b^2} \end{pmatrix} \in K$$

Rezultă că matricea $M(a, b)$ este inversabilă în K dacă şi numai dacă este nenulă.
Prin urmare toate elementele nenule ale inelului $(K, +, \cdot)$ sunt inversabile, deci $(K, +, \cdot)$ este corp.

2. Să se scrie tabla adunării și înmulțirii unui corp cu 4 elemente.

Rezolvare

Fie $K = \{0, 1, x, y\}$ un corp cu patru elemente.

a) Observăm că $1 + 1 \neq 1$ (pentru $1 \neq 0$) și $1 + 1 = 0$

Într-adevăr: dacă $1 + 1 \neq 0$ și $1 + 1 = x$ (sau y) atunci

$x + x = (1 + 1) + (1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$

(deoarece grupul $(K, +)$ are patru elemente).

Însă: $x + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (1 + 1) = 0$, adică x și $1 + 1$ sunt divizori ai lui zero în corp; contradicție.

Deci, $1 + 1 = 0$, iar de aici prin amplificare deducem $x + x = 0$, $y + y = 0$.

Tabla adunării este redată mai jos (am ținut cont de faptul că pe linii și pe coloane elementele nu se pot repeta). Urmăriți felul cum este structurată tabla. Reiese că grupul $(K, +)$ este izomorf cu grupul lui Klein.

$+$	0	1	x	y
0	0	1	x	y
1	1	0	y	x
x	x	y	0	1
y	y	x	1	0

b) Să vedem cine este x^2.

Evident $x^2 \neq 0$, dacă am avea $x^2 = 1$, atunci

$(x - 1)^2 = x^2 - x - x + 1 = (1 + 1) - (x + x) = 0 + 0 = 0$;

rezultă $x - 1 = 0$, adică $x = 1$, contradicție.

Nu putem avea $x^2 = x$, deci $x^2 = y$; analog $y^2 = x$.

Urmăriți mai jos tabla grupului $(K^*, \cdot)$ și tabla înmulțirii pe K.

$\cdot$	1	x	y
1	1	x	y
x	x	y	1
y	y	1	x

$\cdot$	0	1	x	y
0	0	0	0	0
1	0	1	x	y
x	0	x	y	1
y	0	y	1	x

3. Într-un inel $(A, +, \cdot)$, $0 \neq 1$, avem $x + y = 1 + xy$, $(\forall)\ x, y \in A \setminus \{0\}$.

a) Să se arate că inelul este comutativ.

b) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este corp cu două elemente.

Rezolvare

a) Deoarece $(A, +)$ este grup comutativ, avem că $x + y = y + x$, de unde deducem că, $1 + x \cdot y = 1 + y \cdot x$, adică $x \cdot y = y \cdot x$, $(\forall)\ x, y \in A \setminus \{0\}$.

În plus, 0 comută cu orice element, deci inelul este comutativ.

b) Făcând $y = x$ în relația dată obținem
$x + x = 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ (1)
Deoarece A este corp (1) este echivalentă cu $x - 1 = 0$, adică $x = 1$.
Prin urmare A se reduce la două elemente: $A = \{0, 1\}$.

4. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ.
Să se arate că grupurile $(K, +)$, și $(K^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

Rezolvare

Să presupunem, prin reducere la absurd că $f : (K, +) \to (K^*, \cdot)$ este un izomorfism de grupuri.
Atunci $f(0) = 1$ și există $x \in K$ astfel încât $f(x) = -1$ (din surjectivitate).
Analizăm cazurile: a) $x \neq 0$, b) $x = 0$.

a) Avem $f(-x) = f(x)^{-1} = (-1)^{-1} = -1$. Cum f este injectivă, din $f(x) = f(-x)$.
Deducem $x = -x$, echivalent cu $x + x = 0 \Leftrightarrow x(1 + 1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 0$ (deoarece $x \neq 0$).
Atunci $1 = f(0) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = (f(1))^2$, adică $(f(1))^2 = 1$.
Pe de altă parte $(f(1))^2 = 1 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$.
Cum f este injectivă avem $f(1) = f(0)$, adică $1 = 0$, contradicție.

b) Deducem $1 = -1$, adică $1 + 1 = 0$; continuând ca la a) obținem din nou contradicția $0 = 1$.

5. Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n < m$.
a) Determinați endomorfismele inelului $\mathbb{Z}_n$.
b) Arătați că nu există morfisme de la $\mathbb{Z}_n$ la $\mathbb{Z}_m$.

Rezolvare

a) Fie $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ un endomorfism al inelului $\mathbb{Z}_n$.
În particular f este morfism al grupului $(\mathbb{Z}_n,+)$.
Rezultă $f(\hat{0}) = \hat{0}$. Știm că $f(\hat{1}) = \hat{1}$. Deducem că

$$f(\hat{x}) = f(\underbrace{\hat{1}+\hat{1}+\ldots+\hat{1}}_{x \text{ ori}}) = f(\hat{1}) + f(\hat{1}) + \ldots + f(\hat{1}) = \hat{1} + \hat{1} + \ldots + \hat{1} = \hat{x}.$$

Observăm că $f(\hat{x} \cdot \hat{y}) = f(\widehat{xy}) = \widehat{xy} = \hat{x} \cdot \hat{y} = f(\hat{x}) \cdot f(\hat{y})$.
Rezultă că $\mathbb{Z}_n$ are un singur endomorfism, cel identic.

b) Să presupunem că ar exista un morfism $g : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$. Atunci $g(\hat{0}) = \bar{0}$ și $g(\hat{1}) = \bar{1}$.
Ca și mai înainte, deducem că $g(\hat{x}) = \bar{x}$.
Însă $\bar{0} = g(\hat{0}) = g(\hat{n}) = \bar{n}$, de unde rezultă că $n \equiv 0 \pmod{m}$, adică n este multiplu de m, contradicție cu $n < m$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x \top y = x + y - 1$, $x * y = 2(xy - x - y) + 3$.

a) Arătați că $(\mathbb{R}, \top, *)$ este corp izomorf cu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ printr-un izomorfism $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + n$.

b) Rezolvați ecuația $\dfrac{2x+5}{2} * \dfrac{1}{2}\log_2(4x+4) = \dfrac{7}{2}$.

Rezolvare

a) Lăsăm pe seama cititorului să verifice că $(\mathbb{R}, \cdot, *)$ este corp.

(Elementul zero este 1, iar elementul neutru este $\dfrac{3}{2}$.)

Din $f(1) = 0$ și $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1$, rezultă că $m = 2$, $n = 2$ și $f(x) = 2x - 2$

Verificați că f este izomorfism.

b) Este mai comod să „transportăm“ și să rezolvăm ecuația dată în $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

$$\frac{2x+5}{2} * \frac{1}{2}\log_2(4x+4) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2x+5}{2} * \frac{1}{2}\log_2(4x+4)\right) = f\left(\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2x+5}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\log_2(4x+4)}{2}\right) = f\left(\frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow (2x+3) \cdot \log_2(x+1) = 5.$$

Acum: observăm că pe $(-1, 0)$ ecuația nu are soluții, iar pe $(0, \infty)$ are soluția unică $x = 1$ (deoarece funcția din membrul stâng este strict crescătoare, fiind produsul a două funcții pozitive și strict crescătoare).

7. a) Să se determine endomorfismele inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

b) Fie d și e numere întregi libere de pătrate, $d \neq e$.

Arătați că inelele $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}[\sqrt{e}], +, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

Rezolvare

a) Fie $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un morfism de inele.
Avem $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$. Deoarece f este morfism al grupului $(\mathbb{Z}, +)$ avem că $f(x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$ (fapt cunoscut).
Deoarece $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, rezultă că $f(x) = x$ este singurul morfism de inele de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}$.

b) Presupunem prin absurd că există un izomorfism de inele

$f: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$. Deci $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$.
Am arătat anterior că $f(x) = x'$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$.

Putem extinde construcția lui f la $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ dacă știm $f(x)$ în punctele $x = a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Într-adevăr:

$$f(a + b\sqrt{d}) = f(a) + f(b\sqrt{d}) = f(a) + f(b) \cdot f(\sqrt{d}) = a + bf(\sqrt{d}).$$

Deci f este determinant de $f(\sqrt{d})$.

Fie $f(\sqrt{d}) = m + n\sqrt{e}$. Atunci: $d = f(d) = (f(\sqrt{d}^2)) = (f(\sqrt{d}))^2 = m^2 + n^2 e + 2mn\sqrt{e}$.

De aici scoatem: $\begin{cases} m^2 + n^2 e = 1 \\ 2mn = 0 \end{cases}$

Dacă $m = 0$, atunci $n^2 e = d$, și cum d este liber de pătrate rezultă că: $n = 1$, adică $d = e$, contradicție.
Dacă $n = 0$, atunci $d = m^2$; cum d este liber de pătrate, avem că $d \in \{0, 1\}$, contradicție.

Exerciții propuse

1. Arătați în fiecare din următoarele cazuri că mulțimea considerată are o structură algebrică de corp în raport cu legile de compoziție precizate.

a) $(\mathbb{Q}, *, \perp)$, unde $x * y = x + y - 5$; $x \perp y = -xy + 5x + 5y - 20$;

b) $(\mathbb{R}, *, \circ)$, unde $x * y = x + y + \frac{3}{4}$; $x \circ y = 4xy + 3x + 3y + \frac{3}{2}$;

c) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, \cdot)$, unde $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ și $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc + bd)$;

d) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$, unde $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ și $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ (corpul numerelor complexe);

e) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), +, \cdot)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} + t\sqrt{6} / x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$ în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale;

f) $(K, +, \cdot)$, unde $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

2. Fie $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}) = \{a + b\sqrt[3]{7} + c\sqrt[3]{49} / a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

a) Arătați că $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.

b) Arătați că dacă $a + b\sqrt[3]{7} + c\sqrt[3]{49} = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, atunci $a = b = c = 0$.

c) Arătați că $(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}), +, \cdot)$ este corp comutativ.

d) Aceleași întrebări pentru $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

e) Găsiți inversul în $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ al numărului $2 + \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{49}$

3. Fie $L = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \mid \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

a) Arătați că $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{0}$ și $\hat{b} = \hat{0}$

b) Câte elemente are mulțimea L?

c) Arătați că $(L, +, \cdot)$ este corp comutativ.

d) Dați exemple de corp cu 25 de elemente.

4. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ considerăm legile de compoziție:

$x * y = x + y - 4$; $x \perp y = -xy - 4x - 4y + 20$;

$x \circ y = x + y - 7$; $x \top y = xy - 7x - 7y + 56$

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, *, \perp)$ și $(\mathbb{Z}, \circ, \top)$ sunt inele comutative.

b) Să se arate că $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x + 3$ este morfism al inelelor $(\mathbb{Z}, *, \perp)$ și $(\mathbb{Z}, \circ, \top)$.

5. Fie $(\mathbb{C}[0, 1], +, \cdot)$ inelul funcțiilor continue definite pe $[0, 1]$ cu valori în $\mathbb{R}$.

Arătați că $g : (\mathbb{C}[0, 1], +, \cdot) \to (\mathbb{R}, +, \cdot)$, $g(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ este morfism de inele.

6. Arătați că funcția $f : \mathbb{Q}(i\sqrt{3}) \to \mathrm{K}$; $f(z) = (a - b, 2b)$, unde $z = a + bi\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ este morfism între corpul $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ și corpul $\mathrm{K} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ de la exercițiul 1 c).

7. Fie d un întreg liber de pătrate. Arătați că:

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ yd & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ este inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

b) Funcția $f : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to A, f(x + y\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} x & y \\ yd & x \end{pmatrix}$ este izomorfism de inele.

8. Arătați că:

a) Mulțimea $\mathbb{R}$ este corp comutativ în raport cu legile $x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$ și $x \perp y = x \cdot y$.

b) Să se arate că: $f : (\mathbb{R}, +, \perp) \to (\mathbb{R}, +, \cdot), f(x) = x^5$ este izomorfism de corpuri.

9. Pe mulțimea $L = (0, \infty)$ definim operațiile $\oplus$ și $\otimes$ prin $x \oplus y = x \cdot y$ și $x \otimes y = x^{\ln y}$.

Arătați că:

a) $(L, \oplus, \otimes)$ este corp comutativ.

b) Funcția $f : L \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ este izomorfism de corpuri.

***

10. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție:

$x * y = x + y - 2$; $x \otimes y = 2xy - 4x - 4y + 10$.

Să se arate că:

a) $(\mathbb{R}, *, \otimes)$ este corp comutativ;

b) $(\mathbb{R}, *, \otimes) \simeq (\mathbb{R}, +, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma $f(x) = \omega x + n$.

11. Pentru fiecare $a \in \mathbb{Q}$ definim funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_a(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$.

a) Arătați că adunarea și compunerea funcțiilor determină pe mulțimea $F = \{f_a \mid a \in \mathbb{Q}\}$ o structură de corp comutativ izomorf cu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

b) Calculați: $f_{\frac{5}{2}} + f_{\frac{7}{3}} + \ldots + f_{\frac{401}{200}} - \left(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{1}{3}} + \ldots + f_{\frac{1}{200}} \right)$; $f_{\frac{6}{4}} \circ f_{\frac{12}{10}} \circ \ldots \circ f_{\frac{n^2+n}{n^2+n-2}}$

12. Fie $\mathcal{M} = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că față de operațiile uzuale, $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ este cop comutativ.

b) Calculați A^n, unde $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

c) Utilizând punctul a), rezolvați în $\mathcal{M}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = M(3,3) \\ x^3 + y^3 = M(-9,9) \end{cases}$.

13. Fie $T \neq \varnothing$ și $\mathcal{P}(T)$ familia submulțimilor sale.

Atașăm mulțimii $A \in \mathcal{P}(T)$ funcția $f_A : T \to \{0, 1\}, f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

(numită funcția caracteristică a mulțimii A).

Pe mulțimea $F_T = \{f_M \mid M \in \mathcal{P}(T)\}$ introducem legile de compoziție $\oplus$ și $\otimes$ prin:

$f_A \oplus f_B = f_A + f_B - 2 f_A \cdot f_B$ și $f_A \otimes f_B = f_A \cdot f_B$.

a) Să se arate că $(F_T, \oplus, \otimes)$ este inel comutativ, cu divizori ai lui 0.

b) Să se arate că $(F_T, \oplus, \otimes) \simeq (\mathcal{P}(T), \Delta, \cap)$.

c*) Dacă $A, B \in \mathcal{P}(T)$, să se determine $X \in \mathcal{P}(T)$ în cazurile:

i) $A \,\Delta\, X = B$; ii) $f_A + f_X - 2 f_A \cdot f_X = f_B$.

14. a) Să se determine automorfismele corpului $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

b) Să se determine automorfismele corpului $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

c*) Să se determine automorfismele corpului $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cu proprietatea $f(x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

***15.** Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$, având proprietatea $x^2 = 1$ $(\forall)\, x \in A \setminus \{0\}$.

Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este corp (comutativ) izomorf cu $\mathbb{Z}_2$ sau cu $\mathbb{Z}_3$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie inelul $(A, +, \cdot)$, unde $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se determine $U(A)$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție $x \top y = ay + by - 2$, $x \perp y = xy - 2x - 2y + c$.
Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R}, \top, \perp)$ să fie corp.

3. Dacă într-un inel $(A, +, \cdot)$ avem $x^3 = x^2$, $(\forall)\, x \in A$, atunci $x^2 = x$ $(\forall)\, x \in A$.

4. Fie corpul $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ astfel încât prima lege de compoziție are elementul neutru 3, iar a doua lege are elementul neutru 7.
Dacă $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, *, \circ)$ este un izomorfism de corpuri, să se determine inversul lui 17 în raport cu $\circ$.

Timp de lucru: 50 minute.
Barem: **1.** 2p. **2.** 3p. **3.** 2p. **4.** 2p. Oficiu: 1p.

Testul 2

1. Pe $\mathbb{Z}_6$ definim legea $x * y = xy + ax + by + c$ $(\forall)\, x, y \in \mathbb{Z}_6$.
Determinați $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ astfel încât $*$ admite element neutru.

2. Fie $L = (-\infty, 1)$ și legile $x \top y = 1 - (1-x)^{\ln(1-y)}$, $x \perp y = x + y - xy$
a) Demonstrați că: $(L, \top, \perp)$ este corp.
b) Arătați că funcția $F : L \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 - x)$ este izomorfism de corpuri.

3. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, unde $R = \{0, 1, a, b\}$ și $f : R \to R, f(x) = 1 + x$.
a) Arătați că $f : R \to R$ este bijectivă.
b) Folosind punctul a), regăsiți că $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.
c) Demonstrați că dacă R este corp, atunci $1 + 1 = 0$.

Timp de lucru: 45 minute.
Barem: **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p. Oficiu: 1p.

Testul 3

1. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție $x \perp y = ax + by - 1$ și $x \top y = xy + c(x + y) + 2$. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este corp.

2. Sunt izomorfe inelele $[\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}[\sqrt{5}], +, \cdot)$?

3. Fie $K = \{0, 1, a, b\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{Z}_2)$, unde

$$0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix},\ 1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \text{ și } b = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

Demonstrați că tripletul $(K, +, \cdot)$ este corp în raport cu operațiile de adunare și înmulțire.

Timp de lucru: 45 minute.
Barem: **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p. Oficiu: 1p.

Testul 4

1. Considerăm mulțimea $L \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că față de adunarea și înmulțirea matricelor, L este un corp comutativ.
b) Să se arate că $(L, +, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +, \cdot)$.

2. Să se sezolve în $\mathbb{Z}_7$ sistemul $\begin{cases} x + \hat{2}y = \hat{4} \\ \hat{3}x - y = \hat{5} \end{cases}$.

3. Să se arate că funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_n)$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este morfism de inele.

4. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel și $a \in R$. Dacă $a^m = 0$, $m \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că $1 - a$ este inversabil și $(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + ... + a^{m-1}$.

Timp de lucru: 50 minute.
Barem: **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 2p. **4.** 1p. Oficiu: 1p.

Capitolul 3

Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ

3.1. Construcţia unui inel de polinoame

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ oarecare, cu $0 \neq 1$.

Notăm cu B mulțimea tuturor șirurilor $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n \in A$, având *un număr finit* de termeni nenuli.

Un astfel de şir are, de la un rang încolo, toţi termenii nuli, adică are forma:
$(a_1, a_2, \ldots a_k, 0, 0, 0 \ldots)$

Pentru două elemente $f, g \in B$, $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_k, 0, 0 \ldots)$ şi $g = (b_0, b_1, \ldots b_n, 0, 0, \ldots)$ definim:

- *egalitate*: $f = g$ dacă și numai dacă $a_i = b_i$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$;
- *adunarea*: $f + g = (s_0, s_1, s_2, \ldots, 0, ...)$, unde $s_k = a_k + b_k$, $\forall\ k \geq 0$;
- *înmulțirea*: $f \cdot g = (p_0, p_1, p_2, \ldots, 0, \ldots)$, unde
  $p = a_0 \cdot b_0; p_1 = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0; p_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0;$
  în general:
  $$p_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots a_k b_0 = \sum_{i+j=k} a_i b_j .$$

Operațiile de adunare și înmulțire sunt legi de compoziție pe mulțimea B deoarece:

$$s_i = a_i + b_i = 0,\ \forall\ i > \max\{k, n\};\ p_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = 0,\ \forall\ k > m + n.$$

Exemple

Fie $A = \mathbb{Z}_5$ și șirurile $f = (\hat{2}, \hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{0} ...)$, $g = (\hat{3}, \hat{2}, \hat{2}, \hat{0}, ...)$.

Atunci: $f + g = (\hat{2}+\hat{3},\ \hat{0}+\hat{2},\ \hat{1}+\hat{2},\ \hat{4}+\hat{0}, \hat{0}\ ...) = (\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{0} \ldots)$

$f \cdot g = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$, unde

$p_0 = a_0 \cdot b_0 = \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$

$p_1 = a_0\, b_1 + a_1 \cdot b_0 = \hat{2} \cdot \hat{2} + \hat{0} \cdot \hat{3} = \hat{4}$

$p_2 = a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_1 = \hat{2} \cdot \hat{2} + \hat{0} \cdot \hat{2} + \hat{1} \cdot \hat{3} = \hat{2}$.

$p_3 = a_0\, b_3 + a_1\, b_2 + a_2\, b_1 + a_3\, b_0 = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{0} \cdot \hat{2} + \hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{4}$

$p_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{0} \cdot \hat{0} + \hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{4} \cdot \hat{2} + \hat{0} \cdot \hat{3} = \hat{0}$

$p_5 = a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0 = \hat{0} + \hat{0} + \hat{4} \cdot \hat{2} + \hat{0} \cdot \hat{0} = \hat{3}$

$p_6 = a_0 b_6 + a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 + a_5 b_1 + a_6 b_0 =$
$= \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$

$p_7 = 0, \ldots$

Elementele mulțimii B se numesc **polinoame** peste inelul A.

PROPOZIŢIE

Dacă $(A, +, \cdot)$ este un inel comutativ cu cel puțin două elemente, atunci mulțimea B, a șirurilor de elemente din A, care au un număr finit de elemente nenule, împreună cu operațiile de adunare și înmulțire, definite anterior, formează un inel comutativ.

Demonstraţie Am văzut anterior că adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție pe B (adică suma și produsul a două polinoame este de asemenea un polinom).
Fie $f, g, h \in B, f = (a_0, a_1, a_2, \ldots); g = (b_0, b_1, b_2, \ldots); h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$.
Demonstrăm că $(B, +, \cdot)$ este grup comutativ.

- Folosind asociativitatea adunării în inelul A avem:
  $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i); i = \{0, 1, 2, \ldots\}$, deci
  $(f + g) + h = f + (g + h)$
- Analog demonstrăm că $f + g = g + h$.
- Dacă notăm $0 = (0, 0, \ldots 0, \ldots)$, atunci:
  $0 + f = (0 + a_0, 0 + a_1, 0 + a_2, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = f = f + 0$
  Rezultă că șirul constant 0 este elementul neutru al adunării pe mulțimea B.
- Dacă notăm $-f = (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots)$, unde $-a_i$ este simetricul lui a_i față de adunare în inelul A, atunci observăm că:
  $f + (-f) = (a_0 + (-a_0), a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \ldots) = (0, 0, 0, \ldots) = 0$.
  La fel: $(-f) + f = 0$; rezultă că f este simetrizabil.

Demonstrăm că $(B, \cdot)$ este monoid comutativ.

- Verificăm asociativitatea înmulțirii:
  $f \cdot g = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$, unde $d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

  Dacă $(f \cdot g) \cdot h = (d'_0, d'_1, d'_2, \ldots)$, atunci:

$$d'_m = \sum_{k+l=m} d_k \cdot c_l = \sum_{k+l=m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) c_l = \sum_{\substack{i+j=k \\ k+l=m}} a_i b_j c_l = \sum_{i+j+l=m} a_i b_j c_l .$$

  Dacă $g \cdot h = (e_0, e_1, e_2, \ldots)$, atunci $e_l = \sum_{i+j=k} b_i c_j$.

Dacă notăm $f \cdot (g \cdot h) = (e'_0, e'_1, e'_2, \dots)$, atunci:

$$e'_m = \sum_{k+l=m} a_k e_l = \sum_{k+l=m} a_k \left(\sum_{i+j=l} b_i c_j \right) = \sum_{\substack{k+l=m \\ i+j=l}} a_k b_i c_j = \sum_{k+i+j=m} a_k b_i c_j .$$

Deducem că $d'_m = e'_m$, $m \in \mathbb{N}$, deci $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$.

- Verificăm că înmulțirea este comutativă (analog).
- Dacă notăm cu $1 = (1, 0, 0, \dots)$, atunci
  $1 \cdot f = (1 \cdot a_0, 1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, \dots) = f = f \cdot 1$.
  Rezultă că șirul $(1, 0, 0, \dots)$ este elementul neutru al înmulțirii.
- Rămâne de demonstrat distributivitatea înmulțirii față de adunare,
  $f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$ (1)

  Într-adevăr: $f \cdot (g + h) = (d_0, d_1, d_2, \dots)$, unde $d_k = \sum_{i+j=k} a_i (b_j + c_j)$.

  $(f \cdot g) + (f \cdot h) = (d'_0, d'_1, d'_2, \dots)$, unde $d'_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j + \sum_{i+j=k} a_i c_j$.

  Deoarece operația de înmulțire este distributivă față de adunare în inelul A, deducem că (1) are loc.
  Analog, $(f + g) \cdot h = (f \cdot h) + (g \cdot h)$.

3.2. Forma algebrică a unui polinom

Unui polinom peste un inel A îi vom da în continuare o altă exprimare, mult mai comodă în calculele algebrice din inelul B.

Pentru aceasta vom apela la câteva notații și identificări.

■ Fie X polinomul $(0, 1, 0, 0, \dots)$. Avem:
$X^2 = X \cdot X = (0, 0, 1, 0, \dots)$
$X^3 = X^2 \cdot X = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$

$$X^k = X^{k-1} \cdot X = (0, 0, ..., \underbrace{1}_{\text{poziția } k+1}, 0, 0, ...)$$

■ Definim de la A la B funcția:
$\varphi : A \to B$, $\varphi(a) = (a, 0, 0, \dots)$, $\forall\, a \in A$.
Funcția φ este morfism injectiv de inele. Într-adevăr:
$\varphi(a + b) = (a + b, 0, 0, \dots) = (a, 0, 0, \dots) + (b, 0, 0, \dots) = \varphi(a) + \varphi(b)$
$\varphi(ab) = (a \cdot b, 0, 0, \dots) = (a, 0, 0, \dots) \cdot (b, 0, 0, \dots) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
$\varphi(1) = (1, 0, 0, \dots) = 1$.
$\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow (a, 0, 0, \dots) = (b, 0, 0, \dots) \Leftrightarrow a = b$.

Aceste proprietăți ale morfismului φ arată că operațiile cu polinoame din B se reduc la operații cu elemente din A.

Ca urmare a acestor observații, identificăm polinomul $(a, 0, 0, \dots) \in B$ cu *elementul* $a \in A$.

Vom scrie $(a, 0, 0, \dots) = a$ și îl numim **polinom constant**.

Fie $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ un polinom din B. Atunci:

$f = (a_0, 0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, 0, \dots) + (0, 0, a_2, 0, 0, \dots) + \dots + (0, 0, ..., a_n, 0, 0, \dots) =$
$= (a_0, 0, 0, \dots) + (a_1, 0, 0, \dots) \cdot (0, 1, 0, 0, \dots) + (a_2, 0, 0, ...) \cdot (0, 0, 1, 0, 0, \dots) +$

$+ \dots + (a_n, 0, 0, \dots) \cdot (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n \text{ ori}}, 1, 0, 0, \dots)$. Am obținut scrierea:

$f = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n$, numită **forma algebrică** a polinomului f.

Vom numi X *nedeterminată* și vom spune că f este polinom peste A în nedeterminata X.

Elementele $a_0, a_1, \dots, a_n$ se numesc *coeficienții* polinomului.

Vom nota în continuare mulțimea B, a polinoamelor cu coeficienți în inelul A prin $A[X]$.

Deci $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{Z}_n[X]$ etc. sunt inele de polinoame în nedeterminata X cu coeficienți din $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, respectiv $\mathbb{Z}_n$.

Dacă $f \in A[X]$ și $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, unde $a_n \in A$, $a_n \neq 0$, iar $a_k = 0$ pentru orice $k > n$, atunci vom spune că f *are gradul n*; scriem grad $(f) = n$.

Prin convenție, gradul polinomului 0 este $-\infty$.

Coeficientul a_n se numește *coeficient dominant*, iar a_0 se numește *termenul liber* al polinomului.

Dacă $a_n = 1$ polinomul se numește *unitar* sau *monic*.

De aici încolo vom folosi pentru polinoame numai forma algebrică.

Să transcriem în noua formă operațiile dintre polinoame:

Dacă $f, g \in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots a_mX^m$, $g = b_0 + b_1X + \dots. + b_nX^n$, $m \leq n$, atunci

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_m + b_m)X^m + b_{m+1}X^{m+1} + \dots + b_nX^n.$$

$$f \cdot g = a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1b_0)X + \left(\sum_{i+j=k} a_ib_j \right) X^k + \dots + a_mb_nX^{m+n}.$$

Exemplu

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 1 + 2X$; $g = 3 + X - X^2$. Atunci:

$f + g = (1 + 3) + (2 + 1)X - X^2 = 4 + 3X - X^2$.

$f \cdot g = (1 \cdot 3) + (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3)x + (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2)X^2 + 2 \cdot (-1)X^3 =$
$= 3 + 6X + X^2 - 2X^3$.

În afara celor două legi de compoziție, adunare și înmulțire, putem defini și o altă lege de compoziție, de altă natură, numită *înmulțirea cu scalari*:

Dacă $\alpha \in A$ și $f \in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, atunci:

$$\boxed{\alpha \cdot f \overset{\text{def.}}{=} \alpha a_0 + (\alpha a_1)X + (\alpha a_2)X^2 + \ldots + (\alpha a_n)X^n}$$

Exemple

$3 \cdot (2 + 3X - X^2) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3X - 3 \cdot X^2 = 6 + 9X - 3X^2$.

În $\mathbb{Z}_{12}[X]$ avem: $\hat{3} \cdot (\hat{2} + \hat{4}X) = \hat{3} \cdot \hat{2} + (\hat{3} \cdot \hat{4})X = \hat{6}$.

OBSERVAȚII

1. Polinomul $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ poate fi scris și sub forma:
$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ (după puterile descrescătoare ale lui X).

2. Polinoamele aX^n, bX^n se numesc *polinoame asemenea* (monoame asemenea).

3. Adunarea polinoamelor se face adunând termenii asemenea, iar înmulțirea se poate face aplicând distributivitatea înmulțirii față de adunare (înmulțind fiecare termen al primului polinom cu fiecare termen al celui de al doilea polinom, apoi adunând termenii asemenea).

4. Conform definiției egalității polinoamelor, dacă
$f = a_0 + a_1X \ldots + a_nX^n$ și $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_mX^m$, vom avea:
$f = g \Leftrightarrow m = n$ și $a_i = b_i$, $i = \overline{0, n}$, adică două polinoame sunt egale dacă au același grad, iar coeficienții monoamelor asemenea sunt egali.

5. Pentru orice $f, g \in A[X]$ avem:
a) grad $(f + g) \leq$ max ((grad f), (grad g))
b) grad $(f \cdot g) \leq$ max ((grad f) + (grad g)).
c) dacă f este domeniu de integritate (în particular corp), atunci:
grad $(f \cdot g)$ = grad (f) + grad (g).

Exemple

a) $f = \hat{2}X$, $g = \hat{1} + \hat{3}X$, $f, g \in \mathbb{Z}_6[X]$.

$f \cdot g = \hat{2}X$, deci grad $(f \cdot g) = 1 <$ grad (f) + grad $(g) = 2$.

b) $f = 2X$; $g = 1 + 3X$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$.
$f \cdot g = 2X + 6X^2$, deci grad $(f \cdot g) = 2 =$ grad (f) + grad (g).

3.3. Funcţii polinomiale. Rădăcini ale polinoamelor

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ și $f = a_0 + a_1X \ldots + a_nX^n \in A[X]$.

Dacă $\alpha \in A$, atunci elementul $f(\alpha) = a_0 + a_1 \cdot \alpha + \ldots + a_n \cdot \alpha^n \in A$ se numește *valoarea polinomului f în* α.

Asociind fiecărui element $\alpha \in A$ valoarea polinomului $f(\alpha)$ se obține o funcție $\bar{f} : A \to A$, $\bar{f}(\alpha) = f(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in A$, numită *funcția polinomială* asociată polinomului f.

Dacă $\alpha \in A$ satisface condiția $f(\alpha) = 0$, atunci α se numește *rădăcină a* polinomului f.

Exemplu

Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{1} + X^2$, polinom cu coeficienți din $\mathbb{Z}_5$.

Funcția $\bar{f} : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $\bar{f}(\hat{x}) = \hat{1} + \hat{x}^2$, $\forall\ x \in \mathbb{Z}_5$, redată și prin tabelul de mai jos, este funcția polinomială asociată polinomului f.

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$f(x)$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$

Observăm că $\hat{2}$ și $\hat{3}$ sunt rădăcini ale polinomului f.

OBSERVAŢIE

Din definiția funcției polinomiale rezultă că, dacă $f = g$, atunci $\bar{f} = \bar{g}$.

Reciproca acestei afirmații nu este adevărată decât în cazuri particulare de inel.

Exemple

1. $f, g \in \mathbb{Z}_6[X]$, $f = \hat{3}X + \hat{3} \cdot X^2$; $g = \hat{0}$.

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
f	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$

Rezultă că $\bar{f} = \bar{g}$, iar $f \neq g$.

2. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, grad f, grad $g \leq 1$ și $\bar{f} = \bar{g}$.

Arătăm că $f = g$. Într-adevăr, fie $f = a_0 + a_1X$, $g = b_0 + b_1X$.

Din $\bar{f}(0) = \bar{g}(0)$ rezultă $a_0 = b_0$. Din $\bar{f}(1) = \bar{g}(1)$ rezultă $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$.

Rezultă $a_1 = b_1$. Așadar polinoamele f și g sunt egale.

În mod asemănător putem demonstra un rezultat mai general:

> Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și $f, g \in K[X]$ astfel încât $\bar{f} = \bar{g}$.
> Atunci $f = g$.

Exerciții rezolvate

1. a) Câte polinoame de grad 3 au coeficienții din $\mathbb{Z}_6$?
b) Câte polinoame de grad cel mult 3 au coeficienții din $\mathbb{Z}_6$?

Rezolvare

Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

a) Pentru coeficientul dominant, a_3, avem 5 posibilități: $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$.
Pentru ceilalți coeficienți avem câte 6 posibilități: $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$.
În total avem: $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3$.

b) În acest caz putem lua în considerare și cazul $a_3 = 0$, caz în care polinomul are grad mai mic decât 3.
Avem: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ posibilități de alegere a coeficienților.

2. Fie $f = 2X^2 - X + 1$. Să se determine toate polinoamele $g \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât grad $(f^2 - g) = 2$.

Rezolvare

Deoarece gradul polinomului f este doi rezultă că gradul polinomului f^2 este 4.
Rezultă că grad $(g) = 4$.
Fie $g = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$, $a_4 \neq 0$. Atunci:
$f^2 - g = (2X^2 - X + 1)^2 - (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4) =$
$= (4X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X + 1) - (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4) =$
$= (4 - a_4)X^4 + (-4 - a_3)X^3 + (5 - a_2)X^2 + (-2 - a_1)X + 1 - a_0$.
Pentru ca gradul lui $f^2 - g$ să fie 2 este necesar ca $4 - a_4 = 0$, $4 - a_3 = 0$ și $5 - a_2 \neq 0$.
Așadar: $a_4 = 4$; $a_4 = -4$; $a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

3. a) Fie $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, grad $(f) \leq 2$, grad $(g) \leq 2$ și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.
Să se arate că polinoamele f și g sunt egale.

b) Există un număr de forma $\overline{abba}$ care în orice bază să fie cub perfect?

Rezolvare

a) Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{Z}[X]$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 \in \mathbb{Z}[X]$.
Din $f(0) = g(0)$ deducem $a_0 = b_0$;
Din $f(1) = g(1)$ deducem $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$;
Din $f(-1) = g(-1)$ deducem $-a_1 + a_2 = -b_1 + b_2$.
Adunând ultimele două egalități, obținem $a_2 = b_2$, de unde obținem și $a_1 = b_1$.

b) Fie x baza de scriere a numărului dat. Rezultă:

$$\overline{abba} = ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a)$$

Pentru ca numărul să fie cub perfect în orice bază x, trebuie ca:
$ax^2 + (b - a)x + a = (x + 1)^2, \forall x \in \mathbb{N}, x \geq 2 \Leftrightarrow$
$ax^2 + (b - a)x + a = x^2 + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \Leftrightarrow$
$(a - 1)x^2 + (b - a - 2)x + a - 1 = 0, \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (1)
Dând două valori lui x obținem un sistem de două ecuații în necunoscutele a și b, din care deducem: $a = 1$; $b = 3$.
Putem gândi și altfel: egalitatea (1) arată că dacă $a - 1 \neq 0$, atunci ecuația de gradul al doilea dată de (1) are o infinitate de soluții; imposibil.
Rezultă $a = 1$ și egalitatea $(b - 3)x = 0$ (2), $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$.
Rezultă $b - 3 = 0$, altfel ecuația de gradul I dată de (2) ar avea o infinitate de soluții; contradicție.

Rezultă că $\overline{abba}_x = \overline{1331}_x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$.

OBSERVAȚIE

Egalitățile anterioare pot fi deduse din a).
Vom reveni însă asupra acestei situații în paginile următoare.

4. a) Arătați că există și sunt unice numerele reale α, β, γ astfel încât
$2x^2 + 7x + 2 = \alpha (x + 1)(x + 2) + \beta (x + 1) + \gamma, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați suma $\sum_{k=0}^{n} (2k^2 + 7k + 2)\, k!$

Rezolvare

Identificând coeficienții polinoamelor din egalitatea dată obținem sistemul

$\begin{cases} 2 = \alpha \\ 7 = 3\alpha + \beta \\ 2 = 2\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$. Deducem $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $\gamma = -3$.

Așadar $2x^2 + 7x + 2 = 2(x + 1)(x + 2) + (x + 1) - 3$ și deci
$(2k^2 + 7k + 2)k! = 2(k + 1)(k + 2)k! + (k + 1)k! - 3k! = 2(k + 2)! + (k + 1)! - 3k!$

Deducem: $\sum_{k=0}^{n} (2k^2 + 7k + 2)k! = \sum_{k=0}^{n} 2(k + 2)! + \sum_{k=0}^{n} (k + 1)! - \sum_{k=0}^{n} 3k! =$

$= 2(\underbrace{2! + 3! + ... + n!} + (n + 1)! + (n + 2)!) + (1! + \underbrace{2! + ... + n!} + (n + 1)!) -$

$- 3(0! + 1! + \underbrace{2! + ... + n!}) = 2(n + 1)! + 2(n + 2)! + 1! + (n + 1)! - 3 \cdot 0! - 3 \cdot 1! =$

$= 2(n + 2)! + 3(n + 1)! - 5$ (sumele subliniate se reduc).

OBSERVAȚIE

Ideea de sumare de la b) este generoasă, fiind aplicabilă și în alte situații, când polinomul ce precede factorialul poate fi scris ca o sumă de polinoame „adecvate".

Propuneți un exercițiu asemănător; urmăriți și problemele propuse.

5. S-a constatat experimental că orice cantitate de apă pură are volumul minim la temperatura $\theta \approx 4°C$ și că volumul V al acesteia depinde de temperatura t, conform unei dependențe de tip polinominal.

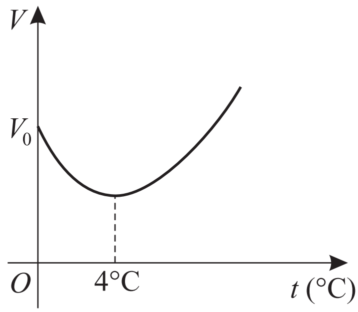
$V = (at^2 + bt + 1)V_0$, unde V_0 este volumul de apă la 0°C.

Notăm cu: ρ_0 = densitatea masică a apei la 0°C, ρ_θ densitatea masică a apei la temperatura θ și $\alpha = \dfrac{\rho_0}{\rho_\theta} \in (0, 1)$.

Să se determine *a și* b.

Rezolvare

$$\alpha = \frac{\rho_0}{\rho_\theta} = \frac{\frac{m}{V_0}}{\frac{m}{V_\theta}} = \frac{V_\theta}{V_0} = a\theta^2 + b\theta + 1 \quad (1)$$



$V'(t) = (2at + b)V_0$. Deoarece minimul lui V se realizează pentru $t = \theta$, atunci $V'(\theta) = 0$.

Prin urmare, $2a\theta + b = 0$, adică $b = -2a\theta$ (2)

Din (1) și (2) obținem $\alpha = a\theta^2 - 2a\theta^2 + 1$, adică

$$a = \frac{1-\alpha}{\theta^2} > 0 \text{ și } b = -2a\theta = \frac{2(\alpha-1)}{\theta} < 0.$$

6. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și polinoamele $f, g, h \in K[X]$.

a) Să se arate că dacă $f \cdot g = 0$, atunci $f = 0$ sau $g = 0$.

b) Dacă $f \neq 0$ și $f \cdot g = f \cdot h$, atunci $g = h$.

c) Dacă $\alpha \in K$ și $f \in K[X]$ astfel încât $\alpha f = 0$, atunci $\alpha = 0$ sau $f = 0$.

Rezolvare

a) Deoarece polinoamele au coeficienți dintr-un corp, atunci $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.
Cum $\text{gr}(0) = -\infty$, deducem că $\text{grad}(f) = -\infty$ sau $\text{grad}(g) = -\infty$, adică $f = 0$ sau $g = 0$.

b) $f \cdot g = f \cdot h \Leftrightarrow f \cdot g - f \cdot h = 0 \Leftrightarrow f(g - h) = 0$.
Aplicând a), deducem că $g - h = 0$, deoarece $f \neq 0$; rezultă $g = h$.

c) Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$. Atunci $\alpha \cdot f = 0 \Leftrightarrow (\alpha a_0) + (\alpha a_1)X + ... + (\alpha a_n)X^n = 0$
$\Leftrightarrow \alpha a_0 = 0, \alpha a_1 = 0, ..., \alpha a_n = 0$ (1).
Dacă $\alpha \neq 0$, atunci egalitățile (1) au loc numai dacă $a_0 = 0, a_1 = 0, ..., a_n = 0$, adică $f = 0$ (am ținut cont că egalitățile (1) au loc într-un corp!).

OBSERVAȚIE

Punctul a) demonstrat anterior arată că:

Inelul polinoamelor cu coeficienți într-un corp este domeniu de integritate.

Rețineți aceste rezultate pentru că vor fi utile în cele ce urmează!

Exerciții propuse

1. Să se determine a, b, c, d astfel încât $f = g$ în cazurile:
a) $f = 3X^3 + aX + 1$, $g = bX^3 + cX^2 - X + d$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
b) $f = aX^2 + X + \hat{1}$, $g = (2a + \hat{1})X^2 + (a + \hat{5}b)X + c$, $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$;
c) $f = aX^2 + bX + 2$, $g = 3X - c$, $f, g \in \mathbb{Z}[X]$.

2. Să se arate că $f \neq g$, unde:
a) $f = 2X^2 + aX + 1$, $g = aX^3 + bX^2 + 2X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
b) $f = aX^2 + 2bX + b^2$, $g = (2a + 3)X^2 + (a + b)X + 2$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

3. Să se afle gradul polinomului f, dacă:
a) $f = (m^2 + 1)X^3 + (m^2 + 3m - 4)X + m - 1$, $f \in \mathbb{C}[X]$;
b) $f = (m^2 - \hat{1})X^4 + (m^2 + \hat{3}m - \hat{4})X + \hat{2}m$, $f \in \mathbb{Z}_3[X]$;
c) $f = (m^4 + m + 1)X^3 + mX + a$, $f \in \mathbb{R}[X]$;
d) $f = (2m^2 + m - 3)X^2 + mX + 1$, $f \in \mathbb{Z}[X]$.

4. Pentru f, g calculați $f + g$, $f \cdot g$ și αf unde:
a) $f = X^2 + X + 2 - i$, $g = X + i$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha = 1 - i$;
b) $f = \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{3}$, $g = \hat{3}X + \hat{2}$, $\alpha = \hat{2}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$;
c) $f = X^2 + \sqrt{2}$; $g = X^3 - \sqrt{2}X + 3 + 2\sqrt{2}$, $\alpha = -\sqrt{2}$, $f, g \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$;
d) $f = X - 1$, $g = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$, $\alpha = 0$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
e) $f = X + 1$, $g = X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \ldots - X + 1$, $\alpha = -1$.

5. a) Există polinoame neconstante $f, g \in [X]$ astfel încât $f \cdot g = X^4 + 21X + 8$?
b) Există polinoame $h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $(4X + 1)^2 + (3X - 1)^2 = h^2$?

6. Să se afle coeficientul lui X^n din:
a) $(X + 1)^4(X - 1)^5$, $n = 3$;
b) $(1 + X + X^2)^5$, $n = 4$;
c) $(1 + X)^2 + (1 + X)^3 + (1 + X)^4 + \ldots + (1 + X)^{10}$, $n = 3$;
d) $X^6(1 + X) + X^5(1 + X)^2 + X^4(1 + X)^3 + X^3(1 + X)^4 + X^2(1 + X)^5$, $n = 5$;
e) $(1 + X + X^2 - X^3)(1 - X)^9$, $n = 5$.

7. Determinați $f \in \mathbb{Z}_7[X]$ astfel încât $f^2 - f = \hat{2}X^2 + \hat{3}X$.

8. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + X - 2$. Calculați $f(-1)$, $f(i)$, $f(\sqrt{2})$.

9. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $f = X^3 + aX^2 + b$ și $f(1 - i) = 1$.

10. Să se afle suma coeficienților polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$ dacă:
a) $f = (X - i)^3 + (X + i)^3$;
b) $f = (X^2 - X + 1)^n + (X^2 + X - 3)^{2n}$.

***

11. Calculați $f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$ și $f\left(\sin\frac{4\pi}{9}\right)$, dacă $f(x) = 4X^3 - 3X + 2$.

12. a) Determinați polinomul de gradul al doilea $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(1) = 2; f(2) = 3; f(3) = 0$.

b) Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ și $f(1) = 2, f(2) = 3$ și $f(3) = 4$, demonstrați că f nu are gradul 2.

13. Demonstrați că dacă $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, atunci $f + f + f = 0$, $(f + g)^3 = f^3 + g^3$.

Calculați $(X^2 + \hat{2}X + \hat{2})^3$.

14. a) Să se determine $f \in \mathbb{R}[X]$ pentru care $f(1 + x) + f(x - 1) = 2f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Există polinoame $P \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $(1 + X)P(X) + (2X + 1)P(X + 1) = 3X^2 + 2X + 1$?

15. a) Arătați că există și sunt unice numerele α, β, γ astfel încât $X^3 + 7X^2 + 14X = (X + 1)(X + 2)(X + 3) + \alpha(X + 1)(X + 2) + \beta(X + 1) + \gamma$ respectiv $X^2 + 2X - 4 = X(X - 1) + \alpha X + \beta$.

b) Calculați $\sum_{k=1}^{n}(k^3 + 7k^2 + 14k)k!$; $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k-4}{k!}$;

c) Calculați $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k-1}{k!}$.

16. a) Identificați coeficientul lui X^n în ambii membri ai egalității:

$(1 + X)^n(1 + X)^n = (1 + X)^{2n}$ și calculați $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$.

b) Calculați $\left(C_n^0\right)^2 - \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 - \ldots + (-1)^n\left(C_n^n\right)^2$.

17. În câte moduri putem strânge 10 lei de la 5 persoane care pot dona 0, 1 sau 3 lei?

18. Determinați elementele inversabile ale inelului $K[X]$, unde $(K, +, \cdot)$, este un corp comutativ oarecare.

19. Fie $(1 + X + X^2)^{100} = a_0 + a_1X + \ldots + a_{200}X^{200}$.

a) Calculați $a_0 + a_1 + \ldots + a_{200}$; $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{200}$.

b) Calculați $a_0 + a_3 + a_6 + \ldots + a_{198}$; $a_0 + a_4 + a_8 + \ldots + a_{200}$.

3.4. Teorema împărţirii cu rest

Începând din acest paragraf, fără o mențiune specială, vom avea în vedere numai polinoame cu coeficienți într-un *corp*.

Cunoaştem o teoremă a împărţirii cu rest în mulţimea numerelor întregi:

Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, atunci există și sunt unice numerele întregi q, r astfel încât

$$a = bq + r,\ 0 \leq r < |b|.$$

Există un rezultat similar și pentru polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ oarecare.

TEOREMĂ

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$. Atunci există și sunt unice polinoamele $q, r \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot q + r$ și grad $(r) <$ grad (g).

Demonstraţie

Fie $m =$ grad (f) și $n =$ grad (g).

Demonstrăm existența polinoamelor q și r.

Dacă $m < n$, atunci putem lua $q = 0$ și $r = f$.

Dacă $m \geq n$, demonstrăm afirmația prin reducție după m.

Pentru $m = 0$ afirmația este evidentă.

Fie a_m și b_n coeficienții dominanți ai polinoamelor f, respectiv g.

Presupunem că proprietatea este adevărată pentru polinoame f cu gradul mai mic decât m.

Atunci, deoarece b_n este inversabil în corpul K putem lua

$$f_1 = f - (a_m \cdot b_n^{-1})X^{m-n} \cdot g,$$

care are gradul mai mic decât m. Deducem din ipoteza de inducție că există $q_1, r_1 \in K[X]$ astfel încât $f_1 = g \cdot q_1 + r_1$ și grad $(r_1) <$ grad (g).

Prin urmare:

$$f = (a_m b_n^{-1})X^{m-n} \cdot g + f_1 = (a_m b_n^{-1})X^{m-n} \cdot g \neq$$

$$\neq g \cdot q_1 + r_1 = g(a_m b_n^{-1} X^{m-n} + q_1) + r_1.$$

Alegem $q = a_m b_n^{-1} X^{m-n} + q_1$ și $r = r_1$ și avem

$f = g \cdot q + r$, unde grad$(r) <$ grad (g).

Demonstrăm unicitatea polinoamelor q și r.

Dacă am avea $q', r' \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot q' + r'$ și grad $(r') <$ grad (g), atunci $g(q - q') = r - r'$ (1) și grad $(r' - r) <$ grad (g).

Dacă $q \neq q'$, atunci grad $(g(q - q')) \geq$ grad $(g) >$ grad $(r' - r)$, deci egalitatea (1) este falsă.

Dacă $q = q'$, atunci din (1) rezultă $r = r'$ și de aici unicitatea perechii (q, r), c.c.t.d.

OBSERVAŢII

1. Ca și la numere întregi, f și g se numesc *deîmpărțit*, respectiv *împărțitor*, iar q și r se numesc *cât*, respectiv *rest*.
2. În demonstrație am folosit în câteva momente faptul că inelul coeficienților trebuie să fie corp, de exemplu când am introdus polinomul f_1 apelând la inversabilitatea lui b_n.
Reiese că teorema nu poate avea loc pentru polinoame cu coeficienți în orice inel: de exemplu nu este valabilă în $\mathbb{Z}[X]$.
3. Atenție la cazul când polinoamele sunt constante (numere întregi).
De exemplu, dacă ne referim la numerele 5 și 3 ca polinoame (din $\mathbb{Q}[X]$), atunci conform teoremei anterioare avem:
$5 = 3 \cdot \frac{5}{3} + 0$ (câtul împărțirii lui 5 la 3 este $\frac{5}{3}$ și restul 0). Însă în $\mathbb{Z}$ avem
$5 = 3 \cdot 1 + 2$ (câtul și restul împărțirii lui 5 la 3 în inelul $\mathbb{Z}$ sunt 1, respectiv 2).

Ca și la numere, vom descrie în continuare, prin exemple, un *algoritm* de aflare a câtului și restului pentru polinoame (evident, în cazul nebanal, când gradul deîmpărțitului este mai mare sau egal cu gradul împărțitorului).

1. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 + 3X^2 - X + 1$ și $g = -2X^3 + X - 2$.
Urmărim demonstrația teoremei. Avem:

grad $(f) = 3$; grad $(g) = 3$; $a_m = 4$; $b_n = -2$; $b_n^{-1} = -\frac{1}{2}$; $a_m\, b_n^{-1} X^{n-m} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) X^{3-3} = -2$;

$f_1 = f - a_m b_n^{-1} X^{m-n} \cdot g = (4X^3 + 3X^2 - X + 1) - (-2)(-2X^3 + X - 2) =$
$= 4X^3 + 3X^2 - X + 1 - 4X^3 + 2X - 4 = 3X^2 + X - 3.$
Observăm că gradul lui f_1 este mai mic decât gradul împărțitorului și $f = (-2)g + f_1$.
Așadar, conform teoremei câtul este -2, iar restul este $3X^2 + X - 3$.
Ca și cazul împărțirii cu rest de la numere întregi, calculul precedent poate fi dispus astfel:

$$\begin{array}{ll|l}
f \text{ ....} & 4X^3 + 3X^2 - X + 1 & -2X^3 + X - 2 \leftarrow g \\ \cline{3-3}
-2 \cdot g \text{ ....} & -4X^3 \qquad\quad - 2X + 4 & -2 \\ \cline{2-2}
f_1 = f - (-2g) \text{ ....} & / \quad \underbrace{3X^2 + X - 3}_{\text{restul } r} & \longrightarrow \text{câtul } q
\end{array}$$

2. Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^3 + \hat{3}X + \hat{2}$, $g = \hat{3}X^2 + X + \hat{2}$.
Avem:

$$\begin{array}{ll|l}
f \text{ ....} & \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \qquad \hat{2} & \hat{3}X^2 + X + \hat{2} \\ \cline{3-3}
\hat{4}x \cdot g \text{ ....} & \hat{2}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X & \hat{4}X \\ \cline{2-2}
f_1 = f - \hat{4}X \cdot g \text{ ....} & / \quad -\hat{4}X^2 + \qquad \hat{2} &
\end{array}$$

$b_n^{-1} = (\hat{3})^{-1} = \hat{2}$

$a_m \cdot b_n^{-1} = \hat{2}\,(\hat{3})^{-1} = \hat{4}$

$a_m \cdot b_n^{-1} \cdot X^{n-m} = \hat{4}X$

Deoarece gradul lui f_1 nu este mai mic decât gradul împărțitorului, algoritmul continuă asemănător.

$$\begin{array}{lrr|l}
f_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & -\hat{4}X^2 + & \hat{2} & \hat{3}X^2 + X + \hat{2} \\ \cline{4-4}
\hat{2}\cdot g \ldots\ldots\ldots & X^2 + \hat{2}X + & \hat{4} & \hat{2} \\ \cline{2-3}
f_1 - \hat{2}g \ldots\ldots & / \quad -\hat{2}X - & \hat{2} &
\end{array}$$

$$b_n^{-1} = (\hat{3})^{-1} = \hat{2}$$

$$a_m \cdot b_n^{-1} = (\widehat{-4}) \cdot \hat{2} = \hat{2}$$

$$a_m \cdot b_n^{-1} \cdot X^{n-m} = \hat{2}.$$

Deoarece gradul lui $f_2 = f_1 - \hat{2}g$ este mai mic decât al împărțitorului, algoritmul se încheie. Am obținut câtul $\hat{4}X + \hat{2}$ și restul $-\hat{2}X - \hat{2} = \hat{3}X + \hat{3}$.

Cele două etape de obicei se „comasează“:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\hat{2}X^3 & & +\hat{3}X + & \hat{2} & \hat{3}X^2 + X + \hat{2} \\ \cline{5-5}
\hat{2}X^3 + & \hat{4}X^2 + & \hat{3}X & & \underbrace{\hat{4}X + \hat{2}}_{\text{câtul } q} \\ \cline{1-4}
 & -\hat{4}X^2 + & & \hat{2} & \\
 & X_2 + & \hat{2}X + & \hat{4} & \\ \cline{2-4}
 & / & \underbrace{-\hat{2}X - 2}_{\text{restul } r} & &
\end{array}$$

3. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 + iX - 1$, $g = 2X - i$.

$$\begin{array}{lr|l}
X^2 + iX - 1 & & 2X - i \\ \cline{3-3}
X^2 - \frac{i}{2}X & & \underbrace{\frac{1}{2}X + 3\frac{i}{4}}_{\text{câtul}} \\ \cline{1-2}
/ \quad 3\frac{i}{2}X - 1 & & \\
\quad 3\frac{i}{2}X + \frac{3}{4} & & \\ \cline{1-2}
\quad / \quad -\frac{7}{4} \longrightarrow \text{restul} & &
\end{array}$$

$$(1 \cdot X^2) : (2X) = \frac{1}{2}X$$

$$\left(3\frac{i}{2}X\right) : (2X) = \frac{3i}{4}$$

Împărţirea polinoamelor la $X - a$

În cazul particular în care împărțitorul este $X - a$, câtul și restul se pot afla mai rapid.

TEOREMA RESTULUI

Restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la $X - a$ este $f(a)$ $(a \in K)$.

Demonstrație Din teorema împărțirii cu rest avem:
$f = (X - a) \cdot q + r$, unde grad $(r) < 1$, adică r este polinom constant.
Înlocuind formal X prin a în egalitatea anterioară, obținem din egalitate de polinoame, egalitate de valori ale polinoamelor
$f(a) = (a - a) : q(a) + r$, de unde deducem $r = f(a)$.

Exemple de aplicare a teoremei restului

1. Restul împărțirii lui $f \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$ la $X - \hat{1}$ este $f(\hat{1}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{3} \cdot \hat{1} + \hat{1} = \hat{5}$

2. Restul împărțirii lui $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = -X^3 + 5X^2 + 1$ la $X + 2$ este $f(-2) = -(-2)^3 + 5(-2)^2 + 1 = 29$.

Schema lui Horner

Fie $a \in K$ și $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$, $a_n \neq 0$.
Dacă q și r sunt câtul și restul la împărțirea lui f cu $X - a$, atunci avem

$$f = (X - a)\underbrace{(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + ... + b_0)}_{\text{câtul } q} + r$$

Identificând coeficienții în egalitate, obținem:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a \cdot b_{n-1} + a_{n-1} \\ b_{n-3} &= a \cdot b_{n-2} + a_{n-2} \\ &\vdots \\ b_0 &= a \cdot b_1 + a_1 \\ r &= a \cdot b_0 + a_0 \end{aligned}$$

În practică, pentru calculul restului și coeficienților câtului organizăm calculele sub forma tabloului următor (**schema lui Horner**):

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	...	X^1	X^0	
a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0	
		b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	b_0	r

b_{n-1} este a_n, iar orice coeficient b_i se obține prin înmulțirea coeficientului b_{i+1} anterior cu a și adunat cu a_{i+1}. Restul este $r = a \cdot b_0 + a_0$.

Exemple

1. $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 3X^4 + X^3 - X + 1$, $g = X + 1$

	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0	
$a = -1$	3	1	0	–1	1	
		3	–2	2	–3	4
			$a \cdot 3 + 1$	$a \cdot (-2) + 0$		restul

Câtul este $3X^3 - 2X^2 + 2X - 3$, restul este 4.

2. $f \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, $g = X - \hat{2}$

	X^3	X^2	X^1	X^0
$a = \hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	r
		$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$

Câtul este $\hat{2}X^2 + \hat{2}$, restul este $\hat{5}$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $f = X^4 - X^2 + a$, $g = X^2 + X + b$.
Să se afle a și b, știind că restul împărțirii lui f la g este $-2X + 1$

Rezolvare

$$\begin{array}{l|l}
X^4 - X^2 + a & X^2 + X + b \\
\cline{2-2}
\underline{X^4 + X^3 + bX^2} & X^2 - X - b \\
/\ \ -X^3 - (b+1)X^2 + a & \\
\quad \underline{-X^3 - X^2 - bX} & \\
\quad /\ \ -bX^2 + bX + a & \\
\qquad \underline{-bX^2 - bX - b^2} & \\
\qquad /\ \ \ 2bX - b^2 + a &
\end{array}$$

Am obținut restul $2bX - b^2 + a$, care trebuie să fie egal cu $-2X + 1$.

Identificând coeficienții, obținem $\begin{cases} 2b = -2 \\ -b^2 + a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$.

2. a) Să se determine restul împărțirii lui $X^{nm} - 1$ la $X^n - 1$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se determine restul împărțirii lui $X^m - 1$ la $X^n - 1$, $m > n$.
c) Să se determine restul împărțirii polinomului $X^{47} - 3X^5 + X + 2$ la polinomul $(X - 1)^2$.

Rezolvare

În toate cele trei situații, aplicarea algoritmului este greoaie. Aplicăm teorema împărțirii cu rest, ținând cont că în toate cele trei situații nu este cerut câtul.

a) $X^m - 1 = (X - 1)(X^{m-1} + X^{m-2} + ... + X + 1)$, identitate cunoscută.
Înlocuind X prin X^n obținem:
$(X^n)^m - 1 = X^{nm} - 1 = (X^n - 1)((X^n)^{m-1} + (X^n)^{m-2} + ... + X^n + 1)$
Deci $X^{nm} - 1 = (X^n - 1)(X^{nm-n} + X^{nm-2n} + ... + X^n + 1) + 0$.
Deducem că restul este 0.

b) Fie $m = n \cdot q + r$, $0 \le r < n$. Avem:
$X^m - 1 = X^{nq+r} - 1 = X^{nq} \cdot X^r - 1 = X^{nq} \cdot X^r - X^r + X^r - 1 = X^r(X^{nq} - 1) + X^r - 1 \overset{a)}{=}$
$= X^r(X^n - 1)q_1 + X^r - 1 = (X^n - 1)q + X^r - 1$.
Deoarece grad $(X^r - 1) = r < n =$ grad (g), rezultă din teorema împărțirii cu rest că restul cerut este $X^r - 1$.

c) Putem scrie $X^{47} - 3X^5 + X + 2 = (X - 1)^2 \cdot C + r$, grad $(r) < 2$.
Rezultă că $r = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și determinarea sa revine la calculul coeficienților a și b.
Așadar $X^{47} - 3X^5 + X + 2 = (X - 1)^2 \cdot C + ax + b$. (2)
Pentru $x = 1$ obținem din (2): $1 - 3 + 1 + 2 = 0 \cdot C(1) + a \cdot 1 + b \Leftrightarrow a + b = 1$.

Înlocuind în (2) $b = 1 - a$, obținem:

$X^{47} - 3X^5 + X + 2 = (X-1)^2C + aX + 1 - a \Leftrightarrow$

$X^{47} - 3X^5 + X + 1 = (X-1)^2C + a(X-1) \Leftrightarrow$

$(X^{47} - 1) - 3(X^5 - 1) + X + 1 = (X-1)^2C + a(X-1) \Leftrightarrow$

$(X-1)(X^{46} + X^{45} + ... + X + 1) - 3(X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) + (X-1) =$
$= (X-1)^2C + a(X-1) \Leftrightarrow$

$X^{46} + X^{45} + ... + X + 1 - 3(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) + 1 = (X-1)C + a$ (3)

Înlocuind X cu 1 în egalitatea (3) obținem:

$\underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{47 \text{ ori}} - 3(1 + 1 + 1 + 1 + 1) + 1 = 0 + a \Leftrightarrow a = 47 - 15 + 1 = 33$

Rezultă că $b = 1 - 33 = -32$ și restul $r = 33X - 32$.

3. a) Să se arate că există și sunt unice numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât
$X^4 - 3X^2 + X - 2 = (X-1)^4 + a(X-1)^3 + b(X-1)^2 + c(X-1) + d$.

b) Descompuneți în funcții simple funcția $\dfrac{X^4 - 3X^2 + X + 2}{(X-1)^4}$.

Rezolvare

a) Vom rezolva problema văzând-o ca aplicație legată de schema lui Horner.
Există și alte rezolvări la care vă puteți gândi.
Egalitatea dată se scrie echivalent
$X^4 - 3X^2 + X - 2 = (X-1)[(X-1)^3 + a(X-1)^2 + b(X-1) + c] + d$.
Deducem că d este restul împărțirii polinomului dat la $X - 1$; analog, c este restul împărțirii polinomului din paranteza dreaptă la $X - 1$ etc.
Organizăm calculul astfel:

	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0	
$a = 1$	1	0	–3	1	–2	
		1	1	–2	–1	$-3 = d$
			1	2	0	$-1 = c$
				1	3	$3 = b$
					1	$4 = a$

Verificare:
$(X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 3(X-1)^2 - 1(X-1) - 3 = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1 +$
$+ 4(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + 3(X^2 - 2X + 1) - (X-1) - 3 = X^4 - 3X^2 + X - 2$.

b) Deducem

$$\frac{X^4 - 3X^2 + X + 2}{(X-1)^4} = \frac{(X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 3(X-1)^2 - (X-1) - 3}{(X-1)^4} =$$

$$= 1 + \frac{4}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X-1)^3} - \frac{3}{(X-1)^4}.$$

Exerciții propuse

1. Să se afle câtul și restul împărțirii lui f la g în cazurile:

a) $f = 2X^3 + 3X^2 - X + 1$, $g = X^2 + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = X^4 + 3iX^3 + X^2 + 2 + i$; $g = iX^2 - (1 + i)X + 1$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$;

c) $f = 2X^4 + (2 + \sqrt{3})X^3 + (2 - \sqrt{3})X^2 + 1$, $g = X^2 + \sqrt{3}X + 1$, $f, g \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[X]$;

d) $f = \hat{2}X^5 + \hat{3}X^2 + X + \hat{2}$; $g = \hat{3}X^2 + X + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$;

e) $f = X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$, $g = \hat{3}X + \hat{2}$, $f, g \in \mathbb{Z}_{11}[X]$;

f) $f = X + 1$, $g = 2X + 2$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

g) $f = 1$; $g = 3X - 2$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;

h) $f = 1$; $g = 2X + 3$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

i) $f = 3$; $g = 4$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

2. a) Să se determine a și $b \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^4 + bX^3 + (b - 2a)X^2 + 5X - 3a$ la polinomul $g = X^2 + X + 2$ să fie $X - 1$.

b) Există $m \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât restul împărțirii lui $f = \hat{m}X^3 + \hat{m}X + \hat{2}$ la polinomul $g = X + \hat{3}$ să fie $\hat{0}$?

3. Determinați $f \in \mathbb{R}[X]$, de grad 3, care împărțit la $X^2 - 3X$ dă restul $6X - 15$ și împărțit la $X^2 - 5X + 8$ dă restul $2X - 7$.

4. a) Să se afle $m \in \mathbb{R}$ dacă $f = X^3 + X^2 + mX + 1$ dă restul 2 la împărțirea cu $X + 2$.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$ astfel încât polinomul $f = X^4 + aX + b$ să dea restul $\hat{1}$ la împărțirea cu $X - \hat{1}$ și restul $\hat{2}$ la împărțirea $X + \hat{1}$.

c) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ știind că restul împărțirii polinomului $f = (X - 1)^n - (X + 3)^n$ la $X + 1$ este 0.

5. Există un polinom $f \in \mathbb{Z}_{13}[X]$ care împărțit la $X^2 - \hat{1}$ să dea restul $\hat{2}X + \hat{3}$ și împărțit la $X^2 + X - \hat{2}$ să dea restul $\hat{4}X + \hat{9}$?

6. Pentru $f \in \mathbb{C}[X]$ restul împărțirii la $X^2 + 1$ este 1, iar restul împărțirii la $X^2 - 1$ este $3X + 1$. Să se afle restul împărțirii la $X^4 - 1$.

7. Fie $f = X^{25} + X^{24} + ... + X + 1$. Să se determine restul împărțirii sale la:

a) $g = X^2 + X - 2$; b) $g = X^2 + 2X + 1$;

c) $g = X^2 + 1$; d) $g = X^2 + X + 1$; e) $g = X^4$.

8. Descompuneți în funcții simple:

a) $\dfrac{X^3 + X + 1}{X^2 + X - 2}$; b) $\dfrac{X^5 + 3X^2 + X - 5}{X(X-1)(X-2)}$; c) $\dfrac{X^4 + X + 1}{(X-1)^2}$; d) $\dfrac{X^5 + 3X^2 + X - 1}{(X+1)^3}$.

9. Aflați câtul și restul împărțirii lui f la g folosind schema lui Horner:
a) $f = 2X^4 + 3X^2 + X - 1$; $g = X + 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;
b) $f = X^3 + X^2 - 2X + i$; $g = X + i$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$;
c) $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{1}$; $g = X - \hat{2}$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.

***

10. Aflați $\dfrac{b}{a}$ știind că restul împărțiri lui $f = bX^3 + aX^2 + aX + b$ la polinomul $2X + 1$ este 0.

11. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(1) = 2, f(2) = 3\ f(3) = 4$.
a) Aflați restul împărțirii polinomului f la $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
b) Determinați forma generală a unui polinom de grad 3 și 5 cu proprietățile date.

12. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + nX + p \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine $m\ n, p$ astfel ca f împărțit la $X - 1$ să dea restul -15, iar $-1 + i$ să fie rădăcină a lui f.

13. Restul împărțirii lui $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p \in \mathbb{R}[X]$ la $X^2 + 1$ este 0, iar câtul g.
Calculați $\sum\limits_{k=1}^{n} g(k)$.

14. Cum putem folosi schema lui Horner pentru a împărți polinomul $X^3 + 3X^2 - X + 1$ la polinomul $2X - 1$?

***15.** Utilizați schema lui Horner pentru împărțirea lui f la g.
a) $f = X^n + X + 1$, $g = X - 1$;
b) $f = X^{2n}$, $g = X + 1$.

16. Suma coeficienților polinomului $f \in \mathbb{Z}_{11}[X]$ este $\hat{2}$.
Aflați restul împărțirii sale la $X - \hat{1}$.

***17.** Dacă restul împărțirii lui $f \in \mathbb{C}[X]$ la $X^2 - X + 1$ este $3X - 2$, care este restul împărțirii lui $f(X + 1)$ la $X^2 + X + 1$?

***18.** Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, grad $(f) \geq 2$. Să se afle restul împărțirii lui $f(f)$ la $f - X$.

19. a) Dezvoltați polinomul $f = X^5 + 3X^3 - X^2 + 2$ după puterile lui $X + 1$.
b) Calculați restul împărțirii lui f la $(X + 1)^3$.

3.5. Divizibilitatea polinoamelor

Putem vorbi de o relație de divizibilitate și într-un inel de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ oarecare.

DEFINIŢIA 1

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și $f, g \in K[X]$.

Spunem că polinomul f **divide** polinomul g și scriem f / g dacă există polinomul $q \in K[X]$ astfel încât $f \cdot q = g$.

Se mai spune că f este *divizor al lui g* sau că g este *multiplu al lui f*.

Uneori, în loc de f / g se mai scrie $g \,\vdots\, f$ (citim: g divizibil cu f).

Polinomul nul este divizor pentru el însuși și este multiplu al oricărui polinom din $K[X]$.

Este evident că dacă $f \neq 0$, atunci f este divizor al lui g dacă restul împărțirii lui g la f este 0.

Exemple

1. $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ $f = X$, $g = 3X$, f / g. Deoarece $X = \frac{1}{3}(3X)$ rezultă, în acest caz, că și g / f.

2. În $\mathbb{Z}_3[X]$ avem $(X - 1) / (X^3 - 1)$ deoarece $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.

3. În $\mathbb{C}[X]$, $(X^2 - 2X + 2) / (X^4 + 4)$.
Într-adevăr prin împărțire, obținem câtul $X^2 + 2X + 2$ și restul 0.

4. În $\mathbb{Q}[X]$, $(X + 1) \not/ \ (X^3 + 3X - 2)$ (nu divide) deoarece restul împărțirii lui $f = X^3 + 3X - 2$ la $X + 1$ este $f(-1) = -6 \neq 0$.

5. În $\mathbb{Q}[X]$, polinomul 3 divide 5, deși în $\mathbb{Z}$, $3 \not/ \ 5$.

Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ. În inelul $K[X]$ avem:

1. f / f (relația este reflexivă);

2. Dacă f / g și g / h, atunci f / h (tranzitivitate)

3. Dacă f / g și f / h, atunci $f / (g \cdot u + h \cdot v)$, oricare ar fi $u, v \in K[X]$.

4. Dacă f / g și $f \neq 0$, atunci grad $(f) \leq$ grad (g).

5. Dacă f / g, atunci $(af) / g$, oricare ar fi $a \in K$, $a \neq 0$.

6. Dacă f / g și g / f, atunci există $a \in K$, $a \neq 0$, astfel încât $f = ag$.

Primele 5 proprietăți se deduc imediat din definiție.
Vom demonstra numai proprietatea 6.
Dacă $f = 0$, atunci $g = 0$ și putem lua a orice element nenul din K.
Dacă $f, g \neq 0$, atunci $f = gg_1$ și $g = ff_1$. Rezultă $f = ff_1g_1$, de unde $f_1g_1 = 1$.
Deducem că f_1 și g_1 sunt polinoame constante nenule.
Luând $g_1 = a$, $a \neq 0$ avem $f = a \cdot g$, c.c.t.d.

DEFINIŢIA 2

Două polinoame $f, g \in K[X]$ se numesc **asociate în divizibilitate** dacă f / g și g / f.

În acest caz scriem $f \sim g$.

Exemple

1. $f = 3X^2 + 1$ și $g = X^2 + \dfrac{1}{3}$, $f\, g \in \mathbb{Q}[X]$; avem f / g și g / f.

2. $f, g, \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \hat{2}X$ și $g = \hat{3}X$.

3. Remarcați că dacă $f \sim g$ și f, g sunt unitare, atunci $f = g$.

Continuăm analogia proprietăților de divizibilitate în $K[X]$ cu proprietățile relației de la numere întregi definind și cel mai mare divizor comun.

DEFINIŢIA 3

Spunem că $d \in K[X]$ este un **divizor comun** al polinoamelor $g, f \in K[X]$ dacă d / f și d / g.

DEFINIŢIA 4

Fie $f, g \in K[X]$, nenule. Un polinom $d \in K[X]$ se numește **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor f și g dacă îndeplinește condițiile
i) d / f și d / g (d este divizor comun)
ii) Dacă d' / f și d' / g, atunci d' / d.

În acest caz d se notează (f, g) și se prescurtează c.m.m.d.c.
În cazul în care $g = 0$ sau $f = 0$, polinomul (f, g) nu poate fi definit ca mai sus.

Prin convenție $(f, 0) = f$.

Să mai observăm că din definiție nu reiese unicitatea celui mai mare divizor comun: dacă polinomul d verifică cele două condiții din definiție, atunci și ad, $a \neq 0$, verifică. Mai mult: dacă $D \in K[X]$ verifică cele două condiții, atunci evident D / d, dar și d / D. Așadar, $D \sim d$.

Prin urmare, cel mai mare divizor comun a două polinoame, dacă există, este unic, abstracție făcând de o asociere în divizibilitate.

De obicei, se alege (f, g) polinomul unitar ce verifică i) și ii) din definiția celui mai mare divizor comun.

Teorema următoare ne asigură de existența celui mai mare divizor comun, oferind un procedeu efectiv de calcul.

TEOREMĂ (algoritmul lui Euclid)

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și $f, g \in K[X]$, nenule. Atunci există (f, g).

Demonstrație

Să urmărim șirul de împărțiri

$$f = g \cdot c_1 + r_1,\ \text{grad}\,(r_1) < \text{grad}\,(g) \qquad (*)$$
$$g = r_1 \cdot c_2 + r_2,\ \text{grad}\,(r_2) < \text{grad}\,(r_1)$$
$$r_1 = r_2 \cdot c_3 + r_3,\ \text{grad}\,(r_3) < \text{grad}\,(r_2)$$
$$r_2 = r_3 \cdot c_3 + r_4,\ \text{grad}\,(r_4) < \text{grad}\,(r_3)$$
$$r_3 = r_4 \cdot c_4 + r_5,\ \text{grad}\,(r_5) < \text{grad}\,(r_4)$$

....

Deoarece grad $(g) >$ grad $(r_1) >$ grad $(r_2) >$ grad $(r_3) > \ldots$ se va ajunge la un moment dat la grad $r_{n+1} = -\infty$, când $r_{n+1} = 0$, iar șirul de împărțiri se termină

....

$$r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1},\ \text{grad}\,(r_{n-1}) < \text{grad}\,(r_{n-2})$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n,\ \text{grad}\,(r_n) < \text{grad}\,(r_{n-1})$$
$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n + r_{n+1},\ (r_{n+1} = 0) \qquad (*)$$

Ultimul rest nenul, r_n, este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

Într-adevăr

i) Urmărind șirul de egalități de jos în sus avem:
r_n / r_{n-1} (ultima egalitate); r_n / r_{n-2} (penultima egalitate), ..., r_n / g (a doua egalitate) și în sfârșit r_n / f (din prima egalitate).

ii) Dacă d' este un alt divizor comun pentru f și g, atunci urmărind șirul de egalități (*) de sus în jos avem succesiv:
d' / r_1, d' / r_2, d' / r_3, ..., d' / r_n (din penultima egalitate) c.c.t.d.
În cazul când $(f, g) = 1$, spunem că polinoamele sunt *prime între ele*.

Exemple de aplicare a algoritmului lui Euclid

1. Să se afle un c.c.m.d.c. al polinoamelor $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$ şi $g = \hat{3}X^2 + X + \hat{1}$.

Avem:

$$\begin{array}{l|l}
\hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{1} & \hat{3}X^2 + X + \hat{1} \\ \cline{2-2}
\hat{2}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{4}X & \hat{4}X + \hat{3} \\ \cline{1-1}
/ \quad -X^2 - X + \hat{1} & \\
\quad\;\; -X^2 + \hat{3}X + \hat{3} & \\ \cline{1-1}
\qquad -\hat{4}X - \hat{2} = X + \hat{3} &
\end{array}$$

Urmează împărţirea polinomului $\hat{3}X^2 + X + \hat{1}$ la restul obţinut, $X + \hat{3}$.

$$\begin{array}{l|l}
\hat{3}X^2 + X + \hat{1} & X + \hat{3} \\ \cline{2-2}
\hat{3}X^2 + \hat{4}X & \hat{3}X - \hat{3} \\ \cline{1-1}
/ \quad -\hat{3}X + \hat{1} & \\
\quad\;\; -\hat{3}X + \hat{1} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad \hat{0} &
\end{array}$$

Am obţinut restul $\hat{0}$, deci algoritmul se încheie.

Ultimul rest nenul este $X + \hat{3}$, deci $(f, g) = X + \hat{3}$.

2. $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - X^3 + X^2$ şi $g = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2$, $(f, g) = ?$

Rezolvare

Deoarece f este „mai scurt“ începem algoritmul cu împărţirea lui g la f, putând alege şi invers.

$$\begin{array}{l|l}
X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2 & X^4 - X^3 + X^2 \\ \cline{2-2}
X^4 - X^3 + X^2 & 1 \\ \cline{1-1}
/ \quad / \quad 2X^2 - 2X + 2 &
\end{array}$$

Urmează să împărţim $X^4 - X^3 + X^2$ la polinomul $2X^2 - 2X + 2$

Pentru evitarea calculului mai greoi cu fracţii, putem împărţi sau înmulţi polinoamele (aflate în această situaţie) cu numere convenabil alese, fără a afecta (f, g).

În cazul nostru, continuăm algoritmul cu $(2X^2 - 2X + 2) : 2 = X^2 - X + 1$

$$\begin{array}{l|l}
X^4 - X^3 + X^2 & X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2}
X^4 - X^3 + X^2 & X^2 \\ \cline{1-1}
/ \quad / \quad 0 &
\end{array}$$

Algoritmul se încheie, $(f, g) = X^2 - X + 1$.

3. $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 3X^2 + 1$, $g = 2X^2 + X - 1$, $(f, g) = ?$

Rezolvare

Înlocuim f prin $4f$ și aplicăm algoritmul lui Euclid.

$$\begin{array}{l|l}
4X^3 + 12X^2 + 4 & 2X^2 + X - 1 \\ \cline{2-2}
4X^3 + \ \ 2X^2 - 2X & 2X + 5 \\ \cline{1-1}
/ \qquad 10X^2 - 2X + 4 & \\
\qquad\ \ \ 10X^2 + 5X - 5 & \\ \cline{1-1}
\qquad / \qquad -7X + 9 &
\end{array}$$

Urmează să împărțim $g = 2X^2 + X - 1$ la $-7X + 9$.

Înlocuim g cu $49g$ și continuăm:

$$\begin{array}{l|l}
98X^2 + 49X - 49 & -7X + 9 \\ \cline{2-2}
14X^2 - 126X & -14X - 25 \\ \cline{1-1}
/ \qquad 175X - 49 & \\
\qquad\ \ \ 175X - 225 & \\ \cline{1-1}
\qquad / \qquad 174 &
\end{array}$$

Algoritmul se încheie aici, fiind evident că prin împărțirea lui $-7X + 9$ cu 174 obținem restul 0. Conform unei convenții anterioare, luăm $(f, g) = 1$ (polinoamele în acest caz sunt prime între ele).

4. Să se arate că $(X^n - 1, X^m - 1) = X^d - 1$, unde $d = (m, n)$, $m > n$.

Rezolvare

Vom urmări algoritmul lui Euclid pentru aflarea lui d; corespunzător acestor împărțiri vom avea împărțiri similare în algoritmul lui Euclid pentru polinoamele $X^n - 1$ și $X^n - 1$. Am văzut într-un exercițiu rezolvat în paragraful anterior că dacă $m = n \cdot q + r$, $0 \le r < n$, atunci $X^m - 1 = (X^n - 1)Q + X^r - 1$, grad $(X^r - 1) < n$.

Urmăriți „tandemul“:

$m = n \cdot q + r,\ 0 \le r < n$	$X^m - 1 = (X^n - 1)Q + X^r - 1$, grad $(X^r - 1) <$ grad (Q)
$n = r \cdot q_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < r$	$X^n - 1 = (X^r - 1)Q_1 + X^{r_1} - 1$, grad $(X^{r_1} - 1) <$ grad $(X^r - 1)$
$r_1 = r_1 \cdot q_2 + r_2,\ 0 \le r_2 < r_1$	$X^r - 1 = (X^{r_1} - 1)\,Q_2 + X^{r_2} - 1$, grad $(X^{r_2} - 1) <$ grad $(X^{r_1} - 1)$
....	....
$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n,\ 0 \le r_n < r_{n-1}$	$X^{r_{n-2}} - 1 = (X^{r_{n-1}} - 1)Q_n + X^{r_n} - 1$, grad $(X^{r_n} - 1) <$ grad $(X^{r_{n-1}} - 1)$
$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0,\ 0 \le r_n < r_{n-1}$	$X^{r_{n-1}} - 1 = (X^{r_n} - 1)Q_{n+1} + 0$
algoritmul se încheie	algoritmul se încheie

Deoarece $d = r_n$, deducem că $(X^m - 1, X^n - 1) = X^{r_n} - 1 = X^d - 1$.

OBSERVAȚII

1. Ne reamintim că rădăcinile polinomului $X^m - 1$ sunt rădăcinile de ordinul m ale unității, mulțimea lor fiind notată U_m. Este evident că rădăcinile comune celor două polinoame $X^m - 1$ și $X^n - 1$ sunt rădăcinile polinomului $X^d - 1$, $d = (m, n)$. Regăsim că $U_m \cap U_n = U_d$, un rezultat dobândit la capitolul despre grupuri.
2. În teoria numerelor avem un rezultat similar $(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^d - 1$ (revedeți asemănător demonstrația!).

Consecințe ale algoritmului lui Euclid

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ. Atunci:

1. Dacă $f, g \in K[X]$ și $d = (f, g)$, atunci există $u, v \in K[X]$ astfel încât $d = uf + vg$.
2. Dacă $f, g \in K[X]$, atunci $(f, g) = 1 \Leftrightarrow (\exists)\ u, v \in K[X]$ astfel încât $uf + vg = 1$.
3. Dacă $f, g, h \in K[X]$, astfel încât $f / (g \cdot h)$ și $(f, g) = 1$, atunci f / h.

Demonstrație

1. Urmărim șirul de împărțiri (*) pentru aflarea c.m.m.d.c.
Din penultima egalitate scoatem: $d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1} \cdot C_n$ (1)
Din antepenultima egalitate scoatem $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} \cdot C_{n-1}$, pe care îl înlocuim în (1). Obținem
$d = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} \cdot C_{n-1})\, C_n = -r_{n-3} \cdot C_n + r_{n-2}\,(1 + C_{n-1}C_n)$ (2)
Din aproape în aproape, urmărind în continuare șirul de împărțiri (*), deducem că d este o „combinație liniară“ a polinoamelor r_{n-3} și r_{n-4}; ...; r_2 și r_1, r_1 și g, g și f, adică există $u, v \in K[X]$ astfel încât $d = u \cdot f + v \cdot g$.
2. Implicația „⇒“ reiese din 1)
Reciproc: notând $d = (f, g)$, deducem că $d / (uf + vg)$, iar din $u \cdot f + v \cdot g = 1$ obținem $d / 1$, adică $d = 1$.
3. Deoarece $(f, g) = 1$, din 2) avem că $u \cdot f + v \cdot g = 1$, $u, v \in K[X]$.
Amplificând cu h obținem $u\,f\,h + v\,g\,h = h$ (2). Deoarece $f / (g \cdot h)$, rezultă că f divide ambii termeni ai sumei (2), adică f / h. Continuând seria analogiilor cu divizibilitatea numerelor întregi definim în continuare *cel mai mic multiplu comun* a două polinoame.

DEFINIȚIA 4

Fie $f, g \in K[X]$, nenule. Spunem că polinomul $m \in K[X]$ este un **cel mai mic multiplu comun** al polinoamelor f și g dacă:
i) f / m și g / m (m este multiplu comun);
ii) oricare ar fi $m' \in K[X]$, dacă f / m' și g / m', atunci m / m'.

Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f și g se notează $[f, g]$ și se prescurtează c.m.m.m.c.

Prin convenție, dacă $f = 0$ sau $g = 0$, $[f, g] = 0$

Prin teorema următoare probăm existența c.m.m.m.c. pentru oricare două polinoame nenule, oferind în același timp o modalitate de calcul.

TEOREMA 2

Fie $f, g \in K[X]$, $f \neq 0$, $g \neq 0$, și $d = (f, g)$. Atunci $[f, g] \cdot (f, g) \sim f \cdot g$.

Demonstrație

Avem: $f = d \cdot f_1$, $g = d \cdot g_1$. Rezultă $(f_1, g_1) = 1$ (Justificați!)

Demonstrăm că $m = df_1g_1$ este un c.m.m.m.c. al polinoamelor f și g.

i) Din $m = f \cdot g_1'$ deducem că f / m, analog g / m.

ii) Fie m' un alt multiplu comun al polinoamelor f și g, adică $m' = ff_2$ și $m' = g\,g_2$.

Rezultă $m' = df_1f_2$ și $m' = dg_1g_2$, iar de aici $f_1f_2 = g_1g_2$.

Deoarece f_1 / g_1g_2 și $(f_1, g_1) = 1$, deducem că f_1 / g_2, adică $g_2 = f_1h$.

Atunci $m' = dg_1g_2 = dg_1(f_1h) = (df_1g_1)h = mh$, deci m / m'.

Prin urmare $m \cdot d = (df_1g_1) \cdot d = (df_1) \cdot (dg_1) = f \cdot g$.

OBSERVAȚII

1. Ca și în cazul celui mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun a două polinoame este unic, abstracție făcând de o asociere în divizibilitate.
   În acest fel $[f, g]$ reprezintă o clasă de polinoame asociate în divizibilitate, clasa multiplilor comuni, de grad minim.

2. Cel mai mic multiplu al polinoamelor poate fi aflat prin împărțirea produsului lor la cel mai mare divizor comun. Într-un exercițiu rezolvat anterior am văzut că
   $(X^4 - X^3 + X^2, X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2) = X^2 - X + 1$
   Atunci
   $[X^4 - X^3 + X^2, X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2] = (X^4 - X^3 + X^2) \cdot (X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2) :$
   $: (X^2 - X + 1) = X^2 (X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2) = X^6 - X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 2X^2.$

3. Se pot defini un c.m.m.d.c. și un c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, ..., f_n$, $n \geq 3$, recursiv.
   $(f_1, f_2, ..., f_n) = ((f_1, f_2, ..., f_{n-1}), f_n)$
   $[f_1, f_2, ..., f_n] = [[f_1, f_2, ..., f_{n-1}], f_n]$

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că $X^2 + X + 1$ divide polinomul $X^{3m+2} + X^{3n+1} + 1$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare

$X^{3m+2} + X^{3n+1} + 1 = (X^{3m+2} - X^2) + (X^{3n+1} - X) + (X^2 + X + 1) =$
$= X^2(X^{3m} - 1) - X(X^{3n} - 1) + (X^2 + X + 1)$.

Însă $(X^{3m} - 1) \vdots (X^3 - 1)$ și $(X^{3n} - 1) \vdots (X^3 - 1)$, iar $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.
Rezultă că $(X^{3m} - 1)$ și $(X^{3n} - 1)$ sunt divizibile cu $X^2 + X + 1$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ și $S_k = 1^k + 2^k + ... + n^k$, $k \geq 1$.
Să se arate că există un polinom $f_k \in \mathbb{Q}[X]$ de grad $k + 1$, având coeficientul dominant $\frac{1}{k+1}$, astfel încât $S_k = f_k(n)$. În plus $f_k \vdots X(X + 1)$.

Rezolvare

Ne reamintim din clasa a X-a identitatea:

$(1 + X)^{k+1} = C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 X + C_{k+1}^2 X^2 + ... + C_{k+1}^{k+1} X^{k+1}$.

Dând lui X valorile 1, 2, 3, ..., n și adunând egalitățile obținute avem:

$(n + 1)^{k+1} - (n + 1) = C_{k+1}^1 S_1 + C_{k+2}^2 S_2 + ... + C_{k+1}^k S_k$, $k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Aceste identități se numesc *relațiile lui Newton* și permit calculul lui S_k, iterativ, pornind de la $S_1, S_2, ..., S_{k-1}$.
Revedeți calculul lui S_4.
Revenim la cerința pe care o demonstrăm prin inducție după k.

Pentru $k = 1$ avem $S_1 = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ și $f_1 = \frac{x(x+1)}{2}$.

Deci $S_1 = f_1(n)$, coeficientul dominant este $\frac{1}{1+1}$, iar $f_1 \vdots X(X + 1)$.

Presupunem propoziția adevărată pentru orice i, $1 \leq i \leq k - 1$ și o demonstrăm pentru k.
Din relațiile lui Newton scoatem S_k

$$S_k = \frac{1}{k+1}\left[\left((n+1)^{k+1} - (n+1)\right) - C_{k+1}^1 S_1 - C_{k+1}^2 S_2 - ... - C_{k+1}^{k-1} S_{k-1}\right].$$

Conform ipotezei de inducție avem:

$$S_k = \frac{1}{k+1}\left[(n+1)\left((n+1)^k - 1\right) - \frac{1}{k+1} C_{k+1}^1 f_1(n) - \frac{1}{k+1} C_{k+1}^2 f_2(n) - ... - \frac{1}{k+1} C_{k+1}^{k-1} f_{k-1}(n)\right] =$$

$$= \frac{1}{k+1}(n + 1)(n + 1 - 1)[(n + 1)^{k-1} + (n + 1)^{k-2} + ... + (n + 1) + 1] -$$

$$- \frac{1}{k+1} C_{k+1}^1 f_1(n) - \frac{1}{k+1} C_{k+1}^2 f_2(n) - ... - \frac{1}{k+1} C_{k+1}^{k-1} f_{k-1}(n).$$

Evident, alegem

$$f_k = \frac{1}{k+1}(X+1)(X)[(X+1)^{k-1} + (X+1)^{k-2} + ... + (X+1) + 1] -$$

$$-\frac{1}{k+1}C_{k+1}^{k}f_1(X) - \frac{1}{k+1}C_{k+1}^{2}f_2(X) - ... - \frac{1}{k+1}C_{k+1}^{k-1}f_{k-1}(X) \qquad (1)$$

Ținând cont că f_1 are gradul 2, f_2 are gradul 3, .., f_{k-1} are gradul k, rezultă din (1) că f_k are gradul $k+1$ (gradul primului termen).

De asemenea, urmărind primul termen, observăm că $\frac{1}{k+1}$ este coeficientul dominant.

Fiecare dintre polinoamele $f_1, f_2, ... f_{k-1}$ sunt divizibile, conform ipotezei de inducție prin $X(X+1)$, adică $f_k \vdots X(X+1)$, c.c.t.d.

Comentariu. Ultima afirmație a exercițiului permite calculul sumelor de puteri asemenea, S_k, mult mai rapid decât printr-un calcul iterativ: $S_1, S_2, ..., S_{k-1}$ și apoi S_k.

Exemplu

Să calculăm $S_4 = 1^4 + 2^4 + ... + n^4$.

$S_4 = f_4(n)$, unde f_4 este un polinom de grad 5, divizibil cu $X(X+1)$.

Ne propunem să arătăm că $f_4 = \frac{X(X+1)}{5}(X^3 + aX^2 + bX + c) \qquad (2)$

Dând lui X valorile 1, 2, 3 în (2) avem:

$$\begin{cases} 1^3 = \frac{1\cdot 2}{5}(1+a+b+c) \\ 1^3 + 2^3 = \frac{2\cdot 3}{5}(8+4a+2b+c) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 = \frac{3\cdot 4}{5}(27+9a+3b+c) \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de ecuații obținem: $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{6}$, $c = -\frac{1}{6}$.

Deducem:

$$f_4 = \frac{X(X+1)}{5}\left(X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{6}X - \frac{1}{6}\right) = \frac{X(X+1)(2X+1)(3X^2+3X-1)}{30}.$$

Deci $1^4 + 2^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Rețineți procedeul!

3. Determinați rădăcinile polinoamelor $f = X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ și $g = X^3 - 14X^2 + 56X - 64$ știind că au rădăcinile comune.

Rezolvare

Rădăcinile comune sunt rădăcinile c.m.m.d.c. al polinoamelor (f, g).

Aplicăm algoritmul lui Euclid

$$\begin{array}{l|l} X^3 - 14X^2 + 56X - 64 & X^3 - 7X^2 + 14X - 8 \\ \cline{2-2} \underline{X^3 - 7X^2 + 14X - 8} & 1 \\ /\quad -7X^2 + 42X - 56 \to X^2 - 6X + 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^3 - 7X^2 + 14X - 8 & X^2 - 6X + 8 \\ \cline{2-2} \underline{X^3 - 6X^2 + 8X} & X - 1 \\ /\quad -X^2 + 6X - 8 & \\ \quad\ \underline{-X^2 + 6X - 8} & \\ \quad\ /\quad /\quad 0 & \end{array}$$

Rezultă că $(X^3 - 14X^2 + 56X - 64, X^3 - 7X^2 + 14X - 8) = X^2 - 6X + 8$.

Rădăcinile comune sunt rădăcinile polinomului $X^2 - 6X + 8$, adică 4 și 2.

Celelalte rădăcini ale polinoamelor f și g se obțin după împărțirea lui f și g la $X^2 - 6X + 8$.

$f = (X^2 - 6X + 8)(X - 1)$, $g = (X^2 - 6X + 8)(X - 8)$

Deci f are rădăcinile 4, 2 și 1, iar g are rădăcinile 4, 2 și 8.

4. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 2X + a$, $g = X^4 - 3X^3 + 4X^2 + 3X + b$.
Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, știind că (f, g) are gradul 2.

Rezolvare

Aplicăm algoritmul lui Euclid

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 2X + a & X^4 - 3X^3 + 4X^2 + 3X + b \\ \cline{2-2} \underline{X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 2X + b} & 1 \\ /\quad X^3 - X^2 - X + a - b & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 3X^3 + 4X^2 + 3X + b & X^3 - X^2 - X + a - b \\ \cline{2-2} \underline{X^4 - X^3 - X^2 + (a - b)X} & X - 2 \\ /\quad -2X^3 + 5X^2 + (3 - a - b)X + b & \\ \quad \underline{-2X^3 + 2X^2 + 2X - 2(a - b)} & \\ \quad /\quad 3X^2 + (1 - a + b)X + 2a - b & \end{array}$$

Continuăm, amplificând în prealabil noul deîmpărțit cu 9.

$$\begin{array}{l|l} 9X^3 - 9X^2 - 9X + 9a - 9b & 3X^2 + (1 - a + b)X + 2a - b \\ \cline{2-2} 9X^3 + (3 - 3a + 3b)X^2 + (6a - 3b)X & 3X + (-4 + a - b) \\ \cline{1-1} /\quad (-12 + 3a - 3b)X^2 + (-9 - 6a + 3b)X + 9a - 9b & \\ \quad (-12 + 3a - 3b)X^2 + (-1 - a + b)(-4 + a - b)X + (2a - b)(-4 + a - b) & \\ \hline \quad / \qquad (a^2 - 2ab + b^2 - 11a + 8b - 5)X - 2a^2 + 3ab - b^2 + 17a - 13b & \end{array}$$

Aici algoritmul trebuie să se încheie, altfel (f, g) are gradul mai mic decât 2.
Prin urmare, restul obținut la ultima împărțire trebuie să fie 0.

Rezultă: $\begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 - 11a + 8b - 5 = 0 \\ -2a^2 + 3ab - b^2 + 17a - 13b = 0 \end{cases}.$

Adunăm cele două relații și obținem $-a^2 + ab + 6a - 5b - 5 = 0$.
Gândind egalitatea ca o ecuație de gradul II în a obținem
$a = 5$ și $a = b + 1$.
Pentru $a = 5$ obținem $b = -5$ și $b = 7$.
Pentru $b = a - 1$ găsim $a = -4$ și $b = -5$.

5. Să se demonstreze proprietățile următoare pentru polinoame.
a) Dacă f / h, g / h și $(f, g) = 1$, atunci $(f \cdot g) / h$.
b) $(f \cdot h; g \cdot h) = (f; g) \cdot h$.
c) Dacă f / h și g / h, atunci $[f, g] / h$.

Rezolvare

a) Avem $h = ff_1$, $h = gg_1$, $ff_1 = gg_1$, de unde $f / (gg_1)$. Însă $(f, g) = 1$, deci f / g_1, adică $g_1 = f \cdot h_1$, adică $h = g(fh_1) = (gf)h_1$. Din ultima egalitate, deducem $(g \cdot f) \mid h$.
b) Notăm $(f, g) = d$ și demonstrăm că $d \cdot h$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor $f \cdot h$ și $g \cdot h$, urmărind definiția.
i) Evident $(dh) / (fh)$ și $(dh) / (gh)$.
ii) Fie d' un alt divizor comun al polinoamelor $f \cdot h$ și $g \cdot h$.
Deoarece $(f, g) = d$ rezultă, conform unei consecințe a algoritmului lui Euclid, că există $u, v \in K[X]$ astfel încât $u \cdot f + v \cdot g = d$ (1).
Amplificăm în (1) cu h și obținem $u(fh) + v(gh) = dh$.
Deducem că d' divide membrul stâng al ultimei egalități, adică $d' / (dh)$.
c) Fie $d = (f, g)$. Atunci $f = df_1$, $g = dg_1$, $(f_1, g_1) = 1$.
Putem lua $[f, g] = df_1g_1$.
Din f / h rezultă f_1 / h; analog g_1 / h și d / h (2)
Deoarece $(f_1, g_1) = 1$, deducem că $(f_1 \cdot g_1) / h$ (3)
Deoarece $(d, f_1 \cdot g_1) = 1$, ținem cont de (2) și (3) avem $(d \cdot f_1 \cdot g_1) / h$, adică $[f, g] / h$.

Exerciţii propuse

1. Să se arate că f divide g unde:
a) $f = X - \hat{1}$, $g = X^3 + X^2 + X - \hat{3}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$;
b) $f = 2X + 1$, $g = 2X^3 + 3X^2 - X - 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;
c) $f = X^2 + X + i$, $g = X^7 + X^6 + iX^5 - iX^2 - iX + 1$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$;
d) $f = X^4 + aX - 1$, $g = X^8 - a^2X^2 + 2aX - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

2. Determinaţi $a, b \in \mathbb{C}$ dacă g / f.
a) $g = X^2 - 4$, $f = X^5 + aX + b$;
b) $g = 2X^2 + X + b$, $f = 2X^4 + 3X^3 + aX^2 - 1$;
c) $g = iX - 2$, $f = aX^6 + aiX + b$;
d) $g = 2X - 4$, $f = X^{10} + aX^4 + 8aX$.

3. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care:
a) $X^2 + X + 1$ divide $X^n + X + 1$;
b) $X^2 + 1$ divide $(X^2 + X + 1)^n - X$.

4. Aflaţi c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. pentru polinoamele:
a) $f = X^6 - 1$ $g = X^4 + X^2 + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
b) $f = X^4 + X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$ şi $g = X^2 + \hat{3}X + \hat{6}$, $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$;
c) $f = X^3 - X^2 + X - 1$, $g = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;
d) $f = X^2 + iX + 1$, $g = X^2 + X + i$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$;
e) $f = X^5 - 1$, $g = X^4 - 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;
f) $f = 0$; $g = 2X^3 + 3$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$.

5. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$, $g = X^n + X^{n-1} + ... + X + 1$.
a) Calculaţi: $X \cdot f - g$.
b) Calculaţi: (f, g).
c) Calculaţi: $(X^n - 1, X^{n-1} - 1)$.

6. a) Există polinoame care să aibă c.m.m.d.c $X^3 + X + 1$ şi c.m.m.m.c. $X^4 + X^2 + 3X + 2$?
b) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ şi produsul $f \cdot g$ ştiind că c.m.m.d.c. al lor este $X^2 + X$ şi c.m.m.m.c. al lor este $X^4 + aX^3 + X + b$.

7. Determinaţi numerele naturale a, b în cazurile:
a) $(a, b) = 10$ şi $a \cdot b = 2400$;
b) $a + b = 98$ şi $[a, b] = 720$.

***

8. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că ecuațiile următoare au două rădăcini comune:

a) $x^3 + 2x^2 + ax - 2 = 0$, $x^3 - 2x^2 - x - a + 1 = 0$;

b) $x^3 - 3x^2 + 2x + a = 0$, $x^3 - 2x^2 - 3x + b = 0$.

9. a) Polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$ sunt unitare și au același grad. Determinați polinoamele știind că $(f, g) = X - 1$, $[f, g] = X^3 - X$.

b) Polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $(f, g) = X^2 + 1$, $[f, g] = X^4 + 3X^3 + 3X + 2$. Determinați f și g știind că $f(-2) = 5$ și $g(-1) = 6$.

c) Un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este $X^3 - 2X + 1$, iar un cel mai mic multiplu comun este $(X^2 + X)(X^3 - 2X + 1)$. Rezolvați ecuația $f(x) \cdot g(x) = 0$.

10. Determinați (f, g, h) și $[f, g, h]$ dacă:

a) $f = X - 1$; $g = -X^2 + 1$, $h = X^3 + X^2 - 2$;

b) $f = X$; $g = X^2 + X$, $h = X^2 + X + 1$.

11. Calculați c.m.m.d.c. al polinoamelor:

a) $X^4 + 1$; $X^6 + 1$; b) $X^6 + 1$, $X^{10} + 1$;

c) $X^6 - 1$, $X^5 + 1$; d) $X^5 + 1$, $X^7 + 1$.

12. Determinați două polinoame $f, g \in \mathbb{R}[X]$ cunoscând că un c.m.m.d.c. al lor este $X^2 - 1$, algoritmul lui Euclid are 3 etape și la fiecare etapă câtul este X.

13. a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât un c.m.m.d.c al polinoamelor $f = X^3 - X^2 + a$ și $g = X^3 + X + b$ să aibă gradul 2.

b) Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 + 2X^2 + 11X + a$, $g = X^3 + X^2 + 14X + b$. Să se determine a și b astfel încât f și g să aibă un divizor comun de grad 2.

14. Determinați polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $(X^2 + 2X + 2)f + (X^2 + 3X + 3)g = 1$.

15. Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$, n impar.

a) Să se arate că $(X^n - 1, X^m + 1) = 1$.

b) Dacă $a \in \mathbb{Z}$ demonstrați că $(a^n - 1, a^m + 1)$ este 1 sau 2.

3.6. Polinoame ireductibile

Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

Ideea de descompunere în factori ireductibili este intim legată de rădăcinile polinoamelor. În acest sens avem un prim rezultat.

TEOREMA LUI BÉZOUT

Fie $f \in K[X]$, unde $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ şi $a \in K$.
Atunci a este rădăcină pentru f dacă și numai dacă $(X - a) / f$.

Demonstraţie Fie $f = (X - a)\, q + r$, unde grad $(r) < 1$.
Atunci: a este rădăcină pentru $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow (x - a) / f$.

Consecinţe

1. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt m rădăcini distincte din corpul K ale polinomului $f \in K[X]$, atunci $(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_m)$ divide f.

2. Dacă polinomul f are gradul n, atunci polinomul are cel mult n rădăcini în corpul K.

Demonstraţie **1.** Inducție după m.
Pentru $m = 1$ propoziția este adevărată (teorema lui Bézout).
Presupunem propoziția adevărată pentru $m - 1$.

Deci $f = \prod_{i=1}^{m-1}(X - a_i)g$ (1)

Deoarece $0 = f(a_m) = \prod_{i=1}^{m-1}(a_m - a_i)g(a_m)$ și $a_m - a_i \neq 0$, pentru orice i, rezultă că $g(a_m) = 0$.
Aplicând teorema lui Bézout rezultă că $(X - a_m) / g$, adică $g = (X - a_m)h$, unde $h \in K[X]$.

Revenind la (1), obținem $f = \prod_{i=1}^{m}(X - a_i)h$.

2. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K$ sunt rădăcini distincte ale polinomului în corpul K atunci:

$n = \text{grad}\,(f) = \text{grad}\left(\prod_{i=1}^{m}(X - a_i)h\right) = \text{grad}\left(\prod_{i=1}^{m}(X - a_i)\right) + \text{grad}\, h =$
$= m + \text{grad}\, h \geq m$.

OBSERVAŢIE

Consecința 2 afirmă că singurul polinom cu coeficienți într-un corp care are mai multe rădăcini decât gradul său este polinomul nul.

Vom reveni printr-un exercițiu rezolvat asupra acestui rezultat.

Un polinom poate fi scris ca produs de două sau mai multe polinoame neconstante sau nu poate fi scris astfel.

Exemplu

Polinomul $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ nu se poate scrie ca produs de polinoame de grad ≥ 1 din $\mathbb{R}[X]$ pentru că nu are rădăcini în $\mathbb{R}$.

Același polinom gândit cu coeficienți în $\mathbb{C}[X]$ se poate descompune:

$X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$.

DEFINIȚIE

Un polinom $g \in K[X]$ nenul și neconstant se numește **ireductibil** în $K[X]$ dacă din f / g rezultă $f \sim 1$ sau $f \sim g$.

Cu alte cuvinte: un polinom, g, nenul și neconstant, este ireductibil dacă singurii săi divizori sunt constantele nenule sau cele asociate în divizibilitate cu g.

Prin urmare, un polinom este ireductibil când nu se poate scrie ca produs de polinoame neconstante, de grad mai mic decât gradul său.

Un polinom nenul și neconstant care nu este ireductibil se numește *polinom reductibil*.

Exemple

1. Orice polinom de gradul 1 din $K[X]$ este ireductibil.

2. Orice polinom de grad 2 sau de grad 3, *care nu admite rădăcini în corpul K,* este ireductibil în K[X].

Într-adevăr, dacă f ar fi reductibil în $K[X]$, ar avea cel puțin un divizor de gradul I: $aX + b$, $a \neq 0$.

Ar rezulta că polinomul ar avea cel puțin o rădăcină: adică $-b \cdot a^{-1}$, contradicție.

Astfel: $f = X^3 - X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ deoarece are gradul 3 și nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$ ($f(\hat{0}) = \hat{1}, f(\hat{1}) = \hat{2}, f(\hat{2}) = \hat{1}$)

OBSERVAȚIE

Rezultatul anterior nu este adevărat în cazul polinoamelor de grad 4 sau mai mare: Polinomul $X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{R}$, dar este reductibil. Într-adevăr:

$X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 =$

$= (X^2 - \sqrt{2} \cdot X + 1)(X^2 + \sqrt{2}\, X + 1)$.

3. Orice polinom ireductibil în $K[X]$, de grad mai mare sau egal cu 2, nu admite rădăcini în corpul K (demonstrație prin reducere la absurd, apelând la teorema lui Bézout).

Consecință: În $\mathbb{R}[X]$ singurele polinoame ireductibile sunt cele de grad 1 sau cele de forma $aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

Următorul rezultat teoretic este unul analog teoremei fundamentale a aritmeticii din $\mathbb{Z}$, cu privire la descompunerea în factori.

TEOREMĂ

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ.

Orice polinom nenul și neconstant din $K[X]$ se poate scrie în mod unic ca produs de factori ireductibili în $K[X]$.

În acest caz unicitatea trebuie înțeleasă abstracție făcând de asocieri și de ordinea în care apar factorii.

Exemplu

$f = X^3 + 2X^2 - X - 2 \in \mathbb{R}[X]$ se scrie:

$f = X^2(X + 2) - (X + 2) = (X + 2)(X^2 - 1) = (X + 2)(X + 1)(X - 1)$

(descompunere în factori de gradul 1, deci ireductibili).

Scrierea: $f = (2X + 4)(X + 1)\left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$ este de asemenea o descompunere în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Cele două descompuneri ale lui f sunt considerate identice, deoarece factorii $2X + 4$ și $\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ sunt asociați în divizibilitate cu $X + 2$ respectiv $X - 1$.

OBSERVAŢII

1) Este posibil ca unele polinoame ireductibile care apar în descompunerea în factori a unui polinom dat să fie egale sau asociate în divizibilitate.

În acest caz descompunerea se scrie cu ajutorul puterilor, obținând că orice polinom $f \in K[X]$ se poate scrie (unic) sub forma:

$f = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, unde $p_1, p_2, \ldots p_n \in K[X]$ sunt ireductibile și oricare două sunt neasociate în divizibilitate.

2) Putem calcula un c.m.m.d.c. și un c.m.m.m.c. a două sau mai multe polinoame plecând de la descompunerea lor în factori ireductibili:

Un c.m.m.d.c. este produsul factorilor comuni luați la puterea cea mai mică.

Un c.m.m.m.c. este produsul factorilor comuni si necomuni luați la puterea cea mai mare.

Exemplu

$f = 3(X - 1)^2(X + 2)$; $g = (X - 1)^3X(X + 2)^4(X^2 + X + 1)$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

Atunci $(f, g) = (X - 1)^2(X + 2)$; $[f, g] = (X - 1)^3(X + 2)^4X(X^2 + X + 1)$.

Exerciții rezolvate

1. a) Fie $f, g \in K[X]$ grad (f) = grad $(g) = n$ și elementele distincte $a_1, a_2, \dots a_n, a_{n+1} \in K$ astfel încât $f(a_i) = g(a_i)$ oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Arătați că $f = g$.

b) Determinați polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

a) Polinomul $h = f - g$ are gradul $\le n$ și se anulează de $n + 1$ ori.
Conform unei consecințe a teoremei lui Bézout rezultă că $h = 0$, deci $f = g$
Rezultă de asemenea că dacă două polinoame iau valori egale de o infinitate de ori, polinoamele sunt egale.

b) Făcând $x = y = 0$, în egalitatea dată obținem $f(0) = 0$.
Notând $f(1) = a$, $a \in \mathbb{R}$, obținem prin inducție, $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{N}$.
Rezultă că polinoamele f și aX iau valori egale de o infinitate de ori.
Prin urmare $f = aX$.

2. Fie $q \in \mathbb{N}^*$ și $K = \{0, 1, a_3, \dots, a_q\}$ un corp finit.

a) Arătați că pentru orice $a \in K$, $a^q = a$.

b) Descompuneți în factori ireductibili polinomul $f = X^q - X \in K[X]$

c) Deduceți că pentru orice număr prim p avem:
$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ (teorema lui Wilson).

Rezolvare

a) $(K^*, \cdot)$ este grup cu $q - 1$ elemente.
Rezultă că $a^{q-1} = 1$, deci $a^q = a$ $\forall a \in K$.

b) Orice element $a \in K$ este rădăcină, deci f se descompune în factori:
$f = X(X-1)(X-a_3)\dots(X-a_q)$.

c) Fie $g = x^{p-1} - \hat{1} \in \mathbb{Z}_p[X]$. Rădăcinile sale sunt: $\hat{1}, \hat{2}, \dots \widehat{p-1}$.
Deci $g = (X - \hat{1})(X - \hat{2})\dots(X - \widehat{p-1})$.
Identificând termenii liberi, obținem:
$\hat{1} \cdot \hat{2} \dots \widehat{p-1} = -\hat{1} \Leftrightarrow \widehat{1 \cdot 2 \dots (p-1)} = (\widehat{-1}) \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

3. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, să se demonstreze identitatea
$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$

Rezolvare

Putem privi expresia din membrul stâng ca un polinom f în nedeterminata a (cu $b \in \mathbb{R}$ fixat).
Observăm că $f(a) = b^5 - b^5 = 0$ și $f(-b) = 0 \ -(-b)^5 - b^5 = b^5 - b^5 = 0$
Așadar, conform teoremei lui Bézout, polinomul f este divizibil cu $(a - 0)$ și cu $a - (-b) = a + b$.

Deoarece expresia este simetrică, dacă în decompunere apare factorul a, atunci apare și b.
Așadar $f = (a + b)^5 - a^5 - b^5 = ab(a + b) \cdot g\,(a, b)$, unde $g\,(a, b)$ este polinom „simetric“ de grad 2 de forma: $g(a, b) = \alpha(a^2 + b^2) + \beta(a \cdot b)$
Adică $(a + b)^5 - a^5 - b^5 = ab(a + b)\,[\alpha(a^2 + b^2) + \beta ab)]$ (1)
Dând valori lui a și b obținem un sistem pentru α, β.

$$\begin{matrix} a = 1;\ b = 1 \Rightarrow 30 = 2(2\alpha + \beta) \\ a = 2;\ b = 1 \Rightarrow 210 = 6(5\alpha + 2\beta) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=15 \\ 5\alpha+2\beta=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=5 \end{cases}$$

Deducem:
$(a + b)^5 - a^5 - b^5 = ab(a + b)[5(a^2 + b^2) + 5ab] = 5ab(a + b)(a^2 + b^2 + ab)$

4. Să se arate că polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$ este reductibil pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$.

Rezolvare

Deosebim două cazuri:
1) $a = \hat{0}$. Atunci $f = X^6 + \hat{5} = X^6 - \hat{2} = X^6 - (\hat{3})^2 = (X^3 - \hat{3})\,(X^3 + \hat{3})$.
2) $a \neq \hat{0}$.
Arătăm că f are cel puțin o rădăcină în $\mathbb{Z}_7$.
Fie $\alpha \in \mathbb{Z}_7^*$. Deoarece $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ este grup cu 6 elemente, obținem $\alpha^6 = \hat{1}$.
Atunci: $f(\alpha) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{1} + a \cdot \alpha + \hat{5} = \hat{0} \Leftrightarrow a \cdot \alpha + \hat{6} = \hat{0} \Leftrightarrow a \cdot \alpha = \hat{1} \Leftrightarrow \alpha = a^{-1}$.
Rezultă că a^{-1} este rădăcină pentru f, c.c.t.d.

5. Se consideră polinoamele $f\,(g) \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 5$ și $g = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$.
a) Să se arate că f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
b) Arătați că există $g_1, f_1 \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât $g \cdot g_1 + f \cdot f_1 = 1$.
c) Deduceți un mod de a raționaliza numitorul fracției $\dfrac{1}{c + b\sqrt[3]{5} + a\sqrt[3]{25}}$,
unde $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.
Caz particular: $2 - \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}$.

Rezolvare

a) Polinomul f are gradul 3 și nu are rădăcini în corpul $\mathbb{Q}$, deoarece $\sqrt[3]{5}$ este irațional. Rezultă că f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
b) Deoarece f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, rezultă că, mai puțin o asociere în divizibilitate, singurii săi divizori sunt 1 și $X^3 - 2$.
Rezultă că $(f, g) = 1$. Conform unei consecințe a algoritmului lui Euclid, deducem că există polinoamele $g_1 \cdot f_1 \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât $g \cdot g_1 + f \cdot f_1 = 1$.

c) Dacă înlocuim X cu $\sqrt[3]{5}$ în ultima egalitate obținem:

$$1 = g(\sqrt[3]{5}) \cdot g_1(\sqrt[3]{5}) \Leftrightarrow 1 = (c + b\sqrt[3]{5} + a\sqrt[3]{25}) \cdot g_1(\sqrt[3]{5}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c + b\sqrt[3]{5} + a\sqrt[3]{25}} = g_1(\sqrt[3]{5})$$

Deoarece g_1 are coeficienți raționali, rezultă că $g_1(\sqrt[3]{5})$ este expresia obținută după raționalizare.
În cazul particular dat, luăm $g = -X^2 - X + 2$.
Algoritmul lui Euclid pentru aflarea $(X^3 - 5, -X^2 - X + 2)$ este

$$X^3 - 5 = (-X^2 - X + 2) \cdot (-X + 1) + 3X - 7 \qquad (1)$$

$$-X^2 - X + 2 = (3X - 7)\left(-\frac{1}{3}X - \frac{10}{9}\right) + \frac{52}{9} \qquad (2)$$

Scoatem $3X - 7$ din (1) și-l înlocuim în (2). Obținem:

$$9(-X^2 - X + 2) = (-3X - 10)\,[(X^3 - 5) - (-X^2 - X + 2)(-X + 1)] + 52 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-X^2 - X + 2)(3X^2 + 7X - 1) + (3X + 10)(X^3 - 5) + 52 = 0 \qquad (3)$$

Înlocuind în (3) X cu $\sqrt[3]{5}$ obținem:

$$(-\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 2)(3\sqrt[3]{25} + 7\sqrt[3]{5} - 1) + 52 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 2} = -\frac{1}{52}(3\sqrt[3]{25} + 7\sqrt[3]{5} - 1)$$

6. Să se descompună în factori polinoamele de gradul al doilea

$\hat{2}X^2 + X - \hat{1}$ și $X^2 + \hat{2}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

Rezolvare

Știm că un polinom de gradul al doilea este reductibil dacă și numai dacă are rădăcini în corpul respectiv.
Dăm în continuare o *formulă de rezolvare* a ecuației de gradul al doilea cu coeficienți în $\mathbb{Z}_p$, p număr prim, $p > 2$.

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \Leftrightarrow a[x^2 + b \cdot a^{-1} \cdot x + c \cdot a^{-1}] = 0 \Leftrightarrow x^2 + ba^{-1}x + c \cdot a^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + b \cdot (2a)^{-1})^2 - (b - 4\,ac)(2a)^{-2} = 0 \Leftrightarrow (x + b \cdot (2a)^{-1})^2 = (b^2 - 4ac)(2a)^{-2}.$$

Deci: ecuația are rădăcini în corpul $\mathbb{Z}_p$ dacă și numai dacă există $u \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât $b^2 - 4ac = u^2$ (discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ este pătrat în $\mathbb{Z}_p$).

> În acest caz avem formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea:
> $x_1 = (-b - u)(2a)^{-1}$, $x_2 = (-b + u)(2a)^{-1}$ (*)

Dacă polinomul f are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_p$ atunci:
$f = a(X - x_1)(X - x_2)$ (descompunerea în factori ireductibili a lui f).

În cazul dat avem:

$\hat{2}X^2 + X - \hat{1} = \hat{0}$, $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot \hat{2}\ (-\hat{1}) = \hat{2} = (\hat{3})^2$; $u = \hat{3}$.

Avem $x_{1,2} = (-\hat{1} \pm \hat{3})\,(\hat{4})^{-1} = (-\hat{1} \pm \hat{3}) \cdot \hat{2}$; $x_1 = \hat{4}$, $x_2 = \hat{6}$.

Aşadar: $\hat{2}X^2 + X - \hat{1} = \hat{2}(X - \hat{4})(X - \hat{6})$.

$X^2 + \hat{2}X + \hat{4} = \hat{0}$; $\Delta = (-\hat{2})^2 - 4 \cdot \hat{1} \cdot \hat{4} = \hat{3}$.

Însă în $\mathbb{Z}_5$, $\hat{3}$ nu este pătrat, deci ecuaţia nu are soluţii, iar polinomul este ireductibil.

OBSERVAŢII

1) Pentru ecuaţiile cu coeficienţi în corpul $\mathbb{Z}_2$ formulele (*) nu sunt valabile deoarece $2a = a + a = 0$, iar 0 nu este inversabil.
   Ecuaţiile de gradul al doilea cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_2$ se rezolvă prin încercări.
2) Formulele (*) se extind la ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi *în orice corp* cu ecuaţia $2a = a + a \neq 0$.
   În particular: să ne reamintim de ecuaţia de gradul al II-lea cu coeficienţi complecşi, rezolvată în mulţimea numerelor complexe.

   Exemplu:

   Să se rezolve ecuaţia $x^2 - (2i + 1)x + 2i = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

   Rezolvare

   $\Delta = b^2 - 4ac = (2i + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2i = 4i^2 + 4i + 1 - 8i = 4i^2 - 4i + 1 = (2i - 1)^2$.

   Deci $x_{1,2} = (-b \pm u)\,(2a)^{-1} = (b \pm u) \cdot \dfrac{1}{2a}$, unde $u = 2i - 1$ (sau $-(2i - 1)$).

   Revedeţi încă odată faptul că $\sqrt{\Delta}$ nu are semnificaţie decât pentru numere reale, $\Delta \geq 0$ şi că scrierea $\dfrac{-\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ este un mod „expeditiv“ de aflare a rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi reali (uşor de memorat!)

7. Interpolare şi extrapolare

O serie de fenomene şi experienţe în fizică, chimie, biologie etc., sunt caracterizate printr-o anumită dependenţă funcţională, în fapt prin funcţii definite pe un domeniu finit descrise prin tabele.

Dacă notăm valorile argumentului, într-un tabel prin x_0, x_1, … x_n, atunci valorile corespunzătoare ale funcţiei vor fi $f(x_0)$, $f(x_1)$ …, $f(x_n)$.

Ne interesează valoarea funcţiei într-un punct cuprins între valorile argumentului, din tabelul respectiv, care nu se obţine pe cale experimentală.

Spunem în acest caz că efectuăm *o interpolare*.

x	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

dacă $\alpha \in (x_i, x_{i+1})$, cine este $f(\alpha)$?

Valoarea $f(\alpha)$ în general se aproximează (cu o anumită eroare) luând f o funcție polinomială de un anumit grad.

Exemplu

S-au obținut experimental următoarele date privind dependența temperaturii de fierbere a apei față de presiune (vezi tabelul 1).

Tabelul 1

p (mm col Hg)	92,41	149,38	233,71	355,12	525,76	760	1489,14
t (°C)	50	60	70	80	90	100	110

Se cere să se calculeze temperatura de fierbere a apei la presiunea de 0,5 atm = 380 mm col Hg.

Apare din nou problema determinării unui polinom atunci când sunt cunoscute valorile sale în anumite puncte.

Vom examina această problemă pe cazul general pornind de la un caz particular.

- Fie $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fix. Să determinăm un polinom f_k de grad $n - 1$ astfel încât $f_k(x_k) = y_k$ și $f_k(x_p) = 0$, pentru orice $p \in \{1, 2, \ldots, n\}, p \neq k$.
  Avem că $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ sunt rădăcini pentru f_k. Deci
  $f_k = a(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_{k-1})(X - x_{k+1}) \ldots (X - x_n)$
  Din $f_k(x_k) = y_k$ rezultă:
  $$a = \frac{y_k}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$
  Prin urmare $f_k = \dfrac{(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_{k-1})(X - x_{k+1})\ldots(X - x_n)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} \cdot y_k.$
- Mai general: dându-se numerele complexe $x_1, x_2, \ldots x_n$, distincte și $y_1, y_2, \ldots y_n \in \mathbb{C}$, să se determine un polinom de grad $n - 1$ astfel încât $f(x_k) = y_k$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
  Polinomul cerut este $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.
  Într-adevăr: $f(x_k) = 0 + 0 + \ldots + 0 + y_k + 0 + \ldots + 0 = y_k$.
  Polinomul f, obținut anterior, este unic. Într-adevăr:
  Dacă ar exista un alt polinom g, grad $(g) \leq n - 1$, am avea:
  $f(x_k) = g(x_k)$, $\forall\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (iau valori egale de un număr de ori mai mare decât gradul $n - 1$). Rezultă că $g = f$.

Polinomul construit anterior se numește polinomul *de interpolare al lui Lagrange*.

Pentru tabelul 1 putem considera un polinom de grad 6, f, pentru care $f(92,41) = 50$; $f(149,38) = 60$, $f(233,71) = 70$, $f(355,12) = 80$, $f(525,76) = 90$, $f(760) = 100$; $f(1489,14) = 110$.

Pentru calculul coeficienților avem programe informatice pe computer.

Valoarea cerută $f(380) \approx 81,61$ (°C).

Așa cum am văzut anterior, fiecare tabel conține valorile unei funcții (polinomiale) pentru un număr finit de valori ale argumentului, cuprins într-un interval mărginit [a, b].

De multe ori este nevoie să știm și valori ale funcției pentru argumente $x < a$ sau $x > b$ (vrem să obținem date pe care nu le putem afla experimental).

Extinderea valorilor funcției stabilite pentru un interval (restrâns) de valori ale argumentului, în afara acestui domeniu, se numește *extrapolare*.

De exemplu, polinomul $f = 0{,}0065X^3 - 0{,}52898X^2 + 1{,}61358X - 0{,}25478$ este un polinom de interpolare pentru valorile date în tabelul 2:

Tabelul 2

1,4	1,5	1,7	1,8
0, 98545	0,99749	0,99166	0,97384

(tabelul cuprinde valori ale funcției sinus)

Cu cât putem aproxima sin π?

Răspuns: prin $f(\pi) \approx 0,\ 2047109$

Aproximarea lui sin π (prin extrapolare) nu este chiar grozavă.

În schimb, prin interpolare, pentru aproxima sin $\frac{\pi}{2}$ prin $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}00014$, valoarea foarte apropiată de 1, eroarea fiind 0,00014.

Rezultă că polinomul de interpolare descrie mai bine comportamentul valorilor funcției când intervalul pe care se face aproximarea este restrâns.

Exerciții propuse

1. Să se arate că g divide f:

a) $g = X + \hat{1},\ f = X^4 + \hat{2}X + \hat{1}, f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$;

b) $g = X - 2;\ f = 2X^5 - 31X - 2,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

c) $g = X - \sqrt{3} - \sqrt{2};\ f = X^5 - 56X^4 - 10X^3 + 560X^2 + X - 56,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

d) $g = X + i; f = 3X^3 + (3i - 4)X^2 - (4i - 1)X + i,\ f, g \in \mathbb{C}[X]$.

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât g să fie factor al descompunerii polinomului f.

a) $f = 2X^3 + X - 3, g = X - a,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = X^3 - 7X^3 + 19X^3 + aX + b, g = X - 2 - i\, f, g \in \mathbb{C}[X]$;

c) $f = X^3 - 2X^2 + aX + b, g = X - 1 - \sqrt{2}\ \ f, g \in \mathbb{Q}[X]$.

3. Să se arate că g divide f.

a) $g = X^2 + 1; f = (X^2 + X + 1)^{11} + (X^2 - X + 1)^{11}$;

b) $g = X^2 + X + 1; f = (X + 1)^{11} + X^7$;

c) $g = X^2 - X + 1; f = X^{6n} - 1 + X - 1, n \in \mathbb{N}^*$;

d) $g = (X - \hat{1})^2;\ f = \widehat{10}\,X^{11} - \widehat{11}\,X^{10} + \hat{1}, f, g \in \mathbb{Z}_{13}[X]$.

4. Descompuneți în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ și apoi în $\mathbb{C}[X]$:

a) $X^3 + 3X - 4$; b) $X^4 + 3X^2 - 4$; c) $X^4 + X^2 + 1$; d) $X^4 + 4$; e) $X(X + 1)(X + 2)(X + 3) - 3$.

5. a) Arătați că polinomul $X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este ireductibil.
b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul $\hat{2}X^3 + aX + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ să fie ireductibil.

6. Arătați că $X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este reductibil și descompuneți polinomul în factori ireductibili.

7. a) Arătați că $X^4 + X^3 + X + \hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_2[X]$.
b) Descompuneți polinomul $X^5 + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ în factori ireductibili.
c) Descompuneți în factori ireductibili polinomul $X^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.
d) Descompuneți în factori ireductibili polinomul $X^4 + X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

8. a) Dați exemplu de polinoame din $\mathbb{Z}_{11}[X]$ de gradul doi cu rădăcinile $\hat{1}$, $\hat{5}$.
b) Dați exemplu de polinom de gradul al doilea din $\mathbb{Z}_3[X]$ ireductibil.

9. a) Arătați că polinomul $X^2 - 3$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ și reductibil în $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$.
b) Determinați polinomul unitar de grad minim din $\mathbb{Q}[X]$ pentru care $\sqrt[3]{3}$ este rădăcină.

10. Determinați rădăcinile polinoamelor:
a) $X^2 + \hat{3}X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$; b) $X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_7[X]$; c) $X^2 + X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$;
d) $X^2 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$; e) $X^2 + (3 + i)X + 3i \in \mathbb{C}[X]$; f) $X^2 - 4X + 1 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[X]$.

***

11. a) Determinați $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^4$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
b) Fie $a, b, c \in (0, \infty)$, $a \neq b \neq c \neq a$ și $f \in \mathbb{R}[X]$, grad $(f) = 6$ astfel încât:
$f(a) = f(-a)$; $f(b) = f(-b)$; $f(c) = f(-c)$. Demonstrați că $f(x) = f(-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

12. a) Fie $f \in \mathbb{C}[X]$. Să se arate că dacă funcția polinomială $\overline{f}$ este periodică, atunci f este polinom constant.
b) Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$ pentru care $(X + 3)f(X) = (X - 6)f(X + 3)$.
c) Să se arate că funcția sinus nu este polinomială.

***13.** Există valori ale lui $a \in \mathbb{Z}_{11}^*$ pentru care polinomul $X^{10} + aX + \hat{9} \in \mathbb{Z}_{11}$ este ireductibil?

***14.** Scrieți ca produs de factori $(X + Y + Z)^5 - X^5 - Y^5 - Z^5$.

***15.** Tabelul alăturat arată dependența volumului apei (exprimat în cm^3) de temperatură (în °C). Care este volumul apei la temperatura de 50°?

t	10°	30°	60°	80°
v	1000,27	1004,33	1016,9	1028,9

***16.** Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $(f) = n$ astfel încât $f(0), f(1), \ldots, f(n) \in \mathbb{Z}$.
Să se arate că $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $f(k) \in \mathbb{Z}$.

***17.** a) Determinați $x \in \mathbb{Z}_7$ astfel incât $x^2 - x + \hat{1} = \hat{0}$.
b) În condițiile punctului a), arătați că $x^3 = (-\hat{1})$.
c) Deduceți că $\left(3^{2^{2n}-1} + 1\right) \vdots\, 7$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.7. Rădăcini ale polinoamelor cu coeficienţi complecşi

Relaţiile lui Viète

Vom face referire în continuare la un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $(f) \geq 1$
Prezentăm fără demonstrație următorul rezultat:

TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ALGEBREI

Orice polinom neconstant cu coeficienți complecși are cel puțin o rădăcină complexă.

Consecinţă

Orice polinom de gradul n cu coeficienți complecși are n rădăcini.
În plus: dacă $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f atunci
$f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$ (1)

Demonstraţie Din teorema fundamentală rezultă că f are cel puțin o rădăcină: x_1.
Atunci din teorema lui Bézout avem $(X - x_1) / f$, deci există $g \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = (X - x_1)g$, unde g are gradul $n - 1$.
Din teorema fundamentală rezultă că, la rândul său, polinomul g are cel puțin o rădăcină: x_2.
Atunci: $g = (X - x_2)h$, unde $h \in \mathbb{C}[X]$, gradul lui h este $n - 2$.
Rezultă: $f = (X - x_1)g = (X - x_1)(X - x_2)h$.
Continuând procedeul deducem că $f = (X - x_1) \ldots (X - x_n)\, q$, unde gradul polinomului q este 0, a, adică q este polinom constant.

În scrierea (1) rădăcinile lui f nu sunt neapărat distincte.

Exemplu

$f = a(X - 1)(X - 1)(X - 2)(X + i)$

DEFINIŢIE

Fie $a \in \mathbb{C}$ și $f \in \mathbb{C}[X]$
Spunem că a este **rădăcină multiplă**, având **ordinul de multiplicitate *k***, dacă f se divide cu $(X - a)^k$, dar nu se divide cu $(X - a)^{k+1}$.

Exemplu

Dacă $f = 3(X - 1)^2(X + 1)$, atunci 1 este rădăcină multiplă, cu ordinul de multiplicitate 2, iar -1 este rădăcină multiplă cu ordinul de multiplicitate 1.

În continuare vom spune mai simplu; în loc de rădăcină cu ordinul de multiplicitate 1, 2, 3 etc., vom spune rădăcină simplă, dublă, triplă etc.

Rezultă că dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom neconstant, există numerele complexe x_1, $x_2, \dots, x_k$, distincte oricare două și numerele naturale nenule $n_1, n_2, \dots n_k$ astfel încât f se scrie în mod unic, abstracție făcând de ordinea factorilor, sub forma:

$$\boxed{f = a(X - x_1)^{n_1}(X - x_2)^{n_2} \dots (X - x_k)^{n_k}}$$

Cum descoperim ordinul de multiplicitate al unei rădăcini multiple?

a) Prin împărțiri succesive, aplicând concomitent teorema lui Bézout.

Exemplu

Pentru $f = X^3 - 3X + 2$, 1 este rădăcină: $f(1) = 0$, deci $X - 1$ este factor.

Împărțind f la $X - 1$ obținem:

$f = (X - 1)(X^2 + X - 2)$

La rândul său, polinomul $g = X^2 - X - 2$ are rădăcina 1: $g(1) = 0$.

Împărțind g la $X - 1$ obținem:

$g = (X - 1)(X + 2)$.

Deducem că $f = (X - 1)g = (X - 1)(X - 1)(X + 2) = (X - 1)^2(X + 2)$

Reiese că $f \,\vdots\, (X - 1)^2$ și $f \not\vdots\, (X - 1)^3$, deci 1 este rădăcină dublă.

b) Dăm în continuare un criteriu pentru studiul rădăcinilor multiple, care facilitează calculul prezentat la punctul a).

Introducem mai întâi noțiunea de *derivată a unui polinom*.

Fie funcția $d : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ definită astfel:

- dacă $a \in \mathbb{C}$, atunci $d(a) = 0$
- dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_nX^n$, atunci $d(f) = a_1 + 2a_2X + \dots + na_nX^{n-1}$.

Această funcție se numește derivare, iar dacă f este un polinom, $d(f)$ se numește derivata lui f.

Să mai observăm că:

- $d(X^k) = kX^{k-1}$ pentru orice $k \geq 1$.
- $d(f + g) = d(f) + (g), \forall f, g \in \mathbb{C}[X]$.
- $d(af) = ad(f), \forall a \in \mathbb{C}$ și $\forall f \in \mathbb{C}[X]$.
- $d(f \cdot g) = d(f) \cdot f + f \cdot d(g), \forall f, g \in \mathbb{C}[X]$.

Verificarea se face cu ușurință prin calcul.

Exemple

$d(X^3 + 3X - 1) = d(X^3) + d(3X) + d(-1) = 3X^2 + 3d(X) + 0 = 3X^2 + 3$.

$d[(X^2 + 1)(X + 2)] = d(X^2 + 1)(X + 2) + (X^2 + 1)\, d(X + 2) =$
$= 2X(X + 2) + (X^2 + 1) \cdot 1 = 3X^2 + 4X + 1$

Remarcați asemănarea proprietăților derivatei unui polinom cu proprietățile derivatei unei funcții (polinomiale) învățate în clasa a XI-a.

Este motivul pentru care derivata unui polinom se numeşte şi derivată formală şi, de aici încolo, vom nota $d(f) = f'$, $d(d(f)) = f^{(2)}$, … recursiv: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Ştim pe cazuri particulare şi putem demonstra lejer, prin inducție după gradul polinomului f, pe cazul general, următorul rezultat: dacă $a \in \mathbb{C}$ atunci există $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$f = a_0 + a_1(X-a) + a_2(X-a)^2 + \ldots + a_n(X-a)^n \qquad (1)$$

Numerele $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ sunt unice, iar scrierea poartă numele de descompunere a lui f după puterile lui $X - a$.

Observăm că:

$$\boxed{a_0 = f(a)}$$

$$f' = a_1 + 2a_2(X-a) + 3a_3(X-a)^2 + 4a_4(X-a)^3 + \ldots + na_n(X-a)^{n-1}.$$

Rezultă că $\boxed{a_1 = f'(a)}$

$$f'' = 2a_1 + 2 \cdot 3a_3(X-a) + 3 \cdot 4a_4(X-a)^2 + \ldots + n(n-1)(X-a)^{n-2}.$$

Rezultă că $2a_1 = f''(a)$; deci $\boxed{a_2 = \dfrac{f''(a)}{2}.}$

Procedând asemănător deducem:

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!},\ a_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

În acest fel (1) devine:

$$\boxed{f = f(a) + \frac{(X-a)}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(X-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \frac{(X-a)^3}{3!} f^{(3)}(a) + \ldots + \frac{(X-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}$$

numită formula lui Taylor de dezvoltare a polinomului f, de grad n, după puterile lui $(X-a)$.

Exemplu de dezvoltare

Să se dezvolte polinomul $f = 2X^3 + 3X^2 + X - 1$ după puterile lui $X - 1$.

Calculăm derivatele succesive ale lui f în 1. Avem:

$f^{(1)} = 6X^2 + 12X + 1; f^1(1) = 19.$

$f^{(2)} = 12X + 12; f^{(2)}(1) = 24.$

$f^{(3)} = 12; f^{(3)}(1) = 12.$

Rezultă:

$$f = f(1) + \frac{X-1}{1!} f^{(1)}(1) + \frac{(X-1)^2}{2!} f^{(2)}(1) + \frac{(X-1)^3}{3!} f^{(3)}(1) =$$

$$= 5 + \frac{X-1}{1!} \cdot 19 + \frac{(X-1)^2}{2!} \cdot 24 + \frac{(X-1)^3}{3!} \cdot 12.$$

TEOREMA 1

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom neconstant și $a \in \mathbb{C}$.
Atunci: a este rădăcină multiplă cu ordinul de multiplicitate K dacă și numai dacă $f(a) = 0$, $f^{(1)}(a) = 0$, …, $f^{(k-1)}(a) = 0$ și $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Demonstrație Fie n gradul polinomului f.

Presupunem că a este multiplă, cu ordinul de multiplicitate k.

Atunci că $f \vdots (X-a)^k$ și $f \not\vdots (X-a)^{k+1}$.

Dezvoltând polinomul după puterile lui a obținem:

$$f = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(X-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(X-a)^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^{k-1} +$$

$$+ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k + .. + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n =$$

$$= (X-a)^k \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(X-a)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + ... + \frac{(X-a)^{n-k}}{n!} f^{(n)}(a) \right) +$$

$$+ f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(X-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(X-a)^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^{k-1} \quad (1)$$

Deoarece $f \vdots (X-a)^k$ rezultă că restul împărțirii lui f la $(X-a)^k$ este 0, adică

$$f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(X-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(X-a)^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^{k-1} = 0 \quad (2)$$

Înlocuind în (2) X prin $X + a$ obținem:

$$f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}X + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}X^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}X^{k-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 0, f^{(1)}(a) = 0, ..., f^{(k-1)}(a) = 0.$$

În plus, se observă că din $f \not\vdots (X-a)^{k+1}$, avem $\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$, altfel din (1) ar rezulta că polinomul s-ar anula în a, adică ar fi divizibil cu $X - a$, contradicție.

Reciproca este evidentă.

Exemplu de aplicare a teoremei

Fie $f = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$

Observăm că 1 este rădăcină a lui f. Să-i găsim ordinul de multiplicitate.

$f^{(1)} = 4X^3 - 6X^2 + 2$; $f^{(1)}(1) = 0$;

$f^{(2)} = 12X^2 - 12X$; $f^{(2)}(1) = 0$;

$f^{(3)} = 24X - 12$; $f^{(3)}(1) \neq 0$;

Rezultă, conform teoremei, că 1 este rădăcină triplă.

Relaţiile lui Viète

Am văzut în clasa a IX-a că între coeficienții polinomului $aX^2 + bX + c$ și rădăcinile sale există legăturile: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Aceste relații se extind și la polinoamele de grad superior.

TEOREMA 2

Fie $f \in \mathbb{C}[X], f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0, a_n \neq 0, n \geq 1$.
Dacă că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului, atunci:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

....

$$x_1x_2\ldots x_k + x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1} + \ldots + x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

....

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Demonstraţie Știm că $f = a_n(X - x_1)(X - x_1) \ldots (X - x_n)$.
Desfăcând parantezele și identificând obținem relațiile cerute, numite *relațiile lui Viète.*

Exemple

1. Pentru $f = 2X^3 - 3X^2 + 1$, relațiile lui Viète sunt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{1}{2}.$$

2. Pentru $g = 3X^4 + iX^3 + 2X^2 + X - 1 + i$, relațiile lui Viète sunt:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{i}{3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{2}{3}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \frac{-1}{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{-1+i}{3}$$

OBSERVAŢIE

Fiind date numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ există un unic polinom unitar, $f \in \mathbb{C}[X]$ care are ca rădăcini numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Într-adevăr, notând cu:

$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$; $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$, …, $S_n = x_1x_2\ldots x_n$.

avem:

$$\boxed{f = X^n - S_1X^{n-1} + S_2X^{n-2} - \ldots + (-1)^nS_n}$$

Exerciţii rezolvate

1. Să se determine restul împărţirii polinomului $f = X^{49} + X^{32} - 2X^5 + X + 3$ la polinomul $(X-1)^2$.

Rezolvare

Dezvoltăm polinomul f după puterile lui $X - 1$.

$f = f(1) + \frac{X-1}{1!}f^{(1)}(1) + \frac{(X-1)^2}{2!}f^{(1)}(1) + ... + \frac{(X-1)^{49}}{49!}f^{(49)}(1)$. Atunci

$$f = f(1) + \frac{X-1}{1!}f^{(1)}(1) + (X-1)^2\left(\frac{f^{(2)}(1)}{21} + ... + \frac{(X-1)^{47}}{49!}f^{(49)}(1)\right).$$

Conform teoremei împărţirii cu rest, deducem că restul împărţirii lui f la $(X-1)^2$ este

$f(1) + \frac{X-1}{1!}f^{(1)}(1)$. Finalizaţi!

2. Calculaţi restul împărţirii polinomului $f = X^{37} + X^3 + 3X - 5$ la polinomul $(X-1)^2 \cdot X$.

Rezolvare

Din teorema împărţirii cu rest avem $f = (X-1)^2 \cdot X \cdot g + aX^2 + bX + c$
(1)

Trebuie să determinăm a, b, c punând în evidenţă trei ecuaţii:
Dând valori în (1) obţinem:
$x = 1 \Rightarrow f(1) = a + b + c$, de unde avem ecuaţia $a + b + c = -2$.
$x = 0 \Rightarrow f(0) = c$, de unde deducem $c = -5$.
A treia ecuaţie rezultă după ce derivăm ambii membri ai egalităţii (1):
$f' = 2(X-1)X \cdot g + (X-1)^2 \cdot g + (X-1)^2 \cdot X \cdot g' + 2aX + b.$ (2)
Făcând $X = 1$ în egalitatea (2) obţinem: $f'(1) = 2a + b$, de unde $2a + b = 43$.

Continuați prin rezolvarea sistemului obținut.

3. Să se determine polinoamele $f \in \mathbb{C}[X]$ știind că grad $(f) = 2n+1$, $f+1$ este divizibil cu $(X-1)^{n+1}$, iar $f-1$ este divizibil cu $(X+1)^{n+1}$.

Rezolvare

Avem $f+1 = (X-1)^{n+1} \cdot g$; $f-1 = (X+1)^{n+1} \cdot h$. Deducem prin derivare:
$f' = (n+1)(X-1)^n \cdot g + (X-1)^{n+1} \cdot g' = (X-1)^n((n+1)g + (X-1)g') =$
$= (X-1)^n \cdot g_1.$ (1)
Analog, derivând a doua egalitate avem:
$f' = (n+1)(X+1)^n h + (X+1)^{n+1} \cdot h' = (X+1)^n((n+1)h + (X+1)b') = (X+1)^n \cdot h_1.$ (2)
Din (1) deducem $(X-1)^n / f'$ iar din (2) deducem $(X+1)^n / f'$.
Deoarece polinoamele $(X-1)^n$ și $(X+1)^n$ sunt prime între ele, deducem că:
$[(X-1)^n \cdot (X+1)^n] / f' \Leftrightarrow (X^2-1)^n / f' \Leftrightarrow f' = a(X^2-1)^n$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, deoarece f' are gradul $2n$.

Prin urmare $f' = a(X^2-1)^n = a \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (X^2)^{n-k} = a \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k X^{2n-2k}$.
Atunci prin „integrare“ avem:

$$f = a \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2n-2k+1} X^{2n-2k+1} + b$$

Deoarece $f(1)+1 = 0$ și $f(-1) = 0$ obținem sistemul:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{C_n^k}{2n-2k+1} + b = -1 \\ -a\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{C_n^k}{2n-2k+1} + b = 1 \end{cases}$$

Rezultă $b = 0$ și $a = \dfrac{-1}{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{C_n^k}{2n-2k+1}}$.

4. Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului $X^4 + X^3 - 3X^2 + X + 2 = 0$.

Rezolvare

Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k$. Folosind primele două relații ale lui Viète obținem:
$x_1 + x_2 + x_3 = -1$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3$.
Rezultă:
$S_1 = -1$; $S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 1 - 2(-3) = 7$.
Pentru calculul celorlalte sume S_3, S_4 vom ține cont de faptul că x_1, x_2, x_3, x_4 verifică ecuația, adică:

$$\begin{matrix} x_1^4 + x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 + 2 = 0 & x_3^4 + x_3^3 - 3x_3^2 + x_3 + 2 = 0 \\ x_2^4 + x_2^3 - 3x_2^2 + x_2 + 2 = 0 & x_4^4 + x_4^3 - 3x_4^2 + x_4 + 2 = 0 \end{matrix} \quad (1)$$

Împărțind fiecare egalitate cu x_1, x_2, x_3, respectiv x_4, obținem:

$$x_1^3 + x_1^2 - 3x_1 + 1 + \frac{2}{x_1} = 0 \qquad x_3^3 + x_3^2 - 3x_3 + 1 + \frac{2}{x_3} = 0$$

$$x_2^3 + x_2^2 - 3x_2 + 1 + \frac{2}{x_2} = 0 \qquad x_4^3 + x_4^2 - 3x_4 + 1 + \frac{2}{x_4} = 0$$

Adunând cele patru egalități obținute rezultă:

$$S_3 + S_2 - 3S_1 + 4 + 2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = 0 \qquad (2)$$

Însă $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{-1}{2}$

Revenind la (2) obținem:

$$S_3 + S_2 - 3S_1 + 4 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow S_3 = -S_2 + 3S_1 - 2 = -7 - 1 - 2 = -10.$$

Revenind la (1) și adunând cele patru egalități obținem:

$S_4 + S_3 - 3S_2 + S_1 + 8 = 0.$

Deducem S_4. Finalizați calculul.

5. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se arate că f are rădăcinile $x_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{1, 4}$.

b) Să se demonstreze relația $\cos\frac{2k\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6k\pi}{5} + \cos\frac{8k\pi}{5} = -1$;

deduceți egalitatea $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Rezolvare

a) Avem $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$, deci rădăcinile lui f sunt rădăcinile de ordinul 5 ale unității, diferite de 1.

(Din $x^5 = 1$ și $1 = \cos 0 + i\sin 0$, avem $x_k = \cos\frac{0+2k\pi}{5} + i\sin\frac{0+2k\pi}{5}$, $k = \overline{0, 4}$.)

b) Prima relație a lui Viète referitor la ecuația $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ devine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} +$$

$$+ i\left(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5}\right) = -1.$$

Identificând părțile reale obținem:

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-1 \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-1 \Leftrightarrow$$

$$2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}+1=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{2\pi}{5}+2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\right)+1=0 \Leftrightarrow$$

$4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$ (ecuație de gradul al doilea în $\cos\frac{2\pi}{5}$).

Rezultă $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (am ales soluția pozitivă deoarece $\frac{2\pi}{5}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$).

6. Să se determine a și să se rezolve ecuația $x^4-x^3+2x^2-ax+2a=0$ știind că produsul a două rădăcini este egal cu produsul celorlalte două.

Rezolvare

Fie $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, rădăcinile polinomului având $x_1x_2=x_3x_4$.
Din relațiile lui Viète deducem ecuațiile:

$(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=1$
$(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=2$
$(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2=a$
$(x_1x_2)\cdot(x_3x_4)=2a$

Deoarece $x_3x_4=x_1x_2$, a treia egalitate devine $(x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot x_1x_2=a$.
Deducem $x_1x_2=a=x_3x_4$. Înlocuind în a patra ecuație obținem:
$a^2=2a \Leftrightarrow a=2$ sau $a=0$.
Dacă $a=0$, ecuația devine $x^4-x^3+2x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-x+2)=0$ etc.
Dacă $a=2$, atunci $x_1x_2=x_3x_4=2$. A doua relație devine $(x_1+x_2)(x_3+x_4)=-2$, care împreună cu prima constituie un sistem de două ecuații cu necunoscutele x_1+x_2 și x_3+x_4. Rezolvând sistemul obținem:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-1\\ x_1x_2=2\end{cases} \text{ și } \begin{cases}x_3+x_4=2\\ x_3x_4=2\end{cases} \text{ etc.}$$

7. Calculați $p=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$

Rezolvare

Un calcul economic se bazează pe folosirea relațiilor lui Viète pentru polinomul
$f=(X+a)(X+b)(X+c)(X+d)$
Produsul cerut este $f(1)$. Însă
$f=X^4+(a+b+c+d)X^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)X^2+$
$+(abc+abd+bdc+adc)X+abcd.$

Atunci

$p = f(1) = 1 + (a + b + c + d) + (ab + ac + ad + bc + bd + cd) +$
$+ (abc + abd + bdc + adc) + abcd.$

8. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}, x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Rezolvare

Calculăm $xy + xz + yz, xyz$:

$2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow xy + xz + yz = 1.$

Din $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$, deducem $xyz = 2$.

Așadar $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + xz + yz = 1 \\ xyz = 2 \end{cases}$ (1)

Sistemul (1) este echivalent cu ecuația de gradul al doilea $t^3 - 2t^2 + t - 2 = 0$.

Ecuația este echivalentă cu: $(t - 2)(t^2 + 1) = 0$ și are rădăcinile $t_1 = 2$; $t_2 = i$; $t_3 = -i$.

Sistemul (simetric) (1) are 6 soluții:

$(2, i, -i)$; $(2, -i, i)$; $(i, 2, -i)$; $(i, -i, 2)$; $(-i, i, 2)$; $(-i, 2, i)$.

9. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației $x^4 + 3x^3 + ix^2 + 2x - 3i = 0$.

Formați o ecuație de gradul patru cu rădăcinile $y_i = x_i^2$, $i = \overline{1, 4}$

Rezolvare

Calculul sumelor S_k este anevoios, vom încerca o altă metodă.

Făcând substituția $y = x^2$, sugerată de expresia unei rădăcini oarecare a ecuației cerute, încercăm să eliminăm x între relațiile:

$$\begin{cases} x^4 + 3x^3 + ix^2 + 2x - 3i = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

Avem: $(x^2)^2 + 3x^2 \cdot x + ix^2 + 2x - 3i = 0 \Leftrightarrow y^2 + 3y^2 \cdot x + i \cdot y + 2x - 3i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(3y + 2) + y^2 + iy - 3i = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-y^2 - iy + 3i}{3y + 2}.$$

Revenind la (1) obținem:

$$y = \left(\frac{-y^2 - iy + 3i}{3y + 2}\right)^2 \Leftrightarrow y(3y + 2)^2 = (-y^2 - iy + 3i)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^4 + (2i - 9)y^3 - (6i + 13)y^2 + 2y - 9 = 0.$$

Exerciții propuse

1. Determinați *a, b, c* $\in \mathbb{C}$ știind că numerele 2, –2, 1 sunt rădăcini ale ecuației:
$x^5 - 7x^4 + 15x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Determinați celelalte rădăcini.

2. Dacă orice rădăcină a polinomului f este și rădăcină a polinomului g, rezultă că f / g? Vedeți și situația următoare: $(X^{1998} - 1) \nmid (X^5 - X^3 + X^2 - 1)$.

3. Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinilor indicate:
a) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0,\ x = 1$;
b) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3 = 0,\ x = -1$.

4. Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $X^4 - 10X^3 + 36X^2 + 4mX + 3n = 0$ să aibă rădăcină triplă.

5. Scrieți polinomul $f = X^4 + 3X^2 + X - 1$ ca sumă de puteri ale lui:
a) $X + 1$; b) $X - i$.

6. Aflați restul împărțirii polinomului $f = X^{30} - X^{14} + X^2 + 3X - 1$ la:
a) $(X + 1)^2$; b) $(X - i)^2\,(X + 1)$.

7. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^2 + x + 2 = 0$. Calculați:

a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $\dfrac{x_1+1}{3x_1+1} + \dfrac{x_2+1}{3x_2+1}$;

c) $\dfrac{x_1^2}{2x_1-1} + \dfrac{x_2^2}{2x_2-1}$; d) $\dfrac{x_1^4+x_1^2+3x_1+2}{2x_1^2+x_1+3} + \dfrac{x_2^4+x_2^2+3x_2+2}{2x_2^2+x_2+3}$,

8. Să se afle rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației
a) $3x^3 + (3i - 4)x^2 - (4i - 1)x + i = 0$, știind că $x_1x_2 = 1$.

b) $x^3 + (1 - \sqrt{2}\,)x^2 - 2 = 0,\ x_1 + x_2 = -1$.

9. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - mx^2 + 2x + 1 = 0$. Să se afle m dacă:

a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 1$; b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2x_3$; c) $x_1^3x_2^3x_3^3 = 3x_1x_2x_3$.

10. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației $x^4 + 10x^3 + mx^2 + 50x + 24 = 0$.
Să se determine $m \in \mathbb{R}$ în cazurile:
a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + x_4$; b) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 30$.

11. Fie ecuația $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0,\ m \in \mathbb{R}$.

Să se determine m astfel încât $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} < 6$, unde x_1, x_2, x_3, sunt rădăcinile ecuației.

12. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$. Calculați:

a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$; b) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$; c) $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$; d) $\dfrac{1}{x_1+x_2} + \dfrac{1}{x_2+x_3} + \dfrac{1}{x_3+x_1}$.

13. a) Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației $x^4 + x^3 + 3x^2 - x + 2 = 0$. Calculați:

i) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$; ii) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$; iii) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

b) Aceleași cerințe pentru ecuația $x^4 + x^2 + ix + 1 - i = 0$.

14. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$.

Să se formeze o ecuație de gradul al treilea cu rădăcinile:

a) 1, 2, 3; b) 1, – 1, 1 + i; c) $y_i = 2 - x_i$, $i = \overline{1,3}$; d) $y_i = 2 + \dfrac{1}{x_i}$ $i = \overline{1,3}$;

e) $y_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{x_2}$, $y_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{x_3}$; f) $y_1 = x_2x_3$; $y_2 = x_1x_3$; $y_3 = x_1x_2$.

****

15. Să se arate că următoarele ecuații nu au toate rădăcinile reale:

a) $x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x + a = 0$, $m, a \in \mathbb{R}$; b) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a^2 - 3b < 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

16. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

a) Să se arate că $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x - x_n}$.

b) Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sunt rădăcinile diferite de 1 ale ecuației $x^n - 1 = 0$,

să se calculeze $\dfrac{1}{1 - x_1} + \dfrac{1}{1 - x_2} + \ldots + \dfrac{1}{1 - x_n}$.

17. Să se găsească o condiție necesară și suficientă ca rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ să fie:

a) în progresie aritmetică; b) în progresie geometrică.

18. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX - 1$ cu rădăcinile de module egale. Să se arate că:

a) $|a| = |b|$; b) dacă, în plus $f(1) \in \mathbb{R}$, atunci $a, b \in \mathbb{R}$.

19. Se dă ecuația $2x^3 + 2ax^2 + (a^2 + 4a + 1)x + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se găsească o relație între rădăcini independentă de a și b.

b) Să se arate că dacă rădăcinile sunt reale, atunci aparțin intervalului [1, 3].

20. Să se rezolve în corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$: $\sqrt{3}x^4 - 4x^3 - 6\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3} = 0$.

21. Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = f' + X^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

22. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{C}$:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = -6 \\ xy + xz + yz = 3 \\ xyz = 2i \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{yz} = -3 \\ xyz = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ cu modulele distincte oricare două și $Im\,(a + b + c) = 0$; $Im(a^2 + b^2 + c^2) = 0$; $Im(a^3 + b^3 + c^3) = 0$. Să se arate că $a, b, c \in \mathbb{R}$.

24. Demonstrați că dacă numerele reale satisfac relațiile $x + y + z > 0$; $xy + yz + zx > 0$ și $xyz > 0$, atunci $x > 0, y > 0, z > 0$.

3.8. Polinoame cu coeficienţi reali

Față de un polinom cu coeficienți complecși, un polinom cu coeficienți reali prezintă câteva particularități în legătură cu existența și numărul rădăcinilor.

TEOREMA 1

Dacă $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o rădăcină a polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, atunci $\overline{\alpha}$ este de asemenea rădăcină a lui f.

În plus, rădăcinile α și $\overline{\alpha}$ au același ordin de multiplicitate.

Demonstraţie Considerăm polinomul scris sub forma $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$.

Din $f(\alpha) = 0$ rezultă $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha + \ldots + a_n\alpha^n$. (1)

Trecând la conjugat în (1) obținem:

$$\overline{a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\alpha^n} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}_0 + \overline{a_1\alpha} + ... + a_n(\overline{\alpha})^n = 0 \quad (2)$$

(am ținut cont de proprietățile conjugării și de faptul că $a_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{a}_k = a_k$)

Din (2) reiese că $\overline{\alpha}$ este rădăcină a polinomului.

Fie m ordinul de multiplicitate al rădăcinii α. Atunci

$f(\alpha) = 0, f^{(1)}(\alpha) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ și $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Conform demonstrației anterioare, deoarece derivatele polinomului au și ele coeficienți reali, rezultă:

$f(\overline{\alpha}) = 0, f^{(1)}(\overline{\alpha}) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(\overline{\alpha}) = 0$.

De asemenea $f^{(m)}(\overline{\alpha}) \neq 0$, pentru că în caz contrar ar rezulta $f^{(m)}(\overline{\overline{\alpha}}) = 0$, adică $f^{(m)}(\alpha) = 0$.

OBSERVAŢIE

Din teorema anterioară mai reținem că dacă α este rădăcină de ordin m, atunci $(X-\alpha)^m$, $(X-\overline{\alpha})^m$ și $(X-x)^m(X-\overline{\alpha})^m$ sunt factori în descompunere dacă gândim polinomul cu coeficienți din $\mathbb{C}$.

Însă $(X-\alpha)^m(X-\overline{\alpha})^m = (X^2 - (\alpha + \overline{\alpha})X + \alpha\overline{\alpha})^m = (X^2 - 2(\text{Re}\alpha)X + |\alpha|^2)^m$.

Așadar polinomul de gradul al doilea dedus este factor al descompunerii polinomului în $\mathbb{R}[X]$.

Mai mult, ținând cont de această observație și de teorema de descompunere în factori a polinoamelor cu coeficienți complecși reiese:

TEOREMA DE DESCOMPUNERE

Fie f un polinom cu coeficienți reali. Atunci f se scrie în mod unic:

$$f = a(X-\alpha_1)^{m_1} \cdot (X-\alpha_2)^{m_2} \ldots (X-\alpha_p)^{m_p} \cdot (X^2+a_1x+b_1)^{k_1} \cdot (X^2+a_2X+b_2)^{k_2} \ldots (X^2+a_lX+b_l)^{k_l},$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sunt rădăcinile reale ale polinomului, iar factorii de gradul al doilea sunt polinoame cu coeficienți reali, ireductibile în $\mathbb{R}[X]$ (fără rădăcini reale).

Acest rezultat este util în aplicații, în special la descompunerea funcțiilor raționale în funcții simple (a se vedea paragraful de la analiză privind integrarea funcțiilor raționale).

Exemplu

Fie $f = X^{10} - 2X^7 + X^4$. Atunci:
$f = X^4(X^6 - 2X^3 + 1) = X^4(X^3 - 1)^2(X^3 - 1)^2 = X^4(X - 1)^2(X^3 + X + 1)^2$.

Dacă $g = X^{12} + 1$, atunci funcția rațională $\frac{g}{f}$ se scrie descompusă în funcții simple astfel:

$$\frac{g}{f} = h + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + \frac{b_1}{x-1} + \frac{b_2}{(x-1)^2} + \frac{c_1 x + d_1}{x^2 + x + 1} + \frac{c_2 x + d_2}{(x^2 + x + 1)^2},$$ unde

h este câtul împărțirii lui g la f.

Consecinţe ale teoremei 1

1. Dacă polinomul are coeficienți reali, numărul rădăcinilor sale nereale este par.

2. Dacă polinomul are coeficienți reali și grad *impar*, atunci are cel puțin o rădăcină reală.

Am întâlnit aceste rezultate și anul trecut, la analiză matematică.

În legătură cu existența rădăcinilor reale ale unui polinom ne mai reamintim:

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci f are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b).

2. Șirul lui Rolle.

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ și $x_1, x_2, \ldots, x_p$ rădăcinile polinomului derivat f'. Atunci: numărul rădăcinilor reale ale lui f este egal cu numărul de variații de semn din șirul $f(-\infty), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p), f(+\infty)$, unde $f(-\infty)$ și $f(+\infty)$ sunt limitele funcției la $-\infty$, respectiv la $+\infty$.

Exemplu

$f = 4X^3 - 18X^2 + 24X - 9$; $f' = 12X^2 - 36X + 24$.
Rădăcinile din f' sunt 1 și 2.

$f(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $f(1) = 1$; $f(2) = -1$; $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Urmărim variațiile de semn în tabelul următor:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Observăm trei variații de semn.
Rezultă că f are trei rădăcini reale.
$x_1 \in (-\infty, 1)$, $x_2 \in (1, 2)$, $x_3 \in (2, \infty)$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia $x^4 - 7x^3 + 20x^2 - 27x + 15 = 0$, ştiind că are rădăcina $2 + i$.

Rezolvare

Deoarece coeficienţii sunt reali, rezultă că polinomul are şi rădăcina $2 - i$.
Fie x_3, x_4 celelalte două rădăcini complexe ale polinomului.
Din prima şi ultima relaţie a lui Viète obţinem:
$(2 + i) + (2 - i) + (x_3 + x_4) = 7$ şi $(2 + i)(2 - i)x_3x_4 = 15$,

de unde rezultă sistemul $\begin{cases} x_3 + x_4 = 3 \\ x_3x_4 = 3 \end{cases}$

Soluţiile sistemului sunt rădăcinile polinomului $X^2 - 3X + 3$: $x_3 = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$.

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ şi rădăcinile polinomului:
$f = X^5 - 2X^4 - X^3 + aX^2 + 2aX + b$, ştiind că are rădăcina $2 - i$.

Rezolvare

Polinomul are şi rădăcina $2 + i$, deci se divide prin
$(X - 2 + i)(X - 2 - i) = (X - 2)^2 - i^2 = X^2 - 4X + 5$.
Împărţim f la $X^2 - 4X + 5$

$$\begin{array}{l|l}
X^5 - 2X^4 - X^3 + aX^2 + 2aX + b & X^2 - 4X + 5 \\ \cline{2-2}
X^5 - 4X^4 + 5X^3 & X^3 + 2X^2 + 2X + a - 2 \\ \cline{1-1}
/ \quad 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + 2aX + b & \\
\quad\;\; 2X^4 - 8X^3 + 10X^2 & \\ \cline{1-1}
\quad / \quad 2X^3 + (a - 10)X^2 + 2aX + b & \\
\quad\quad 2X^3 - 8X^2 + 10X & \\ \cline{1-1}
\quad\quad / \quad (a - 2)X^2 + (2a - 10)X + b & \\
\quad\quad\quad (a - 2)X^2 - 4(a - 2)X + 5(a - 2) & \\ \cline{1-1}
\quad\quad\quad / \qquad\qquad 6(a - 3)X - 5a + b + 10 &
\end{array}$$

Identificând restul cu 0, obţinem $a = 3$, $b = 5$.
Aşadar $f = (X^2 - 4X + 5)\,(X^3 + 2X^2 + 2X + 1)$.
Polinomul $g = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ are grad impar şi coeficienţi reali, deci are cel puţin o rădăcină reală.
Prin încercări observăm rădăcina -1; aflăm celelalte rădăcini din relaţiile lui Viète sau prin împărţirea lui g la $X + 1$.

Obţinem: $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

3. a) Să se arate că polinomul $f = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + aX + b$ nu poate avea toate rădăcinile reale.
b) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $g = X^5 + 5X^4 + 10X^3 + aX^2 + bX + c$ să aibă toate rădăcinile reale.

Rezolvare

a) Abordarea cu șirul lui Rolle este complicată.
Facem următoarea observație utilă: Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile (complexe) ale polinomului, atunci din relațiile lui Viète obținem:

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 > 0.$
- $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 =$
  $= 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_3x_4) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -5 < 0.$

Dacă rădăcinile ar fi fost toate reale, ar fi rezultat că ultima sumă trebuie să fie pozitivă, prin urmare: nu toate rădăcinile sunt reale.

b) Suma pătratelor diferențelor de rădăcini, luate câte două, este un bun indicator în unele cazuri, un fel de „discriminant“.
Să calculăm această sumă și pentru rădăcinile polinomului g:

$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_4 - x_5)^2 = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) -$
$- 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_4x_5) = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 10 = 0.$

Prin urmare: dacă toate rădăcinile sunt reale, atunci toate diferențele sunt 0, adică $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = -1.$
Așadar $g = (X + 1)^5 = X^5 + 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X + 1$, deci $a = 10$, $b = 5$, $c = 1$.

Exerciții propuse

1. Să se rezolve ecuațiile, știind că admit rădăcină indicată:

a) $6x^4 + x^3 + 52x^2 + 9x - 18 = 0$, $x_1 = 3i$;

b) $x^4 - 2x^3 + x - 2 = 0$, $x_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$;

c) $2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$, $x_1 = -1 - i$;

d) $3x^3 + (3i - 4)x^2 - (4i - 1)x + i = 0$, $x_1 = -i$.

2. Determinați numerele reale a, b și rezolvați ecuațiile știind o rădăcină.

a) $x^3 + x^2 + ax + b = 0$, $x_1 = -i$;

b) $x^4 - 2\sqrt{3}\,x^2 + ax^2 - 6x + 6 = 0$, $x_1 = \sqrt{3} + 2i$;

c) $x^4 + ax^3 + x^2 + bx + 1 = 0$, $x_1 = \varepsilon$ (unde ε este rădăcină de ordin 3 a unității);

d) $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, $x_1 = 1 + 2i$;

e) $ix^3 + ai^3x - bi^5 = 0$, $x_1 = 1 - i$.

3. Fie $f = X^5 - 3X^2 + 1$ și x_i, $i = \overline{1, 5}$ rădăcinile sale complexe.

a) Calculați $f(-1); f(0); f(1); f(2)$.

b) Calculați suma pătratelor rădăcinilor.

c) Deduceți numărul de rădăcini reale ale polinomului.

4. Fie $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii lui f la $X - 1$ să fie -15 și $-1 + i$ să fie rădăcină a polinomului f.

5. Precizați un polinom cu coeficienți reali de grad minim care admite:

a) rădăcinile simple 1 și 2 și rădăcina dublă $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

b) rădăcina dublă 1 și rădăcina simplă $1 + i$.

c) rădăcina triplă i.

6. Descompuneți în factori în $\mathbb{R}[X]$ polinoamele:

a) $X^3 + X - 2$; b) $X^5 - 1$;

c) $X^6 + 1$; d) $X^4 + 2X^2 - 3$.

7. Aflați numărul rădăcinilor reale ale polinoamelor

a) $X^3 - 3X - 4$; b) $X^4 + 3X - 4$;

c) $X^4 + X^2 + 7X - 1$; d) $X^3 - 6X^2 + m$, $m \in \mathbb{R}$.

8. Fie ecuația $x^3 + x - 1 = 0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

a) Demonstrați că ecuația are o singură rădăcină reală $x_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

b) Demonstrați că $\operatorname{Re} x_2 = \operatorname{Re} x_3 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $|x_2| = |x_3| \in (1, 2)$.

9. Demonstrați că ecuațiile următoare nu pot avea toate rădăcinile reale , $a, b \in \mathbb{R}$.

a) $x^5 + x^4 + x^3 + ax + b = 0$;

b) $2x^4 - 8x^3 + 13x^2 + ax + b = 0$;

c) $x^4 - 4ax^3 + 7a^2x^2 + ax + b = 0$.

10. a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $x^3 + (3 - \sqrt{3})x^2 + 2(2 - \sqrt{3})x + a = 0$ are toate rădăcinile reale.

b) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $x^5 - 7x^4 + 18x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are toate rădăcinile reale, una dintre ele fiind 3.

***11.** Să se rezolve ecuația $x^5 - 2x^4 + ax^3 + 8x^2 + bx + 32 = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, știind că rădăcinile au același modul, numai una fiind reală.

3.9. Polinoame cu coeficienţi raţionali

Polinoamele din $\mathbb{Q}[X]$ au, la rândul lor, și alte particularități față de cele cu coeficienți reali. Avem:

TEOREMĂ

Dacă $f \in \mathbb{Q}[X]$, iar $x_1 = u + \sqrt{v}$ este o rădăcină a lui f, unde $u, v \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{v} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $x_2 = u - \sqrt{v}$ este de asemenea o rădăcină a lui f.

În plus, rădăcinile x_1 și x_2 au același ordin de multiplicitate.

Demonstraţie

Fie $g = (X - u - \sqrt{v})(X - u + \sqrt{v}) = (X-u)^2 - v = X^2 - 2uX + u^2 - v \in \mathbb{Q}[X]$.
Împărțim, în $\mathbb{Q}[X]$, f la polinomul g obținem $q, r \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât $f = gq + r$, grad $(r) < 2$.
Fie $r = aX + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Din $f(x_1) = 0$ deducem $ax_1 + b = 0$.

Dacă $a \neq 0$, atunci ar rezulta $x_1 = \dfrac{-b}{a} \in \mathbb{Q}$, contradicție.

Deducem $a = 0$ și apoi $b = 0$, de unde $f = g \cdot q$.
Prin urmare $f(x_2) = g(x_2) \cdot q(x_2) = 0$.
Fie m ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_1.
Atunci $f(x_1) = 0, f^{(1)}(x_1) = 0, f^{(2)}(x_1) = 0, ..., f^{(m-1)}(x_1) = 0$ și $f^{(m)}(x_1) \neq 0$.
Deoarece polinoamele derivate sunt din $\mathbb{Q}[X]$, aplicând cele deduse anterior, deducem $f(x_2) = 0, f^{(1)}(x_2) = 0, f^{(2)}(x_2) = 0, f^{(m-1)}(x_2) = 0$ și $f^{(m)}(x_2) \neq 0$.

Exemplu

$f = X^3 - X^2 - 4X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ are rădăcinile $1 + \sqrt{3}$ și $1 - \sqrt{3}$.

OBSERVAŢII

1. În enunț este esențial ca polinomul să aibă coeficienți raționali (polinomul $X - 1 - \sqrt{2}$ are rădăcina $1 + \sqrt{2}$, fără a avea rădăcina $1 - \sqrt{2}$).
2. În cazul când $v \in \mathbb{Q}$, $v < 0$, rezultatul teoremei rămâne valabil, conform paragrafului precedent, numai că rădăcina x_1 se scrie $x_1 = u + i\sqrt{-v}$, iar $x_2 = u - i\sqrt{-v}$, $u, v \in \mathbb{Q}$.
3. Dacă $x_1 = u + v\sqrt{w}$, $u, v \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{w} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este rădăcină a unui polinom cu coeficienți raționali, atunci și $x_2 = u - v\sqrt{w}$ este rădăcină.

Exemplu

Polinomul $X^3 + X^2 - 12X - 12$ are rădăcinile $0 + 2\sqrt{3}$, $0 - 2\sqrt{3}$ și -1. Verificați!

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve ecuația $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x - 18 = 0$ știind că admite rădăcina $1 + \sqrt{7}$.

Rezolvare

Conform teoremei, polinomul are și rădăcina $x_2 = 1 - \sqrt{7}$.
Folosind relațiile lui Viète, prima și a patra, avem: $x_3 + x_4 = 0$; $x_3x_4 = 3$.

Rezultă $x_3 = i\sqrt{3}$; $x_4 = -i\sqrt{3}$.

2. a) Să se arate că dacă $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$ și $x\sqrt{6} + y\sqrt{3} + z\sqrt{2} + w = 0$, atunci $x = y = z = w = 0$.

b) Să se afle un polinom nenul, de grad minim, cu coeficienți raționali care are rădăcina $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

c) Să se arate că dacă un polinom cu coeficienți raționali are rădăcina $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, atunci are și rădăcinile $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Rezolvare

a) Avem $y\sqrt{3} + z\sqrt{2} = -w - x\sqrt{6}$ (1), de unde prin ridicare la pătrat obținem
$3y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{6}yz = w^2 + 6x^2 + 2\sqrt{6}xw \Leftrightarrow 2\sqrt{6}(xw - yz) = 3y^2 + 2z^2 - w^2 - 6x^2$.
Evident $xw - yz = 0$, astfel $2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, contradicție.
Am reținut: $xw = yz$ și $3y^2 + 2z^2 - w^2 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 2z^2 = w^2 + 6x^2 \Leftrightarrow$
$3y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{6}yz = w^2 + 6x^2 - 2\sqrt{6}xw \Leftrightarrow (y\sqrt{3} - z\sqrt{2})^2 = (w - x\sqrt{6})^2$.
Rezultă: $y\sqrt{3} - z\sqrt{2} = -w + x\sqrt{6}$ (2) sau $y\sqrt{3} - z\sqrt{2} = +w - x\sqrt{6}$ (3)
Din (1) și (2) deducem $y\sqrt{3} = -w$ și $z\sqrt{2} = -x\sqrt{6}$, de unde $x = y = z = w = 0$
Din (1) și (3) deducem $y\sqrt{3} = -x\sqrt{6}$ și $z\sqrt{2} = -w$ și deci $x = y = z = w = 0$ c.c.t.d.

b) Fie $f = (X - \sqrt{3} - \sqrt{2})(X - \sqrt{3} + \sqrt{2})(X + \sqrt{3} - \sqrt{2})(X + \sqrt{3} + \sqrt{2}) =$
$= [(X - \sqrt{3})^2 - 2][(X + \sqrt{3})^2 - 2] = (X^2 - 2X\sqrt{3} + 1)(X^2 + 2X\sqrt{3} + 1) =$
$= (X^2 + 1)^2 - 4X^2 \cdot 3 = X^4 - 10X^2 + 1$.
Evident f are rădăcina $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ și are coeficienți raționali.
Arătăm că 4 este gradul minim (prin reducere la absurd).
Fie $g = aX^3 + bX^2 + cx + d$ un polinom de grad 3 din $\mathbb{Q}[X]$ cu $g(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$.
Atunci: $a(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 + b(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + c(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + d = 0$.
Amplificăm cu $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ și obținem:
$a(5 + 2\sqrt{6}) + b(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + c + d(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow$
$2a\sqrt{6} + (b + d)\sqrt{3} + (b - d)\sqrt{2} + 5a + c = 0$
Rezultă conform punctului a) că $2a = b + d = 5a + c = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$.
Nu există nici polinoame de grad 2 sau 1, cu coeficienți raționali având $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ rădăcină (justificați!).

c) Fie $h \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de grad > 4 care are ca rădăcină $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
Împărțind h la $X^4 - 10X^2 + 1$ obținem în $\mathbb{Q}[X]$:
$h = (X^4 - X^2 + 1)q + r$, unde $r = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
Din $h(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$ deducem $r(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$, de unde, conform b), rezultă $a = b = c = d = 0$. Am obținut $h = (X^4 - X^2 + 1)q$.
Deoarece $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$ sunt rădăcini ale polinomului $X^4 - X^2 + 1$, deducem că sunt și rădăcini ale polinomului h.

Exerciții propuse

1. Să se rezolve ecuațiile știind că admit rădăcina indicată:
a) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 8 = 0$; $x_1 = 1 - \sqrt{5}$;
b) $x^3 - 3x^2 - 8x + 24 = 0$; $x_1 = 2\sqrt{2}$;
c) $4x^4 - 3x^2 - 3x - 2 = 0$; $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

2. Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$ știind că ecuațiile admit rădăcina indicată:
a) $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 3 = 0$; $x_1 = 1 + \sqrt{2}$; b) $x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$; $x_1 = 2 - \sqrt{3}$.

3. Determinați un polinom de grad minim, cu coeficienți raționali care să admită:
a) rădăcina simplă 2 și rădăcina dublă $3 - \sqrt{2}$.
b) rădăcina simplă $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ -și rădăcina dublă $1 + i$.

4. Determinați $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât ecuația $x^5 - x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ să aibă rădăcinile i și $\sqrt{2}$.

5. Să se determine un polinom nenul $f \in \mathbb{Q}[X]$ care are rădăcina $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.

6. Să se arate că dacă $f \in \mathbb{Q}[X]$ care are rădăcina $\sqrt[3]{2}$, atunci $(X^3 - 2) / f$.

7. a) Să se determine un polinom cu coeficienți raționali care admite rădăcina $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.
b) Să se determine $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grad minim care admite rădăcina $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.
c) Să se rezolve ecuația $x^5 - 56x^4 - 10x^3 + 560x^2 + x - 56 = 0$ dacă admite rădăcina $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

8. a) Să se arate că dacă $f \in \mathbb{Q}[X]$ admite rădăcina $\sqrt{2} + i$, atunci f admite și rădăcinile $\sqrt{2} - i, -\sqrt{2} + i, -\sqrt{2} - i$.
b) Să se rezolve ecuația $2x^6 - x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 9x - 9 = 0$, știind că are rădăcina $\sqrt{2} + i$.

9. Se dă polinomul $f = X^5 + X^4 + 1$.
a) Să se calculeze $f(\varepsilon)$, unde ε este rădăcina de ordin 3 a unității.
b) Să se arate că numărul $n^5 + n^4 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ este compus.

3.10. Polinoame cu coeficienţi întregi

Prezentăm în continuare o teoremă privind existența rădăcinilor raționale pentru un polinom cu coeficienți întregi.

TEOREMĂ

Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$.

Dacă $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, este o rădăcină rațională a polinomului f, atunci $p \,/\, a_0$ și $q \,/\, a_n$.

Demonstraţie Evident, avem în vedere cazul nebanal al unui polinom f, de grad ≥ 1.

$f(\frac{p}{q}) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1\frac{p}{q} + \ldots + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \ldots + a_np^n = 0$ (1) (după eliminarea numitorilor).

Din (1) scoatem: $p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \ldots + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n = 0$ (2)

Rezultă din (2) că $p \,/\, (a_0q^n)$; deoarece $(p, q) = 1$ avem și $(p, q^n) = 1$; deci $p \,/\, a_0$.

Din (3) rezultă că $q \,/\, (a_0 \cdot p^n)$; deoarece $(q, p^n) = 1$ avem și $q \,/\, a_n$, c.c.t.d.

Consecinţe

1. Rădăcinile întregi ale unui polinom cu coeficienți întregi, dacă există, se află printre divizorii termenului liber.
2. Dacă polinomul are coeficientul dominant ± 1 și are rădăcini raționale, atunci acestea sunt întregi.
3. Ecuațiile algebrice $f(x) = 0$, unde $f \in \mathbb{Q}[X]$, se reduc prin eliminarea numitorilor la ecuații cu coeficienți întregi.

Pentru găsirea eventualelor rădăcini raționale ale unui polinom cu coeficienți întregi procedăm astfel:

- considerăm divizorii întregi ai termenului liber și testăm care dintre ei sunt rădăcini.
- pentru calculul rădăcinilor din $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ considerăm toate fracțiile ireductibile $\frac{p}{q}$ cu $p \,/\, a_0$ și $q \,/\, a_n$ și testăm care dintre ele sunt rădăcini.

Exemple

1. Pentru polinomul $X^3 - X^2 - 3X - 6$ rădăcinile întregi ar putea fi $\pm1, \pm3, \pm6$ (divizorii întregi ai lui 6).
   Numerele 1 și -1 nu sunt rădăcini; $f(2) = 0$ deci 2 este rădăcină.
   $X^3 + X^2 - 3X - 6 = (X - 2)(X^2 + 3X + 3)$; deci rădăcinile lui $X^2 + 3X + 3$ sunt celelalte rădăcini ale polinomului; $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}$.
   Polinomul are o singură rădăcină rațională.

2. Pentru polinomul $f = X^4 - X + 2$, rădăcinile întregi ar putea fi: ± 1, ± 2.
Nici unul dintre cei patru divizori nu verifică ecuația $f(x) = 0$. Deci ecuația nu are rădăcini întregi. Deoarece polinomul este unitar (are coeficientul dominant 1) rezultă că el nu are nici rădăcini din $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Rezultă că dacă polinomul are rădăcini reale, atunci acestea sunt iraționale.

3. Pentru polinomul $g = \frac{1}{2}X^4 - \frac{7}{2}X^3 + 8X^2 - 7X + 2$, determinarea rădăcinilor revine la rezolvarea ecuației algebrice:

$\frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 7x^3 + 16x^2 - 14x + 4 = 0$ (ecuație algebrică având coeficienți întregi).
Divizorii termenului liber sunt: ± 1, ± 2, ± 4.
Observăm că 1 și 2 sunt soluții, deci $X - 1$ și $X - 2$ sunt factori.
Împărțind $X^4 - 7X^3 + 16X^2 - 14X + 4$ la $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$ obținem câtul $X^2 - 4X + 2$.
Celelalte rădăcini sunt date de ecuația $x^2 - 4x + 2 = 0$: $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}$.

4. Ecuația $4x^3 - 4x^2 - x - 3 = 0$ nu are soluții întregi pentru că nici unul dintre divizorii lui 3 (± 1, ± 3) nu verifică ecuația.

Căutăm eventualele soluții din $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ printre fracțiile $\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{3}{4}$ (la numitori avem divizorii coeficientului dominant 4).

După câteva calcule (efectuați-le!) descoperim că $\frac{3}{2}$ verifică ecuația:

$4 \cdot \frac{27}{8} - 4 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 3 = 0$. Rezultă că $\frac{3}{2}$ este rădăcină rațională.

Continuăm împărțind polinomul $g = 4X^3 - 4X^2 - X - 3$ la $X - \frac{3}{2}$ sau, și mai comod, la $2X - 3$; obținem $4X^3 - 4X^2 - X - 3 = (2X - 3)(2X^2 + X + 1)$.

$2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$ (celelalte două rădăcini în $\mathbb{C}$).

Exercițiul anterior arată că ar fi nevoie de un criteriu de selectare a fracțiilor care ar putea fi eventuale rădăcini ale unui polinom cu coeficienți întregi.

Astfel de criterii există și sunt date de următoarea:

PROPOZIŢIE

Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ și $\dfrac{p}{q}$ o rădăcină rațională a sa, $p,\ q \in \mathbb{Z}$, $(p,\ q) = 1$.

Atunci pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ avem $(aq - p) \,/\, f(a)$.

Demonstrație Împărțind în $\mathbb{Q}[X]$ polinomul f la $X - \dfrac{p}{q}$ obținem:

$$f = \left(X - \frac{p}{q}\right)g,\ g \in \mathbb{Q}[X] \Leftrightarrow q^n \cdot f = (qX - p)\cdot h, \text{ unde } h \in \mathbb{Z}[X] \qquad (1)$$

În particular, pentru $a \in \mathbb{Z}$, din (1) obținem: $q^n f(a) = (aq - p)\cdot h(a)$ (egalitate în $\mathbb{Z}$). Deoarece numerele $aq - p$ și q sunt prime între ele rezultă că $(aq - p,\ q^n) = 1$.

Prin urmare $(aq - p) \,/\, q^n \cdot f(a)$ implică $(aq - p) \,/\, f(a)$, c.c.t.d.

Așadar: atunci când căutăm rădăcini raționale printre fracțiile $\dfrac{p}{q}$, $p \,/\, a_0$ și $q \,/\, a_n$ (vezi teorema) putem elimina o bună parte din ele cerând numerelor $ap - q$ (pentru un număr a fixat) să dividă numărul $f(a)$.

În cazul în care acest fapt nu se realizează, rezultă că $\dfrac{p}{q}$ nu este rădăcină.

În practică, pentru comoditatea calculelor se alege $a = 1$ și $a = -1$.

Exemplu

Rădăcinile raționale ale polinomului $f = 3X^3 + X^2 + 4X - 4$ ar putea fi:

$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\dfrac{1}{3};\ \pm\dfrac{2}{3};\pm\dfrac{4}{3}$.

Avem $f(1) = 4$; $f(-1) = -10$.

Alegând $a = 1$, $aq - p = q - p$; alegând $a = -1$, obținem $aq - p = -q - p = -(q + p)$.

Condiția $(q - p) \,/\, 4$ este verificată de $\dfrac{2}{1}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}$.

Dintre acestea numai $\dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}$ verifică cealaltă condiție: $(p + q)$ divide 10.

Cele 12 posibilități inițiale s-au redus la două!

Însă $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{16}{3} \neq 0$ și $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$. Deci $\dfrac{2}{3}$ este singura rădăcină rațională.

Exerciţii propuse

1. Să se rezolve ecuațiile știind că au rădăcini raționale:

a) $x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0$; b) $2x^4 + x^3 - x^2 + x - 3 = 0$;

c) $2x^4 + x - 6 = 0$; d) $x^3 - 3x + 2 = 0$;

e) $3x^3 - x + 2 = 0$; f) $10x^4 + 13x^3 - 4x - 1 = 0$.

2. Verificați dacă ecuațiile următoare au toate rădăcinile raționale:

a) $x^4 + x^2 - 2 = 0$; b) $2x^3 + 3x^2 - 5 = 0$;

c) $x^3 + 2x - 1 = 0$; d) $30x^3 - 31x^2 + 10x - 1 = 0$.

3. Aflați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care ecuația are o rădăcină întreagă.

a) $x^3 + ax^2 + 2x - 1 = 0$; b) $x^4 - 2x^3 + (a - 1)x - a = 0$.

4. Determinați $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuația $x^3 - (m + 1)x + 2m = 0$ să aibă cel puțin o rădăcină rațională.

5. Să se arate că pentru orice p număr prim ecuația $x^2 - 3(p + 1)x + p = 0$ nu are rădăcini raționale.

6. Demonstrați inegalitățile:

a) $x^4 + 16x^3 - 60x^2 + 16x + 64 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Rezolvați ecuațiile iraționale:

a) $\sqrt[3]{4 - x} + \sqrt{x + 1} = 3$; b) $\sqrt[3]{1 - 2x} + \sqrt[4]{x - 1} = -1$;

8. Să se rezolve ecuațiile trigonometrice:

a) $\sin 3x - \cos^2 x - \sin x\,(1 - \sin x) = 0$;

b) $\sin x - \cos x = 4\sin x \cos^2 x$;

c) $\sin^4 x + 5\sin^3 x \cos x + 5\sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x - 12\cos^4 x = 0$;

*__9.__ Să se afle volumul unei piramide triunghiulare regulate cu muchiile laterale egale cu a și muchiile bazei egale cu x. Pentru ce valoare a lui x se obține volumul maxim?

*__10.__ O bucată de tablă pătratică are latura de 60 cm. Din fiecare colț se decupează un pătrat de aceeași latură. Îndoind adecvat bucata rămasă se obține o cutie cu baza pătrat. Să se arate că volumul cutiei nu depășește 16000 cm^3.

*__11.__ Dacă un polinom din $\mathbb{Z}[X]$ dă la împărțirea cu $X^2 - 9$ restul 1, să se arate că polinomul nu are rădăcini raționale.

3.11. Ecuaţii algebrice particulare

Există polinoame f (cu coeficienţi complecşi) şi deci ecuaţii algebrice $f(\mathrm{x}) = 0$ care nu pot fi rezolvate, adică pentru care nu există metode și formule care să permită găsirea rădăcinilor.

Ne vom ocupa în continuare de câteva tipuri de ecuații algebrice care pot fi rezolvate (prin anumite metode).

I. Ecuaţii bipătrate

Sunt ecuații de forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

Cu substituția $x^2 = y$ obținem ecuația de gradul al doilea $ay^2 + by + c = 0$, cu soluțiile y_1, y_2.

Soluțiile ecuației bipătrate se află rezolvând ecuațiile:

$x^2 = y_1$; $x^2 = y_2$.

Exemplu

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$, notăm $x^2 = y$ și obținem $y^2 + 3y - 4 = 0$, având rădăcinile $y_1 = 1$; $y_2 = -4$.

Atunci: $x^2 = 1$ are soluțiile $x_{1,\,2} = \pm 1$.

$x^2 = -4$ are soluțiile $x_{3,\,4} = \pm 2i$.

II. Ecuaţii binome

Sunt ecuații de forma $X^n = a$, unde $a \in \mathbb{C}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvarea lor a fost studiată în clasa a X-a, prin cele două metode, algebrică și trigonometrică.

Exemplu

Să se rezolve ecuația $x^3 = -2 + 2i$.

Soluția 1 (algebrică)

Fie: $x = a + bi$; atunci din $(a + bi)^3 = -2 + 2i$, identificând părțile reale și imaginare obținem sistemul:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ 3a^2b - b^3 = 2 \end{cases} \quad \text{(sistem omogen de gradul 3)}$$

Adunând ecuațiile obținem $a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3 = 0$ și împărțind cu b^3 (pentru că b nu poate fi 0) avem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\frac{a}{b} + 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 3y^2 - 3y - 1 = 0, \text{ unde am notat } \frac{a}{b} = y.$$

Observăm soluția rațională $y_1 = 1$ și $y^3 + 3y^2 - 3y - 1 = (y - 1)(y^2 + 4y + 1)$

Așadar $y_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Sistemul s-a dus la sistemele

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ \dfrac{a}{b} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ \dfrac{a}{b} = -2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ și } \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ \dfrac{a}{b} = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Scoțând a din ecuația a doua și înlocuind în prima se rezolvă trei ecuații simple în a. Continuați.

Soluția 2 (trigonometrică)

Se scrie a sub formă trigonometrică: $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ și se aplică formula

$$\boxed{x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}}$$

În cazul nostru $r = |-2 + 2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$a = 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Rezultă $x_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$,

adică

$$x_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);\ x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$x_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

III. Ecuaţii trinome

Sunt ecuații de forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
Rezolvarea lor se face prin substituția $x^n = y$ și reducerea la o ecuație de gradul al doilea:
$y^2 + by + c = 0$.

Exemplu

$x^6 - (1 + i)x^3 + i = 0$
Notăm $x^3 = y$. Avem: $y^2 - (1 + i)y + i = 0$, cu soluțiile $y_1 = 1$; $y_2 = i$.
Revenind la substituție obținem ecuațiile binome:

$$x^3 = 1 = \cos 0 + i\sin 0;\ x^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Ecuația dată are 6 soluții:

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k \in \{0, 1, 2\}$$

$$x'_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\ k \in \{0, 1, 2\}$$

IV. Ecuaţii reciproce

DEFINIŢIE

Fie $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$.
Polinomul f se numește **reciproc** dacă pentru orice $k = \overline{0, n}$ avem $a_k = a_{n-k}$.

În acest caz ecuația algebrică $f(x) = 0$ se numește *ecuație reciprocă*.

CARACTERIZARE

Un polinom f de grad n este reciproc dacă și numai dacă $f = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ (1)

Într-adevăr:

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^n\left(a_0 + a_1\cdot\frac{1}{x} + a_2\cdot\frac{1}{x} + \ldots + a_n\frac{1}{x^n}\right) =$$
$$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = f.$$

Proprietăţi ale polinoamelor reciproce

1. Dacă f este un polinom reciproc și α este o rădăcină a sa, atunci $\frac{1}{\alpha}$ este de asemenea rădăcină a lui f.
2. Un polinom reciproc de grad impar are rădăcina -1.
3. Câtul împărțirii unui polinom reciproc la $x + 1$ este polinom reciproc.

Demonstraţie

1. Din relația (1) rezultă că dacă $f(\alpha) = 0$ atunci $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.
2. Tot în relația (1), făcând $x = -1$ obținem:
$f(-1) = (-1)^n f(-1) \Leftrightarrow f(-1) = -f(-1) \Leftrightarrow f(-1) = 0$
și deci $X + 1$ este factor al descompunerii: $f = (X + 1)f_1$.
3. Relația (1) devine $(X+1)f_1 = X^n\left(\frac{1}{X}+1\right)f_1\left(\frac{1}{X}\right)$, adică $f_1 = X^{n-1}f_1\left(\frac{1}{X}\right)$.
Deci f_1 este la rândul său polinom reciproc de grad $n - 1$, c.c.t.d.

Rezolvarea ecuaţiilor reciproce

- Dacă **ecuația are gradul al treilea**, atunci o rădăcină a sa este –1.
  Împărțind polinomul reciproc la $X + 1$, obținem un polinom (reciproc) de gradul al doilea și rezolvăm ecuația obținută.

Exemplu

$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$; $x_1 = -1$
$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

- **Ecuații reciproce de gradul 4**
  Fie $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4$ (2)
  Deoarece $a_0 \neq 0$ putem împărți în (2) prin x^2. Obținem:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 + a_1\frac{1}{x} + a_0 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow a_0\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0$$

Facem substituția $x + \frac{1}{x} = y$; ecuația devine:

$$a_0(y^2 - 2) + a_1y + a_3 = 0 \Leftrightarrow a_0y^2 + a_1y - 2a_0 + a_2 = 0 \qquad (3)$$

(numită și ecuația rezolventă a ecuației reciproce).
Evident, continuăm cu rezolvarea ecuației (3); obținem soluțiile y_1, y_2.

Apoi rezolvăm ecuațiile rezultate: $x + \frac{1}{x} = y_1$; $x + \frac{1}{x} = y_2$ etc.

Exemplu

$$x^4 + 3x^2 - 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow y^3 - 2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 3y - 4 = 0$, cu rădăcinile $y_1 = 1$; $y_2 = -4$.

Atunci $x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

$x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$.

- **Ecuațiile reciproce de gradul 5**

Reținem soluția $x_1 = -1$ și apoi împărțim polinomul la $X + 1$, obținând o ecuație reciprocă de gradul 4. Continuăm ca la punctul anterior.

Exemplu

$x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$. Împărțim la $x + 1$ cu schema lui Horner.

x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	
-1	3	4	4	3	1	
	1	2	2	2	1	0

Avem $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$
$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0 \;\mid : x^2$.

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0,\ x+\frac{1}{x}=y.$$

$(y^2 - 2) + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow\ y_1 = 0;\ y_2 = -2$ etc.

OBSERVAŢII

Pe cazul general: o ecuație reciprocă de grad $2k$ se rezolvă prin împărțirea la x^k, urmată de aceeași substituție, $x + \dfrac{1}{x} = y$.

Ecuația se reduce la o ecuație de grad k.

O ecuație reciprocă de grad $2k + 1$ se rezolvă reținând o primă soluție egală cu -1, după care rezolvarea continuă cu împărțirea la binomul $X + 1$.

Se obține o ecuație reciprocă de grad $2k$ etc.

Exerciţii propuse

1. Să se rezolve ecuațiile bipătrate:
a) $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$; b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; c) $(x - 1)^4 + (x + 1)^4 = 2x^2$.

2. Să se rezolve ecuațiile binome:
a) $x^3 = 8$; b) $x^4 = -1$; c) $x^5 = i$; d) $x^6 = -1 - i\sqrt{3}$.

3. Să se rezolve ecuațiile trinome:
a) $3x^4 + 2x^2 - 5 = 0$; b) $x^8 - (1 + 2i)x^4 + i - 1 = 0$;
c) $x^6 + (11 + 2\sqrt{3})x^3 + 4 + 2\sqrt{3} = 0$; d) $(1 + i)x^{10} - x^5 + 1 = 0$.

4. Să se rezolve ecuațiile reciproce:
a) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$; b) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$;
c) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$; d) $x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$;
e) $x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 3x + 1 = 0$; f) $x^5 + 3x^3 + 3x + 1 = 0$.

5. Să se rezolve ecuațiile:
a) $\left(\dfrac{x+i}{x-i}\right)^8 = 1$; b) $(x + 1)^4 + 3x^2(x + 1)^2 + 2x^4 = 0$; c) $(2x + i)^3 + (2x - i)^3 = 0$.

6. Pentru ce valori ale lui a ecuațiile următoare au toate rădăcinile reale.
a) $ax^3 + (a + 1)x^2 + (a + 1)x + a = 0$; b) $x^4 - x^3 + ax^2 - x + 1 = 0$.

***7.** Rezolvați ecuațiile:
a) $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = ax^2,\ a \in \mathbb{R}$; b) $x^4 + x^3 + x^2 + 5x + 25 = 0$;
c) $x^4 + 4x - 1 = 0$; d) $x^3 - (a + 1)x^2 + (2a + 1)x - a^2 - a = 0$;
e) $x^4 + 4x + 1 = 0$; f) $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$.

Teste de verificare

Testul 1

1. Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul $2X^3 + (a+2)X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ să fie ireductibil.

2. Descompuneți în factori ireductibili polinoamele:
a) $X^4 + X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$;
b) $X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

3. Dați exemplu de polinom de gradul al doilea din $\mathbb{Z}_5[X]$ ireductibil.

4. Calculați cu c.m.m.d.c. și cu c.m.m.m.c al polinoamelor:
$X^3 + X^2 + X + 1$ şi $X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$.

Timp de lucru: 45 minute.
Barem: **1.** 2p; **2.** a) 1p; b) 2p. **3.** 2p. **4.** 2p. 1 p din oficiu.

Testul 2

1. Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul $X^3 + \hat{2}aX + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$ să fie ireductibil.

2. Descompuneți în factori ireductibili polinomul:
a) $X^4 + X^3 + X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$;
b) $X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

3. Dați exemplu de polinom de gradul al doilea ireductibil din $\mathbb{Z}_7[X]$.

4. Calculați c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c al polinoamelor:
$X^3 + X^2 - X - 1$ şi $X^4 + X^3 - X - 1$.

Timp de lucru: 45 minute.
Barem: **1.** 2p. **2.** a) 1p; b) 2p. **3.** 2p. **4.** 2p. 1 p din oficiu.

Testul 3

1. a) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $2X^2 + X + 1 = X(X-1)\alpha X + \beta$

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k^2+k+1}{k!}$.

2. a) Aflați c.m.m.d.c. al polinoamelor: $X^3 + 2X^2 - 1$ și $X^4 + X^3 + X - 1$.

b) Rezolvați ecuația $x^4 + (m+1)x + 2mx^2 + x - m - 1 = 0$ știind că are rădăcini independente de m ($m \in \mathbb{R}$).

3. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3 + x + 4 = 0$.

a) Arătați că ecuația are o singură rădăcină reală.

b) Calculați $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Timp de lucru: 90 minute.
Barem: **1.** a) 1,5p; b) 1,5p. **2.** a) 1,5p; b) 1,5p. **3.** a) 1p; b) 2p. 1p din oficiu.

Testul 4

1. Determinați polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + c \in \mathbb{R}[X]$ știind că are rădăcina $3i$ și dă restul 39 la împărțirea cu $X - 2$.

2. Polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$ dă la împărțirea cu $X^2 - 7X + 5$ un rest egal cu câtul.
Demonstrați că:
a) grad $(f) \leq 3$;
b) f are toate rădăcinile reale.

3. a) Descompuneți în factori polinomul $x^{2n+1} - 1$.

b) Deduceți egalitățile $\prod\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k\pi}{2n+1} = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$; $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{k\pi}{2n+1} = \dfrac{1}{2^n}$

4. Fie $(1 + X + X^2)^{100} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{200}X^{200}$.
Calculați: $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{200}$; $a_1 + 2a_2 + 3a_2 + \ldots + 200a_{200}$.

Timp de lucru: 90 minute.
Barem: **1.** 3p. **2.** a) 1p; b) 1p. **3.** a) 2p; b) 1p. **4.** 1 p. Oficiu: 1p.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul 4

Primitive

Una dintre problemele care i-au frământat pe matematicieni din cele mai vechi timpuri a fost aceea a determinării ariei unei porţiuni mărginite din plan.

Evident, problema complicată este aceea a determinării ariei unei porţiuni delimitate de segmente şi (sau numai) arce de curbură.

Un exemplu celebru în acest sens este modul în care marele matematician al Greciei antice, Arhimede, determina aria unui „segment de parabolă“. (porţiunea haşurată din figura 1).

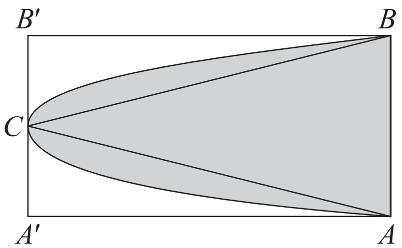


Fig. 1

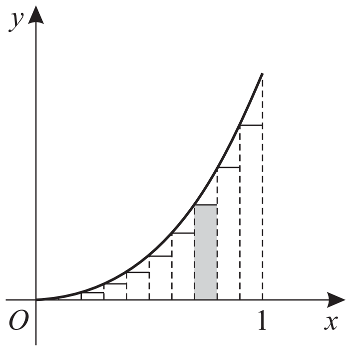


Fig. 2

Arhimede a demonstrat că aria haşurată este egală cu $\frac{2}{3}$ din aria dreptunghiului $AA'B'B$.

Pentru calculul ariei domeniului determinat de parabola $y = x^2$, axa Ox şi dreapta $x = 1$, matematicianul Bonaventura Cavalieri (sec. XVII) proceda astfel (vezi figura 2):

Se împarte intervalul [0, 1] în n părţi egale şi se calculează ariile dreptungiurilor de bază $\frac{1}{n}$ şi înălţime $\left(\frac{k}{n}\right)^2$, deci $\frac{k^2}{n^3}$.

Aria „acoperită“ de dreptunghiuri este

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \text{ care pentru } n \to \infty \text{ devine } \frac{1}{3}.$$

O trăsătură comună a calculelor făcute de matematicieni legat de arie, volum, momente de inerţie este de sesizarea faptului că toate conduc la una şi aceeaşi problemă matematică: determinarea limitei unei sume atunci când n tinde la infinit.

Preocuparea de a răspunde la aceste probleme a constituit ceea ce mai târziu s-a numit calcul integral.

Regulile calculului integral şi legăturile sale cu calculul diferenţial (cel cu derivate) au fost elaborate aproape în acelaşi timp de către Isaac Newton şi Gottfried Leibniz.

Leibniz le-a expus teoretic şi le-a publicat, în timp ce Newton le-a elaborat fără să le publice (încă din 1665).

Newton era interesat de fizică (cinematică şi dinamică), de determinarea maximelor şi minimelor, construcţia tangentei la o curbă etc.

Newton a fost acela care a dat diferite formule de „integrare“. În cele ce urmează vom dezvolta o teorie a calculului integral pentru a calcula ariile unor suprafeţe plane curbilinii, volumul unor corpuri de rotaţie, dar şi pentru a introduce un instrument foarte eficace de calcul în fizică, tehnică, economie etc.

În acest capitol vom răspunde la următoarea problemă:

Fiind dată o funcţie $f: J \to \mathbb{R}$ (J interval) există o funcţie $F: J \to \mathbb{R}$ a cărei derivată să fie funcţia dată $f: J \to \mathbb{R}$?

Pentru o mulţime destul de largă de funcţii, răspunsul la această problemă este afirmativ.

Să urmărim:

DEFINIŢIE

Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f: J \to \mathbb{R}$ o funcţie. Vom spune că f **admite primitivă** pe J dacă există o funcţie $F: J \to \mathbb{R}$ astfel încât:

1) F este derivabilă pe J;
2) $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in J$.

Funcţia F se numeşte **primitivă** a funcţiei f.

Exemple

1. Pentru funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ o primitivă a sa este $F_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \dfrac{x^4}{4}$, alta este $F_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_2(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2$.

2. Funcţia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2 \cos x$ este o primitivă a funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 \sin x$.

TEOREMĂ

Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f: J \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă $F_1, F_2: J \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcţiei f, atunci există o constantă reală c astfel încât

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in J.$$

Demonstraţie F_1 şi F_2 fiind primitive ale lui f, ele sunt derivabile pe J şi

$F'(x) = f(x) = F_1'(x) = f(x) = F_2'(x)$, $\forall\ x \in J$, deci

$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, $\forall\ x \in J$.

Deducem că există un număr real c astfel încât $F_1(x) - F_2(x) = c$, $\forall\ x \in J$.

OBSERVAŢII

1. Dacă F_0 este o primitivă a funcției $f: J \to \mathbb{R}$, atunci orice funcție de forma $F = F_0 + c$, unde c este o constantă, este o primitivă a funcției f.
   Deducem că dacă o funcție admite o primitivă, atunci admite o infinitate de primitive. Din acest motiv vom spune în continuare „f admite primitive“ în loc de „f admite primitivă“.

2. Definiția primitivei s-ar putea extinde și la funcții definite pe reuniuni de intervale disjuncte, însă teorema anterioară nu mai este adevărată.
   Să analizăm următorul exemplu: considerăm funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x$;
   funcțiile $F, G: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definite prin $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ și $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 1, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2, & x > 0 \end{cases}$
   sunt derivabile pe $\mathbb{R}^*$ și verifică relațiile din definiție.
   Însă $G(x) = F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$ nu este o funcție constantă.

Între funcțiile care admit primitive și cele cu proprietatea Darboux sau cele continue există legături:

TEOREMA 1

O funcție care admite primitive are proprietatea Darboux.

Demonstraţie Dacă funcția $f: J \to \mathbb{R}$ admite primitive, atunci există o funcție $F: J \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $F' = f$. Însă se știe că derivata unei funcții derivabile are proprietatea Darboux. Așadar f are proprietatea Darboux.

OBSERVAŢII

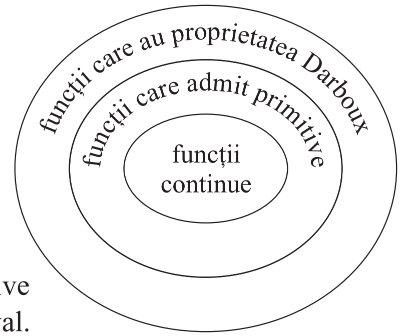
1. Dacă $f: J \to \mathbb{R}$ este o funcție astfel încât $f(J)$ nu este interval, atunci funcția f nu admite primitive.
2. Dacă $f: J \to \mathbb{R}$ este o funcție cu discontinuități de speța I, atunci f nu admite primitive.
3. Dacă $f: J \to \mathbb{R}$ este o funcție care are o limită laterală infinită într-un punct, atunci aceasta nu are proprietatea Darboux, adică funcția nu admite primitive.

TEOREMA 2

Orice funcție continuă $f : J \to \mathbb{R}$ (J interval) admite primitive.

Această teoremă va fi demonstrată în capitolul dedicat integralelor definite.

Să reținem însă diagrama alăturată:



Exemple

1. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$ nu admite primitive pentru că $\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}$, mulțime care nu este interval.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ nu admite primitive pentru că are o discontinuitate de speța I, în punctul $x = 0$.

3. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ este continuă, deci admite primitive. O primitivă a sa este funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$.

4. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ nu admite primitive.

Observăm că funcțiile f_1: $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, f_2: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, definite prin $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}$ sunt continue și admit ca primitive funcțiile $F_1(x) = c$, $F_2(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.

În cazul în care f ar admite o primitivă F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci ar avea forma

$$F(x) = \begin{cases} c + k_1, & x < 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x} + k_2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Primitiva unei funcții este derivabilă, deci continuă, prin urmare F trebuie să fie continuă.

$F(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = c + k_1.$

$F(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = k_2$, de unde $c + k_1 = k_2$.

Observând că $\dfrac{F(x) - F(0)}{x} = \sin\dfrac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$ și ținând cont că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin\dfrac{1}{x}$ nu există, deducem că funcția F nu este derivabilă în 0.

5. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0 \\ e^x, & x\geq 0 \end{cases}$ nu are proprietatea Darboux pentru că

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$, iar $f(0) = 1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Așadar funcția f nu admite primitive.

DEFINIŢIE

Fie $f: J\to\mathbb{R}$ ($J\subset\mathbb{R}$ interval) o funcție care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor lui f se numește **integrala nedefinită a funcției *f*** și se notează $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Operaţia de calculare a primitivelor unei funcţii se numește integrare.

OBSERVAŢIE

Notând cu $\mathcal{C}$ mulțimea funcțiilor constante definite pe J cu valori reale putem observa următoarele proprietăți:

a) $\lambda\mathcal{C} = \mathcal{C}$, $\forall\,\lambda \neq 0$;

b) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$;

c) dacă f este o funcție care admite primitive pe intervalul J și F_0 este o primitivă a sa, atunci $\int f(x)\mathrm{d}x = F_0 + \mathcal{C}$.

TEOREMĂ

Dacă $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, ($I$ interval) sunt funcții care admit primitive și $\lambda \in \mathbb{R}^*$, atunci funcțiile $f + g$ și λf admit de asemenea primitive și au loc relațiile:

$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x$$

Demonstrație Cum f și g admit primitive, atunci există două funcții, derivabile pe I, F și G astfel încât $F' = f$, $G' = g$. De aici, $F + G$ și λF sunt derivabile pe I și $(F + G)' = F' + G' = f + g$ și $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$. Deducem că $F + G$ este primitiva lui $f + g$, iar λF este primitiva lui λf.

Ținând cont de observația precedentă putem scrie

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C},\ \int g(x)\mathrm{d}x = G + \mathcal{C},$$

$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = F + G + \mathcal{C},$$

$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda F + \mathcal{C}.$$

Putem scrie $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C} + G + \mathcal{C} = F + G + \mathcal{C} + \mathcal{C} =$

$= F + G + \mathcal{C} = \int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x$.

Analog se obține $\lambda \int f(x)\mathrm{d}x = \lambda(F + \mathcal{C}) = \lambda F + \lambda \mathcal{C} = \lambda F + \mathcal{C} = \int \lambda f(x)\mathrm{d}x$.

OBSERVAȚIE

a) Condiția $\lambda \neq 0$ este esențială.
Într-adevăr, dacă $\lambda = 0$, atunci $\lambda f(x) = 0$, $\forall\, x \in I$, deci orice funcție constantă este o primitivă a lui λf.

Pe de altă parte, dacă $\lambda = 0$, atunci $\lambda \int f(x)\mathrm{d}x = \{0\}$.

În concluzie $\lambda \int f(x)\mathrm{d}x \subseteq \int \lambda f(x)\mathrm{d}x$, incluziune care este strictă când $\lambda = 0$.

b) Produsul și compusa a două funcții care admit primitive nu admit, neapărat, primitive.

c) Suma dintre o funcție care admite primitive cu una care nu admite primitive este o funcție care nu admite primitive.
Este un mod elegant de a demonstra că unele funcții nu admit primitive.

Exemplu

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}$ nu admite primitive deoarece putem scrie $f(x)=x-[x]$ și de aici avem $[x]=x-f(x)$; dacă presupunem că f admite primitive, în membrul drept avem diferență de funcții care admit primitive; rezultă că funcția $[x]$ admite primitive, fals.

d) Dacă modificăm o funcție care admite primitive (continuă) într-un punct, atunci funcția obținută nu admite primitive.

Exemplu

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ nu admite primitive, fiind funcție obținută prin modificare într-un punct din $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ care admite primitive.

e) Putem imagina operația de integrare ca „inversa“ operației de derivare; din acest punct de vedere, sesizăm că rezultatul derivării are proprietatea unicității sale, ceea ce nu este valabil despre integrare, precum și faptul că dacă derivarea prin utilizarea formulelor de calcul a funcțiilor elementare și a compunerii lor se finalizează întotdeauna cu obținerea funcției derivate în formă explicită, nu întotdeauna operația de integrare, atunci când are sens, poate conduce la apariția rezultatului în forma sa explicită.

Tabla de integrale nedefinite

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$	$\int x^n \mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\mathcal{C}$
$f:I\to\mathbb{R}, I\subset(0,\infty), f(x)=x^a,$ $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\int x^a \mathrm{d}x=\frac{x^{a+1}}{a+1}+\mathcal{C}$
$f:I\to\mathbb{R}, I\subset\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\geq 3$, impar	$\int \sqrt[n]{x}\mathrm{d}x=\frac{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}{n+1}+\mathcal{C}$
$f:I\to\mathbb{R}, I\subset[0,\infty), f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\geq 2$, par	$\int \sqrt[n]{x}\mathrm{d}x=\frac{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}{n+1}+\mathcal{C}$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x, a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$	$\int a^x \mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+\mathcal{C}$
$f:I\to\mathbb{R}, I\subset\mathbb{R}^*, f(x)=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+\mathcal{C}$
$f:I\to\mathbb{R}, I\subset\mathbb{R}\setminus\{-a,a\}, a\neq 0,$ $f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+\mathcal{C}$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}, a\neq 0$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+\mathcal{C}$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+\mathcal{C}$
$f:I\to\mathbb{R}, I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,\middle\vert\, k\in\mathbb{Z}\right\},$ $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2}\mathrm{d}x=\operatorname{tg}x+\mathcal{C}$

$f: I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\text{ctg}\, x + C$
$f: I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \middle\vert k \in \mathbb{Z}\right\},$ $f(x) = \text{tg}\, x$	$\displaystyle\int \text{tg}\, x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$f: I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$ $f(x) = \text{ctg}\, x$	$\displaystyle\int \text{ctg}\, x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, a \neq 0$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
$f: I \to \mathbb{R}, I \subset (-\infty, -a)$ sau $I \subset (a, \infty),$ $a > 0, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$
$f: I \to \mathbb{R}, I \subset (-a, a), a > 0,$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

OBSERVAȚII

1. Pentru a stabili dacă o funcție $f: I \to \mathbb{R}$ admite sau nu primitive putem proceda astfel:
- Cercetăm continuitatea funcției:
  a) dacă funcția este continuă, atunci admite primitive;
  b) dacă are discontinuități de speța I, atunci funcția nu admite primitive.
- Dacă funcția are discontinuități de speța a II-a cu limite laterale infinite, atunci funcția nu admite primitive;
- Dacă funcția are discontinuități de speța a II-a, încercăm să construim o funcție cu proprietățile din definiția primitivei.

2. Dacă demonstrăm că funcția nu are proprietatea Darboux, de exemplu imaginea funcției nu este interval, atunci funcția nu admite primitive.

Aplicație

Legea de variație a numărului de cumpărători ai unui produs, în funcție de timp

Fie n numărul oamenilor care ar putea cumpăra acest manual.

Dacă notăm cu $x(t)$ numărul de cumpărători care au cumpărat acest manual la momentul t, atunci ritmul de cumpărare al mărfii este cu atât mai mare cu cât sunt mai mulți cumpărători și scade o dată cu micșorarea numărului acelora care mai au nevoie de acea marfă.

Deci, viteza de variație a lui $x(t)$, adică $x'(t)$ este proporțională cu numărul populației fără marfă, adică $n - x(t)$.

Vom putea scrie: $x'(t) = k(n - x(t))$, k este o constantă de proporționalitate care arată numărul mediu de cumpărători în unitatea de timp.

Putem scrie $\dfrac{x'(t)}{n - x(t)} = k$ și dacă integrăm după t obținem $\ln(n - x(t)) = -kt + c$.

Ținând cont că la momentul $t = 0$, avem $x(0) = 0$ și mai departe $c = \ln n$.

Înlocuind, avem $\ln(n - x(t)) = -kt + \ln n \Leftrightarrow n - x(t) = ne^{-k} \Leftrightarrow x(t) = n(1 - \mathrm{e}^{-kt})$.

Funcția obținută exprimă numărul de cumpărători în funcție de timp.

În practică, valoarea lui k se poate stabili în mod corect pe baze statistice.

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$ admite primitive și să i se determine o primitivă.

Rezolvare

Studiem continuitatea funcției în punctul $x = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$, $f(0) = 1$, deci funcția este continuă în punctul $x = 0$.

Cum funcția este continuă în orice punct x real nenul, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ și deci va admite primitive.

Funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \le 0 \\ \sin x + c_2, & x > 0 \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, va fi o primitivă a funcției f dacă este continuă.

În consecință, trebuie să avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$ adică $1 + c_1 = c_2$.

În final $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \le 0 \\ \sin x + 1 + c_1, & x > 0 \end{cases}$ $(c \in \mathbb{R})$ este o primitivă a lui f.

2. Fie $k \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{k}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare

Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{k}\sin\dfrac{k}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, funcție care este derivabilă. Verificați!

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{k}\sin\dfrac{k}{x} - \cos\dfrac{k}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Întrucât funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{k}\sin\dfrac{k}{x} - \cos\dfrac{k}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Fie funcția $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției h. Avem $f = h - g' = H' - g' = (H - g)'$. Prin urmare, funcția $H - g$ este o primitivă a funcției f și deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

3. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} + 3^x\right) \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}^*_+$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}\,\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x\ \mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}\,\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

a) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} + 3^x\right) \mathrm{d}x = \int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt[3]{x^4}}{3} + \ln x + \frac{3^x}{\ln 3} + \mathcal{C}$;

b) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4\left(x^2+\frac{9}{4}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{3} + \mathcal{C}$;

c) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{tg}^2\, x + 1 - 1)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{tg}^2\, x + 1)\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + \mathcal{C}$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{9}{4}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+\frac{9}{4}}\right) + \mathcal{C}$.

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție strict crescătoare pe $[a, b]$, care admite primitive pe $[a, b]$. Să se arate că oricare ar fi $F: [a, b] \to \mathbb{R}$, o primitivă a funcției f pe $[a, b]$ și oricare ar fi $c \in (a, b)$ există $x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel încât $x_1 < c < x_2$ și $F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1) f(c)$.

Rezolvare

Fie $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f pe $[a, b]$ și fie $c \in (a, b)$.
Considerăm funcția $g: [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) - x f(c)$, $\forall\, x \in [a, b]$.
Evident, funcția este derivabilă și $g'(x) = f(x) - f(c)$, $\forall\, x \in [a, b]$.
Întrucât funcția f este strict crescătoare, avem $g'(x) < 0$, $\forall\, x \in [a, c)$ și $g'(x) > 0$, $\forall\, x \in (c, b]$.
Adică, g este strict descrescătoare pe $[a, c)$ și strict crescătoare pe $(c, b]$.
Cum funcția g este continuă, rezultă că g nu este injectivă; atunci există două puncte $x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel încât $x_1 < c < x_2$ și $g(x_1) = g(x_2)$.
Prin urmare $F(x_1) - x_1 f(c) = F(x_2) - x_2 f(c)$. Mai departe rezultă concluzia.

5. Fie $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție. Să se arate că dacă $F_1: (a, c] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f|_{(a, c]}$ și $F_2: (c, b) \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f|_{[c, b)}$, atunci funcția

$F: (a, b) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} F_1(x) - F_1(c), & x \in (a, c) \\ F_2(x) - F_2(c), & x \in [c, b) \end{cases}$ este o primitivă a funcției pe

intervalul (a, b).

Rezolvare

Funcția F este derivabilă pe $(a, c) \cup (c, b)$ și $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (a, b) \setminus \{c\}$.

Cum avem $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} \dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} \dfrac{F_1(x) - F_1(c)}{x - c} = F_1'(c) = f(c)$

$\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} \dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} \dfrac{F_2(x) - F_2(c)}{x - c} = F_2'(c) = f(c)$.

Prin urmare funcția F este derivabilă și în punctul c și $F'(c) = f(c)$.
Deci funcția F este o primitivă a funcției f.

6. a) Să se arate că dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$, admite primitive, atunci

$$\int f(ax + b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax + b) + \mathcal{C}, \text{ unde } F \in \int f(t)\mathrm{d}t.$$

b) Să se calculeze integralele: $\int (2x+1)^{10}\, \mathrm{d}x$; $\int \sin 3x\, \mathrm{d}x$; $\int 2^{\frac{x}{4}}$.

Rezolvare

a) Cum F este o funcție derivabilă cu $F' = f$, atunci și funcția $F(ax + b)$ este derivabilă, iar $F'(ax + b) = af(ax + b)$, $\forall\, x \in I$.

b) Cum $\int x^{10}\,dx = \dfrac{x^{11}}{11} + \mathcal{C}$, $\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$, $\int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \mathcal{C}$, conform cu a) putem scrie:

$$\int (2x+1)^{10}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{11}}{11} + \mathcal{C}; \qquad \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + \mathcal{C};$$

$$\int 2^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\cdot\frac{2^{\frac{x}{4}}}{\ln 2} + \mathcal{C}.$$

Exerciții propuse

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a, & x\neq 0 \\ b, & x = 0\end{cases}$.

Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a = b$.

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = [x^2]$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

3. Să se arate că următoarele funcții admit primitive:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0\end{cases}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x = 0\end{cases}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}\cos x, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0\end{cases}$.

4. Să se arate că următoarele funcții nu admit primitive:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0\end{cases}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x = 0\end{cases}$;

c) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0\end{cases}$.

5. Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\to\mathbb{R}, F(x) = \dfrac{x+2}{5}\cdot\sqrt[3]{(3x+1)^2}$ este o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}$.

6. Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)\right)$ este o primitivă

a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{(x^2+2x+2)^2}$.

7. Să se determine numerele reale a și b astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\begin{cases} ae^{2x}, & x\le 0 \\ \sin 2x+b\cos 3x, & x>0 \end{cases}$ să fie primitiva unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

8. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

a) $f(x)=x+2, x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=x+\frac{1}{x}, x>0$; c) $f(x)=2\sin x-\cos x, x\in\mathbb{R}$;

d) $f(x)=2^x+e^x, x\in\mathbb{R}$; e) $f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

f) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; g) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x>0$;

h) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}, x>2$; i) $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$; j) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}, x\in\mathbb{R}$;

k) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, x>2$; l) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, x\in(-2,2)$.

9. Calculați primitivele următoarelor funcții:

a) $f(x)=\cos\frac{x}{2}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; b) $f(x)=\operatorname{tg} 2x, x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$; c) $f(x)=3^{4x}, x\in\mathbb{R}$;

d) $f(x)=\sqrt{3x+1}, x\in(0,\infty)$; d) $f(x)=\operatorname{ctg}(2x+1), x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$;

e) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}, x\in(-1,0)$.

10. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin^4 x+(x^2+1)\operatorname{arctg} x$.

a) Calculați derivata funcției.

b) Calculați $\int(4\sin^3 x\cos x+2x\operatorname{arctg} x+1)\,dx$.

11. Să se determine numerele reale *a*, *b* și *c* astfel încât:

a) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-x+2}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2-x+2} + c\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}}\,dx$;

b) $\int e^x (x^2+3x+5)dx = e^x(ax^2+bx+c)+\mathcal{C}$;

c) $\int e^x \sin x\, dx = (a\sin x + b\cos x)e^x + \mathcal{C}$;

d) $\int e^x \cos x\, dx = (a\sin x + b\cos x)e^x + \mathcal{C}$.

12. Să se calculeze:

a) $\int \sin^2 x\, dx + \int \cos^2 x\, dx,\ x \in \mathbb{R}$; b) $\int \arcsin x\, dx + \int \arccos x\, dx,\ x \in [-1, 1]$;

c) $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx + \int \operatorname{arc\,ctg} x\, dx,\ x \in \mathbb{R}$; d) $\int \left(e^{\ln x}\right)^2 dx,\ x \in \mathbb{R}$.

13. Să se arate că funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1+\sin\frac{1}{x}, & x\in[-1,0) \\ 0, & x=0 \\ 1+\sin\frac{1}{x}, & x\in(0,1] \end{cases}$ nu admite primitive.

14. Să se arate că funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos^2\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ nu admite primitive.

Deduceți că dacă o funcție *f* admite primitive nu rezultă, în general, că funcția f^2 admite primitive și, în general, dacă *f* și *g* admit primitive nu rezultă numaidecât că $f \cdot g$ admite primitive.

15. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$. Să se arate că dacă *f* admite primitive pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$, atunci admite primitive pe $[a, b]$.

16. Să se stabilească primitivele următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & x<0 \\ 2x, & x\geq 0 \end{cases}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x\geq 0 \\ x+1, & x<0 \end{cases}$; d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x>0 \\ \cos x - 1, & x\leq 0 \end{cases}$.

17. Să se determine numerele rele a și b astfel încât funcția

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\le 2 \\ bx+a, & x>2 \end{cases}$ să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

Determinați în acest caz o primitivă a funcției f pe R.

18. Să se determine numerele reale a, b și c astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ ax^2+bx+c, & x>0 \end{cases}$ să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

Determinați în acest caz o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

***

19. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0 \\ x+a, & x\le 0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$, nu admite primitive și nu este continuă.

20. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ admite primitive și nu este continuă.

21. Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții. Dacă $g(x)\ne 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și funcțiile $f+g, f\cdot g, \frac{f}{g}, f\circ g$ admit primitive pe $\mathbb{R}$, atunci funcțiile f și g admit primitive pe $\mathbb{R}$? Analizați exemplul

$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ și $g(x)=\begin{cases} -1, & x\in\mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

22. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admit primitive cu proprietatea $f^2(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

23. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe $(0,\infty)$ astfel încât $f'(x^2)=\frac{1}{x}$, $\forall x>0$.

Determinați funcția f.

24. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; b) $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\,\mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\int \frac{x^2}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x,\ x \in (1, \infty)$; d) $\int \frac{2}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x,\ x \in (1, \infty)$; e) $\int 2^x \cdot 5^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$;

f) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$; g) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; h) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$;

25. Determinați funcția derivabilă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care avem $f(0) = 0$ și

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ x, & x \in (1, \infty) \end{cases}.$$

26. Să se arate că dacă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite o primitivă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există cel puțin un punct $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(c) = 2nc^{2n-1}$.

27. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe $\mathbb{R}$ și fie $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a ei. Demonstrați că dacă $f(x)\,F(x) > x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, atunci funcția F este nemărginită pe $\mathbb{R}$.

28. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive și care îndeplinesc condiția

$f(x)\,F(1 - x) = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $F \in \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

29. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive și care îndeplinesc condițiile:

$f(0) = 0$ și $F(x) + f(x) = \sin x,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ F \in \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

30. Să se arate că dacă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$, atunci funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x f(x)$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

31. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă.
Atunci f admite primitive $\Leftrightarrow$ f continuă.

32. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Există funcții $f: I \to \mathbb{R}$ care admit primitive pe I astfel încât $f \circ f = -1_I$?

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x + \sin x, & x \geq 0 \\ |x-1|, & x < 0 \end{cases}$, admite primitive și să se determine o primitivă a sa.

2. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{3x + 1\}$, nu admite primitive.

3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive.

4. Să se calculeze $\int \left(2^x + \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \mathrm{d}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$.

Barem: 1p oficiu; **1.** 3p. **2.** 2p. **3.** 1p. **4.** 3p.
Timp de lucru: 45 de minute

Testul 2

1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(2x^2 - x - 2007)$, nu admite primitive.

2. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x \cos x + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, admite primitive.

3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x^2}, & x > 0 \end{cases}$, admite primitive și să se calculeze o primitivă a sa.

4. Să se calculeze $\int \left(\operatorname{tg} x + \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \right) \mathrm{d}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$.

Barem: 1p oficiu; **1.** 3p. **2**. 1p. **3.** 2p. **4.** 3p.
Timp de lucru: 50 de minute

Testul 3

1. Fie funcțiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$, $F(x) = (x-2)e^x + e$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{F(x)}{(x-1)^2}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{xe^x}$.

2. Să se calculeze primitivele funcțiilor $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2+9}$, $x \in (0, \infty)$, $g(x) = \sin 2x + e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nu admite admite primitive.

4. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ admite primitive și să se calculeze o primitivă a sa.

Barem: 1p din oficiu. **1.** 2p. **2.** 3p. **3.** 2p. **4.** 2p.
Timp de lucru: 50 de minute

Testul 4

1. Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, I interval, cu proprietatea că f admite primitive, iar g derivabilă și cu derivata continuă. Atunci gf admite primitive.

2. Să se calculeze primitivele funcțiilor $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} + \dfrac{1}{x+2}$, $x \in (0, \infty)$,

$g(x) = \dfrac{1}{\cos^2 3x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ nu admite primitive.

4. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x < 0 \\ \sin x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ admite primitive și să se calculeze o primitivă a sa.

Barem: 1p din oficiu. **1.** 2p. **2.** 3p. **3.** 2p. **4.** 2p.
Timp de lucru: 50 de minute

Integrala definită

5.1. Diviziuni

DEFINIŢIE

Fie $[a, b]$ un interval închis și mărginit din $\mathbb{R}$. Se numește **diviziune** a intervalului $[a, b]$ un sistem de puncte $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ din $[a\ b]$ astfel încât $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Cea mai mare dintre lungimile intervalelor $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,..., $[x_{n-1}, x_n]$ se numește **norma** diviziunii Δ și se notează: $\|\Delta\|$.

Astfel, putem scrie $\|\Delta\| = \max\limits_{1\le i\le n} (x_i - x_{i-1})$.

Exemple

1. Sistemul de puncte $\Delta_1 = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right)$ este o diviziune a intervalului $[1, 2]$ cu $\|\Delta_1\| = \frac{1}{2}$.

2. Sistemul de puncte $\Delta_2 = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ este o diviziune a intervalului $[0, 1]$ cu $\|\Delta_1\| = \frac{2}{5}$.

5.2. Funcţii integrabile

DEFINIŢIE

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție, $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și un sistem de n puncte $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ astfel încât $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $1 \le i \le n$, numit **sistem de puncte intermediare.**

Numărul real $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ se numește **suma Riemann** asociată funcției f, diviziunii Δ și punctelor intermediare $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

Acest număr va fi notat prin $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$ sau $\sigma_\Delta(f, \xi)$.

Exemplu

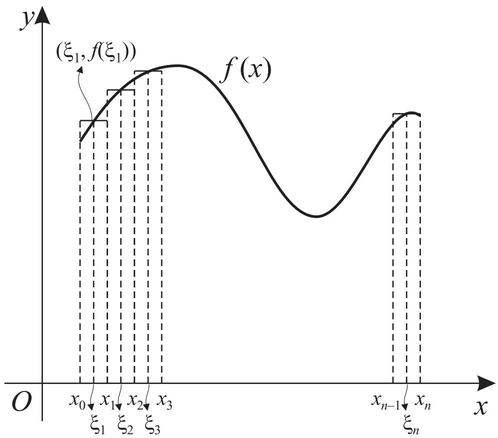
Să calculăm suma Riemann asociată functiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, diviziunii $\Delta = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right)$ și punctelor intermediare $\xi_1 = \frac{1}{3}$, $\xi_2 = \frac{1}{2}$, $\xi_3 = \frac{3}{4}$.

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{41}{144}.$$

OBSERVAŢIE

În cazul în care funcția f este pozitivă, suma Riemann $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $x_i - x_{i-1}$ și de înălțime $f(\xi_i)$, $(1 \le i \le n)$.

Deci $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$ aproximează aria mulțimii din plan, numită **subgraficul** lui f, $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$, delimitată de axa Ox, graficul funcției f și dreptele paralele la axa Oy care trec prin punctele de coordonate $(a, 0)$, respectiv $(b, 0)$.



O problemă care conduce la noţiunea de integrală

Să considerăm o bară materială rectilinie, aşezată de-a lungul axei Ox. Fie a şi b abscisele extremităţilor barei.

Cunoaştem densitatea liniară $f(x)$ a barei în fiecare punct $x \in [a, b]$, şi că f este o funcţie continuă.

Dacă densitatea este constantă, $f(x) = \rho$, adică bara este omogenă, masa sa este egală cu produsul dintre densitate şi lungime, $\rho(b-a)$.

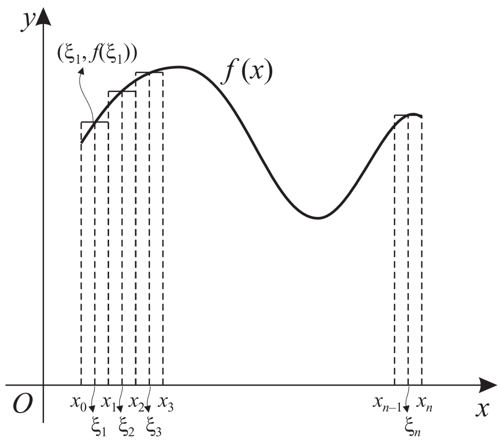
În cazul în care densitatea nu este constantă, procedăm în felul următor: împărţim bara în mai multe părţi; aceasta revine la a considera o diviziune Δ a intervalului $[a, b]$: $\Delta = (a = x_0, x_1, \ldots x_n = b)$.

În fiecare interval parţial $[x_i, x_{i+1}]$, alegem un punct intermediar ξ_i, şi considerăm că pe acest interval, bara este omogenă şi că densitatea este $f(\xi_i)$ în punctul ξ_i ales. Masa porţiunii din bara cuprinsă între x_i şi x_{i+1}, considerată omogenă, cu densitatea $f(\xi_i)$, este $f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$.

Masele aproximative ale porţiunilor din bară cuprinse între diferitele puncte ale diviziunii sunt $f(\xi_0)(x_1-x_0), f(\xi_1)(x_2-x_1), \ldots, f(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1})$.

Masa totală a barei, calculată cu aproximaţia corespunzătoare diviziunii Δ şi alegerii punctelor intermediare ξ_i, este $m_\Delta = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right)(x_{i+1}-x_i)$.

Există o eroare datorată faptului că pe fiecare interval parţial am considerat densitatea constantă. Intuim că dacă intervalele sunt din ce în ce mai mici, atunci densitatea variază mai puţin în fiecare interval şi deci eroarea este din ce în ce mai mică.



Suntem astfel conduşi să considerăm un şir $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ de diviziuni, cu norma din ce în ce mai mică. Dacă sirul maselor aproximative $\left(m_{\Delta_n}\right)_{n\geq 1}$ are o limită m, atunci în mod natural vom considera că m este masa totală a barei.

DEFINIŢIE

O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte **integrabilă Riemann** (sau, simplu, integrabilă) dacă există un număr real I_f cu proprietatea:

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1,..., x_n)$ a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ și orice puncte intermediare $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $(1 \le i \le n)$ are loc inegalitatea $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_f| < \varepsilon$.

Numărul real I_f se numeşte **integrala** sau **integrala definită** a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ şi se notează $\int_a^b f(x)\,dx$.

OBSERVAŢIE

Integrala definită a unei funcţii f este un număr real, iar integrala nedefinită a lui f este mulţimea tuturor primitivelor lui f.

DEFINIŢIE

Dacă funcţia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci definim

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ şi } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

PROPOZIŢIE

Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă, atunci numărul I_f asociat funcţiei f este unic determinat de f.

Demonstraţie Presupunem că există două numere I_1 şi I_2 care verifică toate condiţiile din definiţia integrabilităţii. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_{k,\varepsilon} > 0$, $(k = 1, 2)$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, ... , x_n)$ a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_{k,\varepsilon}$ şi orice puncte intermediare $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $(1 \le i \le n)$ să avem $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_k| < \varepsilon$, $(k = 1, 2)$.

Vom considera $\eta_k = \min(\eta_{1,k}, \eta_{2,k})$ rezultă că pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ şi orice sistem de puncte intermediare asociat lui Δ,

avem $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$$|I_1 - I_2| < |I_1 - \sigma_\Delta(f, \xi) + |\sigma_\Delta(f, \xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este oarecare, rezultă $I_1 = I_2$.

Exemple

1. Funcția constantă $f: [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ este integrabilă și

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$

Într-adevăr, oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a lui $[a, b]$ și oricare ar fi punctele intermediare $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $(1 \le i \le n)$, avem $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$= c(x_n - x_0) = c(b-a)$.

Deci, în cazul în care $I = c(b-a)$, avem $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| = 0 < \varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$.

Prin urmare f este integrabilă si $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

2. Funcția lui Dirichlet, $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nu este integrabilă.

Vom considera o diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a intervalului $[0, 1]$ și fie $\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$ două sisteme de puncte intermediare alese astfel încât $\xi_i' \in \mathbb{Q}$, $\xi_i'' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(1 \le i \le n)$.

Atunci $g(\xi_i') = 1$ și $g(\xi_i'') = 0$, $(1 \le i \le n)$, deci $\sigma_\Delta(f, \xi') = 1$, $\sigma_\Delta(f, \xi'') = 0$.
Presupunând că g este integrabilă, atunci exstă $I \in \mathbb{R}$ care verifică toate condițiile din definiția funcțiilor integrabile.

Obținem, astfel, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existența unui număr strict pozitiv η astfel încât pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a lui $[0, 1]$, cu $\|\Delta\| < \eta$ avem

$|\sigma_\Delta(f, \xi') - I| < \frac{1}{2}$ și $|\sigma_\Delta(f, \xi'') - I| < \frac{1}{2}$.

Putem scrie $1 = |1 - I + I| \le |1 - I| + |I| = \|\sigma_\Delta(f, \xi') - I| + |\sigma_\Delta(f, \xi'') - I| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Fals.
Așadar funcția g nu este integrabilă.

OBSERVAŢIE

Imaginea funcției g este mulțimea $\{0, 1\}$, care nu este interval și deci g nu are proprietatea Darboux.

Prin urmare, funcția g este exemplu de funcție care nu admite primitive și nu este integrabilă.

5.3. Proprietăţi ale integralei definite

TEOREMĂ

Orice funcție integrabilă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită.

Demonstraţie Într-adevăr, cum f este integrabilă, vom nota cu I integrala ei definită pe $[a, b]$ și va rezulta că pentru $\varepsilon = 1$ există $\eta > 0$ astfel încât $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < 1$ oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1,..., x_n)$ cu $\|\Delta\| < \eta$ și oricare ar fi punctele intermediare $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$.

Considerând o diviziune fixată $\Delta = (x_0, x_1,..., x_n)$ cu $\|\Delta\| < \eta$, este suficient să arătăm că f este mărginită pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ al diviziunii Δ.

Fie un element arbitrar $x \in [x_{i-1}, x_i]$ și luăm sistemul de puncte intermediare astfel $\xi_i = \begin{cases} x_i, i \ne k \\ x, i = k \end{cases}$.

Atunci $\left| f(x)\left(x_k - x_{k-1}\right) + \sum\limits_{i \ne k} f(x_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) - I \right| < 1$, deci

$I - 1 < f(x)(x_k - x_{k-1}) + \sum\limits_{i \ne k} f(x_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) < I + 1 \Leftrightarrow |f(x)| < \alpha_k$,

unde $\alpha_k = \dfrac{1}{x_k - x_{k-1}}\left(1 + |I| + \sum\limits_{i \ne k} |f(x_i)||x_i - x_{i-1}|\right)$, adică $f(x)$ este mărginit pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$. Cum f este mărginită pe fiecare interval al diviziunii, deducem că este mărginită pe intervalul $[a, b]$.

OBSERVAŢIE

Dacă o funcție f este nemărginită, atunci f nu este integrabilă.

Exemplu

Funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

este o funcție nemărginită, deci nu este integrabilă.

Într-adevăr, dacă vom considera șirul $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}}$, $n \in \mathbb{N}$, șir care tinde la 0, vom observa că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = \infty$.

Observăm că funcția $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este o primitivă a funcției f. Așadar funcția f este exemplu de funcție care admite primitive și care nu este integrabilă.

Enunțăm fără justificare următoarea:

TEOREMĂ

Fie f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

a) g este integrabilă;

b) există o mulțime finită $A \subset [a, b]$ astfel încât $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a, b] \setminus A$.

Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

TEOREMĂ

O funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă dacă și numai dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi șirul de diviziuni $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și oricare ar fi punctele intermediare $x_{i-1}^n \le \xi_i^n \le x_i^n$, $(1 \le i \le k_n, n \in \mathbb{N})$ șirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la I.

Demonstrație *Implicația directă*. Presupunem că funcția f este integrabilă.

Fie $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și fie $\xi_i^n \in \left[x_{i-1}^n, x_i^n\right]$ $(1 \le i \le k_n)$ puncte intermediare.

Din definiția funcției integrabile obținem existența unui număr real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există η_ε astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ și oricare ar fi punctele intermediare ξ_i are loc inegalitatea $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ rezultă că există $n_{\eta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|\Delta_n\| < \eta_\varepsilon$, $\forall\, n \ge n_{\eta_\varepsilon}$, deci $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \varepsilon$, $\forall\, n \ge n_{\eta_\varepsilon}$, adică șirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la I.

Implicația reciprocă. Presupunem că există un număr real I astfel încât oricare ar fi șirul de diviziuni $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și oricare ar fi punctele intermediare $x_{i-1}^n \le \xi_i^n \le x_i^n$, $(1 \le i \le k_n, n \in \mathbb{N})$, șirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la I.

Dacă numărul real I n-ar fi integrala lui f, atunci ar exista $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât oricare ar fi $\eta > 0$ există o diviziune $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta_n\| < \eta$ și există punctele intermediare $x_{i-1}^n \le \xi_i^n \le x_i^n$, $(1 \le i \le k_n)$ astfel încât $|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) - I| \ge \varepsilon_0$.

În particular, pentru $\eta = \dfrac{1}{n}$, obținem o diviziune $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta_n\| < \dfrac{1}{n}$ și un sistem de puncte intermediare $x_{i-1}^n \le \xi_i^n \le x_i^n$, $(1 \le i \le k_n, n \in \mathbb{N})$ astfel încât $|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) - I| \ge \varepsilon_0$.
Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și că șirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi))_{n\in \mathbb{N}}$ nu converge la I, ceea ce contravine ipotezei.

OBSERVAŢIE

Dacă funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă atunci integrala lui f se obține astfel: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, \xi^n\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, iar limita este independentă de alegerea sirului de diviziuni $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și de punctele intermediare asociate diviziunilor.

TEOREMĂ (Formula Leibniz-Newton)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Demonstrație Fie $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a\ b]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

Din teorema lui Lagrange aplicată funcției F pe intervalul $\left[x_{i-1}^n, x_i^n\right]$, obținem

$\xi_i^n \in \left(x_{i-1}^n, x_i^n\right)$ cu proprietatea $F\left(x_i^n\right) - F\left(x_{i-1}^n\right) = F'\left(\xi_i^n\right)\left(x_{i-1}^n - x_i^n\right)$.

Cum funcția F este o primitivă a funcției f, putem scrie

$F\left(x_i^n\right) - F\left(x_{i-1}^n\right) = f'\left(\xi_i^n\right)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right)$.

Așadar $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^n\right)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right) = \sum_{i=1}^{k_n}\left(F\left(x_i^n\right) - F\left(x_{i-1}^n\right)\right) =$

$= F(b) - F(a), \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = F(b) - F(a)$.

OBSERVAȚIE

Vom folosi notația $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ și vom citi „$F(x)$ luat intre a și b“.

Exemple

1. Integrala definită a funcției $f : [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = 3$ este $\int_1^2 3\mathrm{d}x = 3x\Big|_1^2 = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 3$.

2. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{2}$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

TEOREMĂ

Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcții integrabile, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este integrabilă și $\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Demonstrație (Facultativ)

Fie $\Delta_n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n\right)$ un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\lim_{n\to\infty}\left\|\Delta_n\right\| = 0$ și fie punctele intermediare $x_{i-1}^n \le \xi_i^n \le x_i^n$, $(1 \le i \le k_n, n \in \mathbb{N})$.

Avem $\sigma_{\Delta_n}\left(\alpha f+\beta g,\, \xi^n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha f\left(\xi_i^{\,n}\right)+\beta g\left(\xi_i^{\,n}\right)\right)\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)=$

$= \alpha\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^{\,n}\right)\left(x_i^{\,n}-x_{i-1}^{\,n}\right) = \beta\sum_{i=1}^{n} g\left(\xi_i^{\,n}\right)\left(x_i^{\,n}-x_{i-1}^{\,n}\right)=$

$= \alpha\sigma_{\Delta_n}\left(f,\, \xi^n\right)+\beta\sigma_{\Delta_n}\left(g,\, \xi^n\right)$

Cum funcțiile f și g sunt integrabile, rezultă că șirul $\sigma_{\Delta_n}\left(\alpha f+\beta g,\, \xi^n\right)$ converge la $\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, deci funcția $\alpha f+\beta g$ este integrabilă și $\int_a^b\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

TEOREMĂ

Dacă o funcție $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă și pozitivă, atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge 0.$$

Demonstrație Fie $\Delta_n=\left(x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\right)$ un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ și fie punctele intermediare $x_{i-1}^n\le\xi_i^n\le x_i^n$, $(1\le i\le k_n,\, n\in\mathbb{N})$. Cum f este o funcție pozitivă avem $\sigma_{\Delta_n}\left(f,\, \xi^n\right)=\sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{\,n}\right)\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)\ge 0$ deci

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)\ge 0.$

TEOREMĂ

Dacă două funcții $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ sunt integrabile astfel încât $f(x)\le g(x)$, $\forall\, x\in[a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Demonstrație (Facultativ) Din ipoteză, funcția $g-f$ este o funcție nenegativă; aplicând punctual a) obținem

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x\ge 0\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

CONSECINȚĂ

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă și $m \le f(x) \le M$, $\forall\, x \in [a, b]$, atunci

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

Exemple

1. Fără a calcula, să comparăm integralele $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ și $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,\mathrm{d}x$,

Cum $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avem $\sin x \in [0, 1]$ și deci $\sin^{n+1} x \le \sin^n x$, iar de aici avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

2. Fără a calcula efectiv integrala, să arătăm că $\frac{1}{3} \le \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}\,\mathrm{d}x \le 1$.

Funcția $f: [4, 7] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ este derivabilă și $f'(x) = \frac{8}{(x+5)^2} > 0$.

Rezultă că f este strict crescătoare, deci $\frac{1}{9} = f(4) \le f(x) \le f(7) = \frac{1}{3}$, $\forall\, x \in [4, 7]$.

Aplicăm consecința de mai sus și avem $\frac{1}{9}(7-4) \le \int_4^7 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{3}(7-4)$ și de aici concluzia dorită.

În continuarea prezentăm, fără demonstrație, câteva rezultate importante:

TEOREMĂ

Funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă dacă și numai dacă $(\exists)\, c \in (a, b)$ astfel încât restricțiile funcției f la $[a, c]$ și la $[c, b]$ sunt integrabile. În acest caz:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

TEOREMĂ (de ereditate)

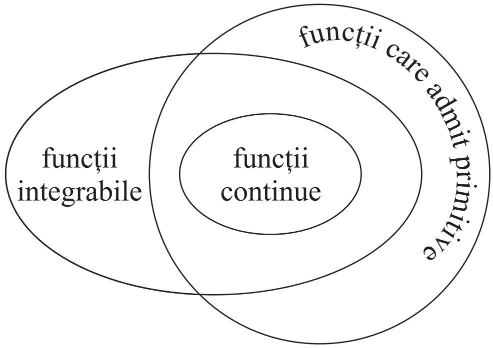
Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă și $[c, d] \subset [a, b]$, atunci f este integrabilă pe $[c, d]$.

TEOREMĂ

Orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă.

OBSERVAȚIE

Ținând cont de exemplele și contraexemplele de până acum, putem face următoarea schiță:



Exerciții rezolvate

1. Să se arate că funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Rezolvare

Evident, $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in [0,1) \\ x-1, & x \in [1, 2] \end{cases}$. Întrucât restricția funcției la $[1, 2]$ este funcție continuă, rezultă că această restricție este integrabilă.

În continuare $f|_{[0,1]}(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, iar funcția $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 1$ este continuă și deci integrabilă, astfel și $f|_{[0,1]}$ este integrabilă și $\int_0^1 f|_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 g(x)\,dx$. În concluzie, dacă cele două restricții ale funcției f sunt integrabile, rezultă că f este integrabilă, iar

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^2 = 1.$$

2. Să se calculeze $I(a) = \int_{-2}^{1} |x - a|\,\mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}.$

Rezolvare

a. Dacă $a \in (-\infty, -2)$, atunci $I(a) = \int_{-2}^{1} (x - a)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2} + a;$

b. Dacă $a \in [-2, 1]$,atunci $I(a) = \int_{-2}^{a} (a - x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{1} (x - a)\,\mathrm{d}x = a^2 + a + \frac{5}{2};$

c. Dacă $a \in (1, \infty)$, atunci $I(a) = \int_{-2}^{1} (a - x)\,\mathrm{d}x = 3a + \frac{3}{2}.$

3. Arătați că următoarele funcții nu sunt integrabile:

a) $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$

b) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$

Rezolvare

a) Presupunem că funcția f este integrabilă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Fie $\Delta_n = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)})$ o diviziune a intervalului $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ cu $\lim\limits_{x\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$, iar

$x_{i-1}^{(n)} \le \xi_i^{(n)} \le x_i^{(n)}$, $1 \le i \le k_n$, $\xi_i^{(n)} \in \mathbb{Q}$ și $x_{i-1}^{(n)} \le \zeta_i^{(n)} \le x_i^{(n)}$, $1 \le i \le k_n$, $\zeta_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ două sisteme de puncte intermediare asociate diviziunii Δ_n.
Din faptul că f este integrabilă rezultă că orice șir de sume Riemann asociat șirului de diviziuni Δ_n, funcției f și unui sistem de puncte intermediare este convergent.

În particular, $\sigma_{\Delta n}(f, \xi) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} \xi_i^n (x_i^n - x_{i-1}^n) \to \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$

respectiv, $\sigma_{\Delta n}(f, \zeta) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\zeta_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} (1 - \zeta_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) \to \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$

Considerăm, mai departe, funcțiile $g, h : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $h(x) = 1 - x$, care sunt continue, deci integrabile.

Astfel, șirurile associate diviziunii Δ_n, funcțiilor g și h și sistemelor de puncte intermediare ξ, ζ sunt convergente. Avem:

$$\sigma_{\Delta n}(g, \xi) = \sum_{i=1}^{k_n} g(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} \xi_i^n (x_i^n - x_{i-1}^n) \to$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$\sigma_{\Delta n}(h, \zeta) = \sum_{i=1}^{k_n} h(\zeta_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} (1 - \zeta_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) \to$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,\mathrm{d}x = \left.\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}.$$

Cum $\sigma_{\Delta_n}(f,\xi) = \sigma_{\Delta_n}(g,\xi)$ și $\sigma_{\Delta_n}(f,\zeta) = \sigma_{\Delta_n}(h,\zeta)$, obținem

$\sigma_{\Delta n}(f, \xi) \to \frac{1}{8}$ și $\sigma_{\Delta n}(f, \zeta) \to \frac{3}{8}$,

ceea ce înseamnă că șirul sumelor Riemann asociat șirurilor de diviziuni ce au norma care tinde la 0, funcției f și sistemelor de puncte intermediare nu este convergent, adică f nu este integrabilă.

b) Presupunem că f este integrabilă pe $[0, 1]$, de unde rezultă, conform teoremei de ereditate, că f este integrabilă și pe intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, însă ținând cont de punctul a) obținem că funcția f nu este integrabilă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, contradicție cu presupunerea făcută.

OBSERVAȚIE

Încercați să rezolvați punctul b) după modelul dat la punctul a).
Ce observați?

4. a) Arătați că $e^x \geq x + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare

a) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$, funcție care este derivabilă și $f'(x) = e^x - 1$. Cum f' este negativă pe $(-\infty, 0)$ și pozitivă pe$(0, \infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Funcția f are un minim în $x_0 = 0$ care este egal cu 0. Astfel $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Conform punctului a), avem $e^{x^2} \geq 1 + x^2 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$.

De aici deducem că $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Pe de altă parte, $e^{-x^2} \geq e^{-1}$, $\forall\, x \in [0, 1]$ și mai departe $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq e^{-1}$.

5. Fie șirul $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}$, $n \geq 1$.

a) Arătați că $(I_n)_{n \geq 1}$ este mărginit și monoton;
b) Determinați o relație de recurență pentru calculul lui I_n;
c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Rezolvare

a) Cum $x^n \geq x^{n+1}$, $\forall\, x \in [0, 1]$, rezultă că $\dfrac{x^n}{1+x+x^2} \geq \dfrac{x^{n+1}}{1+x+x^2}$ și mai departe

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\text{, adică } I_n \geq I_{n+1},\ \forall\, n \geq 1.$$

$$0 \leq I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} < 1\text{, deoarece}$$

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n,\ \forall\, x \in [0, 1].$$

b) $$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1} + x^{n-2}}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^{n-1} + x^{n-2}}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^{n-2}\,\mathrm{d}x - I_{n-1} - I_{n-2} = \frac{x^{n-1}}{n-1}\Bigg|_0^1 - I_{n-1} - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-1} - I_{n-2}.$$

c) Din punctul a) avem $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\, n \geq 1$; folosind criteriul „cleștelui“ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Exerciții propuse

1. Determinați norma diviziunii Δ a intervalului [0, 1] dacă :

a) $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$; b) $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{2^4}, \dfrac{1}{2^3}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$;

c) $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}, ..., \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$; d) $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n-2}{n}, \dfrac{n-1}{n}, 1\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Să se calculeze suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare ξ, dacă :

a) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$; $\Delta = \left(-1 \dfrac{-1}{2}, 0, \dfrac{3}{4}, 1\right)$, $\xi = \left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$;

b) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$; $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$, $\xi = \left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{10}, \dfrac{6}{10}\right)$;

c) $f: \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$, $\Delta = \left(0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \pi\right)$, $\xi = \left(0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \pi\right)$;

d) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in (1, 2] \end{cases}$; $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{3}{2}, 2\right)$, $\xi = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{3}, 2\right)$.

e) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ x, & x \in (1, 2] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$; $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right)$, $\xi = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se calculeze suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare ξ dacă :

a) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n-1}{n}, 1\right)$, $\xi = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n-1}{n}\right)$;

b) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta = \left(0, \left(\dfrac{1}{n}\right)^2, \left(\dfrac{2}{n}\right)^2, ..., \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$,

$\xi = \left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^2, \left(\dfrac{2}{n}\right)^2, ..., \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2, 1\right)$.

c) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$, $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n-1}{n}, 1\right)$,

$\xi = \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{3}{2n}, ..., \dfrac{2n-1}{2n}\right)$;

d) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 1, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $\Delta=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\right)$,

$\xi=\left(\frac{1}{2n},\frac{3}{2n},\dots,\frac{2n-1}{2n}\right)$.

4. Să se arate că următoarele funcții sunt integrabile și nu admit primitive:

a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0,1]\\ x+2, & x\in(1,2]\end{cases}$; b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[-1,0]\\ x\ln x, & x\in(0,1]\end{cases}$.

5. Să se arate că funcția $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x\in(1,3]\\ 2, & x=1\end{cases}$ nu este integrabilă pe intervalul $[1,3]$.

6. Să se arate că funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$ nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

7. Să se arate că funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$ admite primitive și nu este integrabilă Riemann.

8. Folosind teorema Leibniz-Newton să se calculeze următoarele integrale definite:

a) $\int_1^2 x\,dx$; b) $\int_0^1 x^2\,dx$; c) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; d) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$; e) $\int_0^1 e^x\,dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; g) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$;

h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; i) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; j) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$; l) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$; m) $\int_0^1 2^x\,dx$;

n) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$; o) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$; p) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$; r) $\int_2^3 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$; q) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$;

s) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$; t) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$; u) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x\,dx$; v) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

9. Determinați numărul real a astfel încât $\int_a^{a+1} (x^2+4)\mathrm{d}x = \frac{25}{2}$.

10. Determinați $a \in [2, 3]$ astfel încât $\int_0^a \cos\left(x+a^2\right)\mathrm{d}x = \sin a$.

11. Să se arate că funcția $f: [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$ este integrabilă Riemann pe $[0, 2]$ și $\int_0^2 f(x)\, \mathrm{d}x = 1$

12. Să se arate că funcția $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0, 1) \\ \sin x, & x \in [1, \pi] \end{cases}$ este integrabilă Riemann pe $[0, \pi]$ și $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = e + \cos 1$.

13. Să se arate că funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ x, & x \in [0, 1] \end{cases}$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

14. Să se arate că funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1) \\ 10, & x = 1 \end{cases}$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

15. Să se arate că funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

16. Să se arate că funcția $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

17. Să se arate că funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 4x^3$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

18. Să se arate că funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = 2\cos x - 4\sin x$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

19. Să se arate că funcția $f: [-2, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$, este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

20. Să se arate că funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = |\sin x|$ este integrabilă Riemann și să se calculeze $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

21. Să se calculeze:

a) $\int_0^3 |x+1|\,\mathrm{d}x$; b) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+|x^2-1|}\,\mathrm{d}x$; c) $\int_{-1}^{1} \min\{x, x^2\}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^{2\pi} \left(|\sin x| + |\cos x|\right)\mathrm{d}x$; e) $\int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x$; f) $\int_{-1}^{1} \frac{x+[x]}{|x|+[x]+2}\,\mathrm{d}x$.

***

22. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ și $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Să se arate că dacă pentru orice interval deschis $(c, d) \subset [a, b]$ există cel puțin un punct $\xi \in (c, d)$ astfel încât $f(\xi) = e^{\xi}$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = e^b - e^a$.

23. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ și $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe $[a, b]$ astfel încât $f(x) = 1, \forall\, x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Să se arate că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$.

24. Să se arate că :

a) $2\sqrt{2} \le \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+4x+5}\,dx \le 2\sqrt{10}$; b) $e \le \int_{1}^{2} e^{x^2}\,dx \le e^4$;

c) $e^2(e-1) \le \int_{e}^{e^2} \frac{x}{\ln x}\,dx \le \frac{e^3}{2}(e-1)$.

25. Să se arate că:

a) $\int_{1}^{2} e^x\,dx \le \int_{1}^{2} (1+x)^{x+1}\,dx$; b) $\int_{0}^{1} \ln(x+1)\,dx \ge \int_{0}^{1} \frac{x}{x+1}\,dx$;

c) $\int_{0}^{1} \ln\left(x^2+1\right)dx \le \int_{0}^{1} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

26. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$.

27. Determinați toate funcțiile polinomiale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că

$\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

28. Dacă funcția continuă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ are proprietatea că $\int_{a}^{b} f(x)\,dx > 0$, atunci rezultă că

$f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$? Analizați ce se întâmplă pentru funcția $f(x) = 2x^2 - x, \forall x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

29 Să se arate că funcțiile următoare nu sunt integrabile și nu admit primitive:

a) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) \le \ln x, \forall x \in (0, 1]$;

b) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) \ge \frac{1}{x} \forall x \in (0, 1]$.

30. Fie șirul $I_n = \int_{0}^{1} \frac{x^n}{2x+3}\,dx$.

a) Arătați că $(I_n)_{n\ge1}$ este mărginit și monoton.

b) Determinați o relație de recurență pentru calculul lui I_n.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se arate că funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x + [x]}{|x| + [x]}$ este integrabilă și să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Să se arate că $1 \le \displaystyle\int_{0}^{1} e^{x^2}\,\mathrm{d}x \le e - 1$.

3. Fie funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^x, & x \in (0, 1] \end{cases}$.

a) să se arate că funcția f nu admite primitive;
b) să se arate că funcția este integrabilă;
c) să se calculeze $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Barem: 1p din oficiu; **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 2

1. Să se arate că funcția $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = |x| \cdot [x]$ este integrabilă și să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Să se arate că $\ln\dfrac{3}{4} \le \displaystyle\int_{0}^{1} \ln\left(x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x < 0$.

3. Fie funcția $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0, 1) \\ \sin x, & x \in [1, \pi] \end{cases}$.

a) să se arate că funcția f nu admite primitive;
b) să se arate că funcția este integrabilă;
c) să se calculeze $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Barem: 1p din oficiu; **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 3

1. Să se arate că funcția $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \max(\sin x, \cos x)$ este integrabilă și să se calculeze integrala sa.

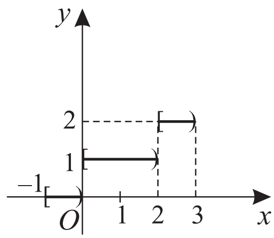
2. Determinați numerele naturale distincte $p, q \geq 2, p + q = 7$, astfel încât

$$\int_{\frac{p}{q}}^{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\frac{q-1}{p-1}.$$

3. Să se arate că dacă $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a < b$, atunci $\cos a - \cos b < \frac{b^2 - a^2}{2} < \ln\frac{\cos a}{\cos b}$.

4. Să se arate că funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este integrabilă și nu admite primitive și să se calculeze integrala sa.

5. a) Determinați domeniul de definiție al funcției care are graficul în figura alăturată.
b) Este funcția integrabilă?



Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p. **2.** 2p. **3.** 2p. **4.** 2p.
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 4

1. Să se arate că funcția $f: [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \min(x^2, x^3)$ este integrabilă și să se calculeze integrala sa.

2. Să se arate că există $x > 0$ astfel încât $\int_0^a \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} + 1$.

3. Să se arate că dacă $1 \leq a \leq b$, atunci $\frac{b^n - a^n}{n} < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

4. Să se arate că funcția $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este integrabilă și nu admite primitive și să se calculeze integrala sa.

Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p. **2.** 2p. **3.** 2p. **4.** 2p.
Timp de lucru: 50 minute.

Integrabilitatea funcţiilor continue

6.1. Câteva rezultate importante

TEOREMA DE MEDIE

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

Demonstraţie Funcția f este continuă pe $[a, b]$, este mărginită și își atinge marginile.

Dacă notăm $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ și $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, există $u, v \in [a, b]$ astfel încât $f(u) = m$ și $f(v) = M$.

Putem scrie $m \le f(x) \le M$, $\forall\, x \in [a, b]$; rezultă

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$, de unde

$$f(u) = m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M = f(v).$$

Cum f este continuă pe $[a, b]$, f are proprietatea Darboux pe $[a, b]$, adică există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interpretare geometrică

Dacă f este o funcție continuă și pozitivă pe $[a, b]$, există un punct $c \in [a, b]$ astfel încât subgraficul lui f are aceeași arie cu dreptunghiul de bază $b - a$ și înălțime $f(c)$.

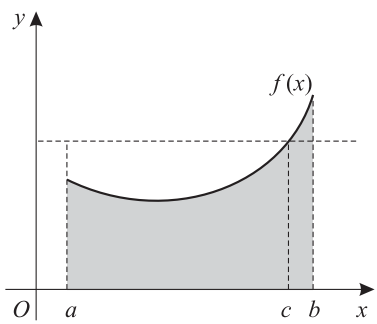


Fig. 1

OBSERVAŢIE

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă și

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(a) \text{ sau } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(b),$$

atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c).$$

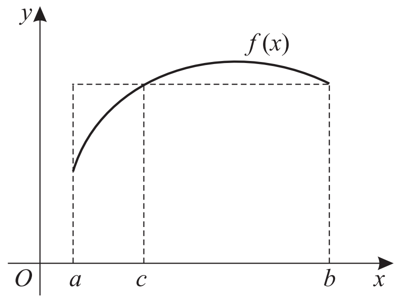


Fig. 2

TEOREMĂ

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă și pozitivă, iar $[c, d] \subseteq [a, b]$, atunci

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

Demonstraţie Întrucât f este continuă, deci integrabilă, și pozitivă rezultă

$$\int_a^c f(c)\,\mathrm{d}x \ge 0 \text{ și } \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

Mai departe avem:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_c^d f(x)\mathrm{d}x .$$

TEOREMĂ

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă și pozitivă, cu proprietatea că există $x_0 \in (a, b)$ astfel încât $f(x_0) > 0$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

Demonstraţie Funcția f fiind continuă, rezultă existența unui interval deschis I astfel încât $x_0 \in I \subset [a, b]$ și $f(x) > 0$, $\forall\, x \in I$.

Fie $[c, d] \subset I$ și $m = \inf\limits_{x \in [c,d]} f(x)$; cum f este continuă există $x_1 \in [c, d]$ astfel încât $m = f(x_1)$ și $m > 0$.

Aplicând teorema precedentă, obținem $0 < m(d-\mathrm{c}) \le \int_c^d f(x)dx \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

6.2. Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue

TEOREMĂ

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci funcția $F: [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ este o primitivă a lui f care se anulează în punctul a.

Demonstraţie Fie $x_0 \in [a, b]$ și $x \in [a, b]$ cu $x \neq x_0$.

Atunci $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t$.

Aplicând teorema de medie funcției f pe intervalul $[x_0, x]$ obținem c_x între x_0 și x astfel încât $\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(c_x)(x - x_0)$.

Din ultimele două relații putem deduce că $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c_x)$,

deci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} f(c_x) = f(x_0)$ (am ținut cont de faptul că f este continuă).

Pentru cazul în care $x_0 = a$ sau $x_0 = b$ se procedează asemănător.

Așadar funcția F este derivabilă pe $[a, b]$ și $F' = f$, adică F este o primitivă a funcției f și $F(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Pentru a determina toate primitivele unei funcții continue, primitive care se anulează în același punct dăm următoarea

TEOREMĂ

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f care se anulează într-un punct $x_0 \in [a, b]$. Atunci $g(x) = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$.

Demonstrație Din teorema anterioară, funcția $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ este o primitivă a lui f. Cum două primitive ale aceleiași funcții diferă printr-o constantă, rezultă că există $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)=g(x)+k$, $\forall\, x\in[a,b]$.
Dacă ținem cont că $g(x_0)=0$, obținem $k=F(x_0)$.

Așadar $g(x)=F(x)-k=F(x)-F(x_0)=\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int\limits_0^1 xf(x)\,dx>\dfrac{\pi}{4}$.

Să se arate că există un punct $c\in(0,1)$ astfel încât $c^3f(c)+cf(c)=1$.

Rezolvare

Fie $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)-\dfrac{1}{x^2+1}$. Proprietatea din ipoteză se poate scrie astfel:

$\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x>0$, atunci conform teoremei de medie, există un punct $a\in[0,1]$ încât $g(a)>0$. Cum g este continuă și $g(0)=-1<0$, rezultă că există $c\in(0,a)\subset[0,1]$ astfel încât $g(c)=0$, adică $cf(c)=\dfrac{1}{1+c^2}$.

2. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât

$\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=(b-c)f(c)$.

Rezolvare

Considerăm funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=(b-x)\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, funcție care este derivabilă.

Cum $F(a)=F(b)=0$, din teorema lui Rolle rezultă că există $c\in(a,b)$ astfel încât $F'(c)=0$, adică $(b-c)f(c)=\int\limits_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Să se calculeze limita șirului $a_n = \int_n^{n+1} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$, $n \geq 1$.

Rezolvare

Din teorema de medie rezultă existența unui $c_n \in [n, n+1]$ astfel încât

$\int_n^{n+1} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx = (n+1-n)\frac{\sqrt{c_n^{\,2}+2c_n}}{c_n}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

4. Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = 0$.

Rezolvare

Fie $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$, dat. Atunci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\varepsilon}{3}} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

Însă din $0 < \sin^n x < 1$ rezultă $0 < \int_0^{\frac{\varepsilon}{3}} \sin^n x\,dx < \frac{\varepsilon}{3}$.

Aplicăm teorema de medie pe intervalul $\left[\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}\right]$ funcției continue

$f(x) = \sin x$ și obținem existența unui număr $c \in \left[\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}\right]$ astfel încât

$$\int_{\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}} \sin^n x\,dx = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\sin^n c.$$

Cum funcția $\sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și avem

$$\int_{\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}} \sin^n x\,dx < \left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\cos^n\frac{\varepsilon}{3} < \frac{\pi}{2}\cos^n\frac{\varepsilon}{3}.$$

Din $0 < \sin^n x < 1$ avem $\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx < \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\varepsilon}{3}$.

Deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\varepsilon}{3}} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\pi}{2}\cos^n\frac{\varepsilon}{3}$.

Deoarece $0<\cos\frac{\varepsilon}{3}<1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{\varepsilon}{3}=0$; prin urmare, există rangul n_ε astfel încât pentru $n>n_\varepsilon$ să avem $\frac{\pi}{2}\cos^n\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3}$.

În concluzie, $0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x<\varepsilon,\ n>n_\varepsilon$, care ne conduce la $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$.

OBSERVAŢIE

În exercițiul anterior, deși condițiile teoremei de medie sunt îndeplinite, aplicarea sa pentru funcția $\sin x$ pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ nu conduce la rezolvarea problemei. De ce?

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^{\arcsin x} e^{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

a) Să se arate că funcția f este derivabilă pe $(0, 1)$;
b) Să se calculeze derivata funcției f.

Rezolvare

a) Funcția $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(t)=e^{\sin^2 t}$ este continuă, deci admite primitive.

Fie $G:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției g. Atunci G este derivabilă și

$G'(t)=e^{\sin^2 t},\ \forall\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Din continuitatea funcției g deducem că funcția este integrabilă pe $[0, \arcsin x]$, oricare $x\in(0, 1)$.

Conform teoremei Leibniz-Newton, avem $f(x)=G(\arcsin x)-G(0),\ \forall\ x\in(0, 1)$.

b) $f'(x)=G'(\arcsin x)(\arcsin x)'=e^{\sin^2(\arcsin x)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Să se arate că $\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4},\ \forall\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Rezolvare

Considerăm funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Observăm că funcția f este derivabilă și că din faptul că
$f(x) = F(\sin^2 x) - F(0) + G(\cos^2 x) - G(0)$ rezultă:

$f'(x) = 2 \sin x \cos x \arcsin \sqrt{\sin^2 x} - 2 \sin x \cos x \arccos \sqrt{\cos^2 x} =$
$= 2x\sin x \cos x - 2x \sin x \cos x = 0$

Deci funcția f este constantă și cum $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin \sqrt{t} + \arccos \sqrt{t})\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$

Rezultă că $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

7. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{t^2}}{\sin^2 x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+t^3}}$.

Rezolvare

a) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{t^2}$, fiind continuă, admite primitive.

Fie $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Atunci F este derivabilă și $F'(x) = e^{t^2}$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^{x^2} e^{t^2}\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to 0}\left(F\left(x^2\right) - F(0)\right) = 0$ și $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x = 0$; aplicând teorema

lui l'Hospital avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)'}{\left(\sin^2 x\right)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2xe^{x^4}}{2\sin x \cos x} = 1$. Deci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{t^2}}{\sin^2 x} = 1$.

b) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ putem aplica a doua regulă a lui l'Hospital, caz în care nu există o condiție restrictivă asupra numărătorului, din punct de vedere al limitei.

A calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+t^3}}$ este o acțiune relativ complicată; de aceea, ținând cont de cele spuse mai sus, trecem la aplicarea regulii lui l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}\right)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}} = 1, \text{ de aici } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+t^3}} = 1.$$

6. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.

Să se arate că are loc inegalitatea $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Rezolvare

Întrucât f este o funcție continuă, rezultă că $|f|$ este continuă.
Știm că $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|\ \forall\ x \in [a, b]$; rezultă

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \text{, adică } \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x .$$

7. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Rezolvare

Cum f este mărginită, există $k > 0$ astfel încât $|f(x)| \le k,\ \forall\ x \in [0, 1]$.

Atunci avem: $\left|\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 x^n\,|f(x)|\mathrm{d}x \le k\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \dfrac{k}{n+1}$.

8. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ (I interval) o funcție continuă.

Să se arate că $f = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \forall\ a, b \in I,\ a < b$.

Rezolvare

($\Leftarrow$) Presupunem că există $x_0 \in I, f(x_0) \ne 0$, de exemplu, $f(x_0) > 0$.

Atunci $f(x_0) > \dfrac{1}{2} f(x_0)$. Cum f este continuă, există $a, b \in I$ cu $x_0 \in [a, b] \subseteq I$ și

$f(x) > \dfrac{1}{2} f(x_0),\ \forall\ x \in [a, b]$ și avem $0 = \int_a^b f(x)dx \ge \dfrac{b-a}{2} f(x_0) > 0$, absurd.

Rămâne că $f(x_0) = 0$, în concluzie $f = 0$.

($\Rightarrow$) Este evident.

Exerciții propuse

1. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și injectivă pe $[a, b]$. Să se arate că există un singur punct $c \in [a, b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$.

2. Să se arate că dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă cu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, atunci $\exists\, x_0 \in (a, b)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

3. Fie $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(p+1)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Să se arate că există $c \in (0\ 1)$ astfel încât $f(c) = c^p$.

4. Fie funcția continuă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(a) < a$ și $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.
Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = c$.

5. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții continue pe $[a, b]$.
Să se arate că dacă funcția f este montonă, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x.$$

6. Fie $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$ o funcție continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Să se arate că funcția $F: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t}$ este strict crescătoare.

7. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\int_0^{\sin x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\mathrm{tg}\,x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}\int_0^x \sqrt{t}\sin t\,\mathrm{d}t$.

8. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f: [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \frac{t^2 - t}{t+2}\,\mathrm{d}t$.

9. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \left(t^2 - 3\right)e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

10. Să se determine funcțiile derivabile $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că

$$x + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = (x+1)f(x),\ \forall\, x > 0.$$

11. Să se determine funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac egalitatea

$$e^x f(x) - \int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t = 2x^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

***

12. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^5}\,\mathrm{d}x$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

13. Să se arate că dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci există $c \in (a, b)$ astfel

încât $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$.

14. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Să se arate că există cel puțin un punct $c \in [a, b]$ astfel încât $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = c\,f(c)$.

15. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu proprietatea că

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a) = f(b)$. Atunci există $x_0 \in (a, b)$ astfel încât $f''(x_0) = 0$.

16. Fie $f : (0, \infty) \to, f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$.

a) Să se arate că funcția f este derivabilă pe $(0, \infty)$.
b) Să se calculeze derivata funcției f.

17. Să se arate că $\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{1}{t\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t = 1,\ \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

18. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \left(t^2-3\right)e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

19. Fie $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, pozitivă și monoton crescătoare.

Arătați că funcția $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ 0 \le x \le a$, este crescătoare.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \left(t^2 - 3\right)e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} e^t \sin t\,\mathrm{d}t$.

3. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Să se arate că există un punct $a \in (0, 1)$ astfel încât $\frac{\sqrt{2}}{2} < f(a) < \frac{\sqrt{2}}{1+a}$.

Barem: 1p din oficiu; **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 2

1. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Să se arate că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f(c) = c^2$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}$.

3. Să se arate că $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Barem: 1p din oficiu; **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 3

1. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Să se arate că există un punct $c \in (0, 1)$ astfel încât $\frac{\sqrt{2}}{2} < f(a) < \frac{\sqrt{2}}{1+a}$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.
b) Să se calculeze derivata funcției f.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x t^{1+t}\mathrm{d}t$.

Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 4

1. Fie $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și crescătoare. Să se arate că pentru orice

$b \in (0, a)$ avem $a\int_0^b f(x)\mathrm{d}x \le b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$.

a) Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.
b) Să se calculeze derivata funcției f.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.
Timp de lucru: 50 minute.

Metode de calcul al integralelor

7.1. Metoda de integrare prin părţi

TEOREMĂ

Dacă $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcții derivabile, cu derivatele continue, atunci

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

Demonstraţie Cum f și g sunt funcții derivabile, rezultă că $f \cdot g$ este funcție derivabilă. Mai mult, $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$ și de aici putem spune că funcția produs fg este o primitivă a funcției $f'g + fg'$.

Aplicând formula Leibniz-Newton obținem:

$\int_a^b (f \cdot g)'(x)dx = (f \cdot g)(x)\Big|_a^b$ pe de-o parte, iar pe de altă parte

$$\int_a^b (f \cdot g)'(x)dx = \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx + \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx.$$

Din ultimele două relații rezultă concluzia.

Exemple

1. Să calculăm $\int_0^1 xe^x dx$.

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x\left(e^x\right)' dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x x' dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$$

2. Să calculăm $\int_1^2 x \ln x dx$.

$$\int_1^2 x \ln x dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4}.$$

3. Vom calcula $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Funcția $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \arcsin x$ nu este derivabilă în $x_0 = 1$, de aceea nu putem aplica direct metoda integrării prin părți.
Vom proceda după cum urmează:

Considerăm funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(t) = \int_0^t \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, funcție care este derivabilă (deci continuă) și avem $f(1) = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} f(t)$.

Ținând cont că $[0, t] \subset [0, 1)$ integrăm prin părți:

$$\int_0^t \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^t x'\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^t - \int_0^t x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} - \int_0^t \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = t\sqrt{1-t^2} - \int_0^t \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \arcsin x\Big|_0^t =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} - \int_0^t \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \arcsin\text{; de aici } \int_0^t \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right).$$

În final, $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \int_0^t \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right) = \frac{\pi}{4}$.

4. Să calculăm $\int_1^4 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Încercăm mai întâi astfel

$$\int_1^4 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 x'\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}\Big|_1^4 - \int_1^4 x\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Observăm că am ajuns la calculul unei integrale mai complicate.
Este foarte important ca părțile pe care le alegem să ne conducă la calculul unei integrale mai simple, astfel

$$\int_1^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (x+1)'\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}\Big|_1^3 - \int_1^3 (x+1)\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= 4\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 2\operatorname{arctg}1 - \int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{4} - \sqrt{x}\Big|_1^3 = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1.$$

5. Vom stabili o relație de recurență pentru $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n-1} x \mathrm{d}x =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos x \mathrm{d}x =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

În final, $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$.

7.2. Metoda schimbării de variabilă

TEOREMĂ

Fie $\varphi: [a, b] \to J, f: J \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

a) f este continuă pe J;

b) φ este derivabilă, cu derivata continuă pe $[a, b]$.

Atunci $$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație Funcția f fiind continuă, admite primitive. Dacă $F \in \int f(x)\,\mathrm{d}x$, atunci

$F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in J$ și avem $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. (*)

Folosind formula de derivare a funcțiilor compuse putem scrie
$(F \circ \varphi)'_{(t)} = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)$, $\forall\, t \in [a, b]$.

Aplicând formula Leibniz-Newton obținem:

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) \overset{(*)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Rezultatul obținut este cunoscut sub numele de ***prima formulă (metodă) de schimbare de variabilă.***

Exemple

1. Să calculăm $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Rezolvare

Prezența funcției *cos* la numărător ne sugerează alegerea $\varphi'(x) = \cos x$ și deci $\varphi(x) = \sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Atunci $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{1+\varphi^2(x)}\varphi'(x)$. Cu notațiile din teoremă, avem $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

și atunci $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

2. Să calculăm $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Rezolvare

Considerăm $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in [1, 4]$; deducem că $\varphi(x) = \sqrt{x}$, funcție derivabilă cu $\varphi(1) = 1$, $\varphi(4) = 2$ și $f(x) = e^x$.

Mai departe: $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^4 e^{\varphi(x)} 2\varphi'(x)\mathrm{d}x = 2\int_1^2 e^t \mathrm{d}t = 2e^t\Big|_1^2 = 2(e^2 - e)$.

3. Calculăm $\int_1^3 \frac{1}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$.

Rezolvare

Pentru a evidenția $\varphi'(x)$, amplificăm cu $2x$.

Obținem $\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x}{x^2\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$ și alegem $\varphi(x) = x^2$; cu notațiile din teoremă, avem:

$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ și $\int_1^3 \frac{1}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^9 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{2}\left(\ln x - \ln(x+1)\right)\Big|_1^9 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{9}{10} - \ln\frac{1}{2}\right)$.

Cum procedăm în practică pentru calculul integralelor prin prima formulă de schimbare de variabilă?

Identificăm $\varphi'(x)$ și notăm $t = \varphi(x)$.

Înlocuind, formal, $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ prin $\mathrm{d}t$, scoatem în evidență $f(t)$ și apoi continuăm calculul integralei în t.

Exemple

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare

$\sqrt{x}$ apare dintr-o derivare: $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Notăm $x^{\frac{3}{2}} = t$, atunci $\frac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Pentru noile capete de integrare avem $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2} \end{cases}$.

Obținem $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_1^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t =$

$$= \frac{2}{3}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_1^{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

2. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt[5]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare

Notăm $1 - x^2 = t$ și $-2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, iar capetele sunt $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

$$\int_0^1 x\sqrt[5]{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,(-2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

OBSERVAȚIE

Atunci când evidențierea lui $\varphi'(x)$ se face greu (se observă greu) putem apela și la o altă metodă de schimbare de variabilă.

TEOREMĂ

Dacă $\varphi: [a, b] \to [c, d], f: [c, d] \to \mathbb{R}$ sunt funcții cu proprietățile:

a) f este continuă pe $[c, d]$,

b) φ este bijectivă, φ și φ^{-1} sunt derivabile cu derivatele continue,

atunci $$\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\left(\varphi^{-1}\right)'(x)\mathrm{d}x .(**)$$

Demonstrație Funcțiile f și φ sunt continue și deci funcția $f \circ \varphi$ este continuă, adică funcția $f \circ \varphi$ admite primitive.

Fie $G: [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f \circ \varphi$.

Atunci $\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$.(1)

Pe de altă parte,

$(G \circ \varphi^{-1})'(x) = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot (\varphi^{-1})'(x)$, adică

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\left(\varphi^{-1}\right)'(x)\mathrm{d}x = (G \circ \varphi^{-1})(\varphi(b)) - (G \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)) = G(b) - G(a). \ (2)$$

Din relațiile (1) și (2) obținem egalitatea din concluzie.

Egalitatea (**) se numește ***a doua formulă de schimbare de variabilă.***

În practică procedăm astfel:

- notăm $\varphi(x) = t$; $x = \varphi^{-1}(t)$ și, formal, înlocuim $\mathrm{d}x = (\varphi^{-1}(t))'\mathrm{d}t$;
- scoatem în evidență $f(t)$ și continuăm cu calculul integralei în t.

Exemple

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Rezolvare (cu schimbarea a II-a)

Notăm $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$ și de aici $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ și $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases}$.

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t}2t\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2(t - \ln(1+t))\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\left(\sqrt{2} - 1 - \ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

Rezolvare cu schimbarea I de variabilă (comparativă)

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\left(2\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Putem lua $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\varphi(x) = \sqrt{x} = t$ şi mai departe $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$, iar

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t}\,dt$$ şi mai departe se procedează ca mai sus.

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$

Rezolvare

Vom face schimbarea de variabilă $x = \sin t$ cu $dx = \cos t\,dt$ şi $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2} \\ x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi.$$

OBSERVAŢIE

Fie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, o funcţie continuă. Atunci:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & \text{dacă } f \text{ este pară} \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este impară} \end{cases}.$$

Într-adevăr, dacă f este pară, atunci $f(x) = f(-x)$, $\forall\, x \in [-a, a]$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \ (*)$$

În prima integrală facem schimbarea de variabilă $t = \varphi(x) = -x$ cu $\varphi'(x) = -1$ și $\varphi(-a) = a$, $\varphi(0) = 0$.

Avem $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$.

Adică egalitatea (*) devine $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

În cazul în care f este impară, adică $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in [-a, a]$ procedând analog obținem:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) = -\int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t.$$

Egalitatea (*) devine $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exemple

1. $\int_{-1}^{1} \ln\frac{2-x}{2+x}\mathrm{d}x = 0$.

Într-adevăr, funcția $f(x) = \ln\frac{2-x}{2+x}$ este impară, deoarece

$$f(-x) = \ln\frac{2+x}{2-x} = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{2-x}{2+x} = -f(x).$$

2. Să calculăm $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^{2007} + \sin^3 x + \mathrm{tg}^5 x + 1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Vom scrie:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^{2007} + \sin^3 x + \mathrm{tg}^5 x + 1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^{2007} + \sin^3 x + \mathrm{tg}^5 x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Funcția $f(x) = \frac{x^{2007} + \sin^3 x + \mathrm{tg}^5 x}{1+x^2}$ este impară, deci $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^{2007} + \sin^3 x + \mathrm{tg}^5 x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$,

rămâne:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^{2007} + \sin^3 x + \mathrm{tg}^5 x + 1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = = 2\mathrm{arctg}\, x\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\frac{\pi}{3}$$

Am folosit faptul că funcția $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ este pară.

OBSERVAŢII

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Iată câteva proprietăți obținute prin substituții generale:

i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ (conservarea intervalului $t = a + b - x$)

ii) $\int_a^b f(x)dx = \int_0^{b-a} f(x+a)dx = \int_0^{b-a} f(b-x)dx$

(translație în origine $t = x - a$ sau $t = b - x$)

iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_{-c}^{c} f(\frac{a+b}{2} - x)dx,\ c = \frac{b-a}{2}$ (centrarea în origine $t = \frac{a+b}{2} - x$)

Lăsăm ca exercițiu justificarea acestor relații.

Exemple

1. Calculăm $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx$ folosind substituția $t = \frac{\pi}{4} - x$ de conservare a intervalului.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)(-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\operatorname{tg} x}\,dx =$$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx$. Obținem $2I = (\ln 2)x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\ln 2$, de unde $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

2. Calculăm $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ folosind sustituția $t = \frac{a+b}{2} - x$, $dt = -dx$.

$$I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}-x-a\right)\left(b-\frac{b+a}{2}+x\right)}\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - x^2}\,dx.$$

Continuăm cu substituția $\frac{2}{b-a}x = t$, $\frac{2}{b-a}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, iar capetele integralei obținute

sunt $\begin{cases} x = \frac{b-a}{2} \Rightarrow x = 1 \\ x = -\frac{b-a}{2} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$.

Obținem:

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 t^2} \cdot \frac{b-a}{2}\mathrm{d}t = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2}.$$

În ultima egalitate am ținut cont de rezultatul obținut la exemplele anterioare.

O aplicaţie a integralelor definite la calculul unor sume

Vom calcula suma $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n$ folosind integrala definită.

Să considerăm dezvoltarea $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, $x \in [0, 1]$.

Obținem $\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right)\mathrm{d}x$.

Folosind substituția $t = 1 + x$, integrala din membrul drept devine:

$$\int_1^2 t^n\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_1^2 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Mai departe:

$$\int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right)\mathrm{d}x = \left.\left(C_n^0 x + \frac{x^2}{2}C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^3 + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n\right)\right|_0^1 =$$

$$= C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Aşadar $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exerciții rezolvate

1. a) Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.

Să se arate că $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

b) Să se calculze $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{5-\cos^2 x}$.

Rezolvare

a) Avem $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$.

Cu substituția $x = \pi - t$, $t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a doua integrală devine:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f\left(\sin(\pi - t)\right)(-\mathrm{d}t) = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf\left(\sin t\right)\mathrm{d}t,$$

de unde se obține prima relație cerută.

Pentru a doua parte a egalității avem:

$$I = \int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

Folosind substituția $t = \pi - x$, a doua integrală devine:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin(\pi - t)\right)(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin t\right)\mathrm{d}t$$

Prin urmare $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$ și de aici rezultă a doua egalitate.

b) Conform punctului anterior, putem scrie:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{5-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

În ultima integrală facem schimbarea de variabilă $-\cos x = t$ cu $\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ și

avem $I = \pi\int_{-1}^{0} \frac{1}{4+t^2}\mathrm{d}t = \pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big|_{-1}^{0}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

2. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{(1+\operatorname{tg} x)\cos x}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-5\cos x}{3\sin x+2\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare

a) Facem subtituția tg $x = t$ și deci $x = \operatorname{arctg} t$; mai departe, formal, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Dacă $x = 0$ obținem $t = 0$, dacă $x = \dfrac{\pi}{4}$ obținem $t = 1$.

Integrala devine $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln(1+t)\right)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$.

b) Fie $u(x) = 3\sin x + 2\cos x$ și $v(x) = \sin x - 5\cos x$.

Încercăm să găsim $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $v(x) = \alpha u(x) + \beta u'(x)$. Astfel:

$\sin x - 5\cos x = \alpha(3\sin x + 2\cos x) + \beta(3\cos x - 2\sin x) =$
$= (3\alpha - 2\beta)\sin x + (2\alpha + 3\beta)\cos x$.

Dacă înlocuim pe x cu 0 și $\dfrac{\pi}{2}$ obținem sistemul:

$$\begin{cases}-5=2\alpha+3\beta\\ 1=3\alpha-2\beta\end{cases},\ \text{cu soluțiile}\ \begin{cases}\alpha=-\dfrac{7}{13}\\ \beta=-\dfrac{17}{13}\end{cases}.$$

Putem scrie $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\frac{7}{13}u(x)-\frac{17}{13}u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{7}{13}\,\mathrm{d}x-\frac{17}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=$

$$=-\frac{7}{13}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_2^3\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\frac{7\pi}{26}-\ln\frac{3}{2},$$

unde am folosit schimbarea de variabilă $u(x) = t$.

3. Calculați integralele:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin 5x|\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2e^x\mathrm{d}x=$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)e^x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\frac{x}{2}e^x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)e^x\mathrm{d}x =$$

$$\overset{\text{integr.prin părți}}{=} \mathrm{tg}\frac{x}{2}e^x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)e^x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)e^x\mathrm{d}x = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

b) Vom face substituția $5x = t$ și avem $\int_0^{\pi}|\sin 5x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_0^{5\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t =$

$$= \frac{1}{5}\left(\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{3\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t + \int_{3\pi}^{4\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t + \int_{4\pi}^{5\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{3\pi}\sin t\,\mathrm{d}t - \int_{3\pi}^{4\pi}\sin t\,\mathrm{d}t + \int_{4\pi}^{5\pi}\sin t\,\mathrm{d}t\right) = \frac{10}{5} = 2.$$

4. Să se calculeze integralele:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x\,;\; J = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x.$$

Rezolvare

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}.$$

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x.$$

Facem schimbarea de variabilă $\sin x + \cos x = t$ și obținem $(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, iar ridicând la pătrat obținem $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = t^2$ de unde $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Mai departe: $J - I = \int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2 - 1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\left(t - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \ln t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(1 - \ln 2).$

Adunând cele două relații obținem $J = \frac{1}{8}(2 - \ln 2)$, apoi scăzând cele două relații avem $I = \frac{1}{8}\ln 2$.

5. Fie funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \in (0,1] \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$.

Să se arate că funcția f este continuă și să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Rezolvare

Ținând cont că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{1}{2}$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$, iar pe intervalul (0, 1] este rezultat al unor operații de funcții elementare putem spune că funcția este continuă.

$I = \int_0^1 \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$; continuăm cu schimbarea de variabilă

$\sqrt{x+1} = t$, adică $x = t^2 - 1$ și $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$; obținem

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t\mathrm{d}t}{t+1} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2\left(t - \ln(t+1)\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2} - 1 - \ln\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right).$$

6. Calculați $\int_0^1 \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Rezolvare

Vom face schimbarea de variabilă $\sqrt{x} = t$, iar funcția $\varphi(x) = \sqrt{x}$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$, de aceea vom proceda după cum urmează:

$I = \lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} I(a)$, unde $I(a) = \int_a^1 \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{a}}^1 \dfrac{2x}{1+x}\mathrm{d}x =$

$= 2\int_{\sqrt{a}}^1 \left(1 - \dfrac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = 2\left(x - \ln(x+1)\right)\Big|_{\sqrt{a}}^1 = 2(1 - \ln 2 - \sqrt{a} + \ln(1 + \sqrt{a}))$.

Obținem $I = \lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} 2\left(1 - \ln 2 - \sqrt{a} + \ln\left(1+\sqrt{a}\right)\right) = 2(1 - \ln 2)$

7. a) Să se calculeze $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(1+e^x\right)} \mathrm{d}x.$

b) Să se calculeze $J = \int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} \mathrm{d}x$, $a, b > 0$ cu f funcție pară.

Rezolvare

a) Facem substituția $x = -t$ și deci, formal, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.
Dacă $x = -1$ obținem $t = 1$, dacă $x = 1$, avem $t = -1$.

Avem $I = \int\limits_{1}^{-1} \frac{1}{\left(t^2+1\right)\left(e^{-t}+1\right)}\left(-\mathrm{d}t\right) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\left(t^2+1\right)\left(\frac{1}{e^t}+1\right)} \mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^t}{\left(t^2+1\right)\left(1+e^t\right)} \mathrm{d}t.$

Putem scrie $2I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(1+e^x\right)} \mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x}{\left(x^2+1\right)\left(1+e^x\right)} \mathrm{d}x =$

$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+e^x}{\left(x^2+1\right)\left(1+e^x\right)} \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$. Deci $I = \frac{\pi}{4}$.

b) $J = \int\limits_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+b^x} \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} \mathrm{d}x$.

Facem substituția $t = -x$ în prima integrală și obținem $\int\limits_{a}^{0} \frac{f(-t)}{1+b^{-t}}\left(-\mathrm{d}t\right) = \int\limits_{0}^{a} \frac{b^t f(t)}{1+b^t} \mathrm{d}t.$

Revenind $J = \int\limits_{0}^{a} \frac{b^x f(x)}{1+b^x} \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x} \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{a} \frac{f(x)\left(1+b^x\right)}{1+b^x} \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

8. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și periodică având o perioadă $T > 0$.

a) Să se arate că pentru orice număr real a sunt adevărate egalitățile:

$$\int\limits_{a}^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int\limits_{0}^{T} f(x+a)\mathrm{d}x = n\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

b) Să se arate că dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} F(x) = \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

c) Folosind punctul b), să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{0}^{x} \left|\sin t\right| \mathrm{d}t}{x}$.

Rezolvare

a) $\int\limits_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)\mathrm{d}x$ și în continuare în fiecare termen al sumei efectuăm substituția $t = \varphi(x) = x - a - kT$, obținând prima egalitate.

Mai departe, în integrala $\int\limits_0^T f(x+a)\mathrm{d}x$ facem schimbarea de variabilă $t = x + a$.

Obținem $\int\limits_0^T f(x+a)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$.

b) Cum $F \in \int f(x)\mathrm{d}x$, există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + c$, $F(0) = c$.

Putem scrie $\frac{x}{T} = \left[\frac{x}{T}\right] + \left\{\frac{x}{T}\right\}$ și avem $x = T\left[\frac{x}{T}\right] + T\left\{\frac{x}{T}\right\}$; facem notația $n = \left[\frac{x}{T}\right]$.

Avem $\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t = n\int\limits_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t$.

Însă există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \le M$, $x \in \mathbb{R}$, iar de aici rezultă

$$\left|\int\limits_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t\right| \le \int\limits_{nT}^x |f(t)|\mathrm{d}t \le M\int\limits_{nT}^x \mathrm{d}t = M(x-T) = MT\left\{\frac{x}{T}\right\} < MT.(*)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\int\limits_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\frac{x}{T}\right]}{x}\int\limits_0^T f(t)\mathrm{d}t + \lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

deoarece conform (*) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = 0$, iar din criteriul cleștelui $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left[\frac{x}{T}\right]}{x} = \frac{1}{T}$.

c) Funcția $f(x) = |\sin x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, este periodică de perioadă principală π și sunt îndeplinite celelalte condiții ale punctului b):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x |\sin t|\mathrm{d}t}{x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}(-\cos t)\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

9. Fie șirul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Stabiliți o relație de recurență pentru calculul lui $I_n \geq 2$.

b) Calculați următoarele limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\mathrm{d}x} \text{ și } \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x}.$$

Rezolvare

a) Integrând prin părți, obținem:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(\cos x)'\mathrm{d}x =$$

$$= -\left(\sin^{n-1} x \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

În continuare, obținem $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \geq 2$.

b) Conform punctului anterior, avem:

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\mathrm{d}x} = \frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ și de aici } \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\mathrm{d}x} = 1.$$

Deoarece $\sin^{2n+2} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obținem:

$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$ de unde $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Din criteriul „cleștelui“ obținem $\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x} = 1$.

10. Fie $f:\left[\frac{1}{\pi}, \infty\right) \to \mathbb{R}, f(x)=\int_{\frac{1}{\pi}}^{x}\left|\cos\frac{1}{t}\right|\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Să se arate că f este monotonă;

b) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

Rezolvare

a) Fie $x_1 < x_2$.

Atunci $f(x_2)-f(x_1)=\int_{\frac{1}{\pi}}^{x_2}\left|\cos\frac{1}{t}\right|\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{\pi}}^{x_1}\left|\cos\frac{1}{t}\right|\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{x_1}^{x_2}\left|\cos\frac{1}{t}\right|\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Aplicând teorema de medie rezultă că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât

$$\int_{x_1}^{x_2}\left|\cos\frac{1}{t}\right|\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\left(x_2-x_1\right)\left|\cos\frac{1}{c}\right|\frac{1}{c^2}\geq 0.$$

b) $$f(n)=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\left|\cos\frac{1}{t}\right|\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{2}{\pi}}^{n}\left|\cos\frac{1}{t}\right|\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\left(-\cos\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{2}{\pi}}^{n}\cos\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\overset{\frac{1}{x}=t}{=}$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{n}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{n}}=2-\sin\frac{1}{n}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=2$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze

a) $\int_1^e \ln x\,dx$; b) $\int_1^2 x^2 \ln x\,dx$; c) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$; d) $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$; e) $\int_0^1 xe^{1-x}\,dx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$;

g) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$; h) $\int_2^e \frac{\ln x}{x}\,dx$; i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$; j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\text{tg}^2 x\,dx$; k) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$;

l) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} e^x\,dx$; m) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{arctg}\,x\,dx$; n) $\int_0^1 \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

o) $\int_0^1 x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; p) $\int_2^3 \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$; q) $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\text{arctg}\,x\,dx$;

r) $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x^2+1} e^{\text{arctg}\,x}\,dx$; s) $\int_1^e (x\ln x)^2\,dx$; t) $\int_0^2 x\ln(1+x)\,dx$; u) $\int_0^1 \text{arctg}\,x\,dx$;

v) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2\,dx$; w) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$; x) $\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx$; z) $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x)\,dx$.

2. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\int_{-1}^1 \arcsin x\,dx$; c) $\int_0^1 x\arcsin x\,dx$; d) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2}\arcsin x\,dx$; e) $\int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,dx$;

f) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$; g) $\int_2^3 \sqrt{x^2-1}\,dx$; h) $\int_0^1 \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

3. Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât:

a) $\int_0^1 (x+a)e^x\,dx = b$; b) $\int_{-1}^1 \left(x^2+a|x|+b\right)e^{|x|}\,dx = a$.

4. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$; b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\text{tg}^2 x}{\text{tg}\,x}\,dx$; c) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{tg}\,x+\text{tg}^3 x)\,dx$; e) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$;

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$; g) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$; h) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$; i) $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$; j) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$;

k) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$; l) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$; m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$; n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot 2^{\cos x}\,dx$; o) $\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

p) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\operatorname{arctg}\left(\sin^2 x\right)dx$; q) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$; r) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$; s) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}\,dx$;

t) $\int_0^2 (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$; u) $\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\,dx$; v) $\int_0^{\log_2 \frac{\pi}{2}} 2^x \cos 2^x\,dx$;

x) $\int_e^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}\,dx$; y) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} xe^{\cos x^2}\sin x^2\,dx$; z) $\int_{-2}^1 \left(3x^2+2x+1\right)\sqrt[3]{x^3+x^2+x+2}\,dx$.

5. Calculați următoarele integrale folosind, eventual, substituțiile recomandate:

a) $\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}\,dx$, $\left(\sqrt{x}=t\right)$; b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$, $\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t\right)$; c) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$, $\left(\sqrt{e^x-1}=t\right)$;

d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $\left(\frac{1}{x}=t\right)$; e) $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$, $\left(x+\frac{1}{x}=t\right)$;

f) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$, $\left(x-\frac{1}{x}=t\right)$; g) $\int_2^3 \frac{x\sqrt{x-1}}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}}\,dx$, $\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=t\right)$;

h) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$, $(x=\cos t)$.

6. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \arcsin(\sin x)\,dx$;b) $\int_0^{2\pi} \arcsin(\sin x)\,dx$; c) $\int_0^{2\pi} \arccos(\cos x)\,dx$.

7. Să se calculeze:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^{2008}}\sin x\,dx$; b) $\int_{-2}^2 \frac{\sin x}{\ln\left(1+x^{2010}\right)}\,dx$; c) $\int_{-1}^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$;

d) $\int_{-1}^1 \left(\sin^{2008} x\right)\ln\frac{2-x}{2+x}\,dx$; e) $\int_{-1}^1 \frac{x^5+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; f) $\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{1+x^2}\,dx$.

***

8. Să se calculeze

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x + \cos x} \mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x + 1} \mathrm{d}x$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{2\sin x + 3\cos x} \mathrm{d}x$; d) $\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x - 3\cos x}{3\cos x + 5\sin x} \mathrm{d}x$.

9. Să se arate că:

a) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\arcsin x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$; b) $\int_1^{e} \sqrt{\ln x}\mathrm{d}x + \int_0^{1} e^{x^2}\, \mathrm{d}x = e$.

10. Să se calculeze:

a) $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x$; b) $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\, \mathrm{d}x$; c) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^{1} \operatorname{arctg} e^x\, \mathrm{d}x$;

e) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\arcsin x}{x^2} \mathrm{d}x$; f) $\int_0^{a} \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2} \mathrm{d}x,\ a > 0$; g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin 2x} \mathrm{d}x$;

h) $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{1+x^2} \mathrm{d}x$; i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^n x} \mathrm{d}x,\ n \geq 3$.

11. Să se calculeze:

a) $\int_0^{1} \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2+1} \mathrm{d}x$; b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{x}\, \mathrm{d}x$; c) $\int_{-1}^{1} (x-1)\arcsin\frac{2x}{1+x^2} \mathrm{d}x$;

d) $\int_0^{1} x^3\sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x$; e) $\int_0^{1} x^5\sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$; f) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin x|}{3+\sin^2 x} \mathrm{d}x$;

g) $\int_1^{2} \frac{1}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$; h) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x(1+x^6)} \mathrm{d}x$; i) $\int_2^{3} \frac{1}{x(1-x^4)} \mathrm{d}x$.

12. Să se calculeze integralele:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x;\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin x + \cos x}.$$

13. Să se determine care dintre integrale este mai mare, $\int_{-2}^{3} \operatorname{arctg} x \, dx$ sau $\int_{-3}^{2} \operatorname{arctg} x \, dx$?

14. a) Fie funcţia $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f este continuă şi să se calculeze $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$.

b) Fie funcţia $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln\left(1 + x^2\right)}{x^2}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Să se arate că funcţia f este continuă şi să se calculeze $\int_{0}^{1} f(x) \, dx$.

15. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică având o perioadă $T > 0$, iar $F \in \int f(x) \, dx$.

Să se arate că există $c \in (0, T)$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = f(c)$.

16. Să se arate că dacă funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este impară şi periodică, având o perioadă pozitivă T, iar f' este continuă, atunci $\int_{0}^{2T} \frac{x f'(x)}{1 + f^2(x)} \, dx = 0$.

17. Fie şirul $I_n = \int_{n}^{n+1} \ln\left(x^2 + x - 2\right) dx$, $n \geq 2$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

18. Fie $I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculaţi I_1 şi I_2.

b) Stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru calculul lui I_n, $n \geq 2$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x dx}{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n} x dx}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x dx}{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n} x dx}$.

19. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați I_0 și I_1.
b) Stabiliți o formulă de recurență pentru calculul lui I_n, $n \geq 1$.

20. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați I_0, I_1.
b) Stabiliți o formulă de recurență pentru calculul lui I_n, $n \geq 1$.
c) Calculați limita șirului I_n;
d) Deduceți că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.

21. Fie $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit;
b) Stabiliți o formulă de recurență pentru calculul lui I_n, $n \geq 2$;
c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

22. Să se calculeze cu ajutorul integralelor $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^3 - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$.

23. Să se arate că dacă funcția $f: [a-x, a+x] \to \mathbb{R}$ are un punct de simetrie $S(a, b)$, adică

$f(a-x) + f(a+x) = 2b, \ \forall x \in [a-x, a+x]$, atunci $\int_{a+x}^{a-x} f(t) \, dt = 2bx$, $x > 0$.

24. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă, astfel

încât $f(a) f'(a) = f(b) f'(b)$. Să se arate că $\int_a^b f(x) f''(x) \, dx \leq 0$.

Teste de evaluare

Testul 1

Să se calculeze:

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$.

2. $\int_0^1 x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

3. $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(1+x^4\right)}\,dx$.

4. $\int_0^\pi \sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx$.

Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p; **2.** 3p; **3.** 2p; **4.** 1p
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 2

Să se calculeze:

1. $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^x}\,dx$

2. $\int_0^1 x\ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$.

3. $\int_{-1}^1 \left(2^x+2^{-x}\right)\sin x\,dx$.

4. $\int_0^\pi \cos^{n-1} x\sin(n+1)x\,dx$.

Barem: 1p din oficiu; **1.** 3p; **2.** 3p; **3.** 2p; **4.** 1p.
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 3

Să se calculeze:

1. $\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

2. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

3. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^{2008}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

4. Să se studieze convergenţa şirului $I_n = \int_0^1 \left(x^2+1\right)^n \mathrm{d}x$ şi apoi să se determine o relaţie de recurenţă, iar dacă este cazul să se calculeze limita sa.

Barem: 1p din oficiu. **1**. 2p**. 2**. 1p**. 3.** 3p**. 4.** 3p.
Timp de lucru: 50 minute.

Testul 4

Să se calculeze:

1. $\int_0^{\pi} \frac{x\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$**.**

2. $\int_0^{1} \frac{\left(x^2+x+1\right)e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\mathrm{d}x$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(1+x^{2008}\right)}\mathrm{d}x$**.**

4. Să se studieze convergenţa şirului $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^n x\,\mathrm{d}x$ şi apoi să se determine o relaţie de recurenţă, iar dacă este cazul să se calculeze limita sa.

Barem: 1p din oficiu. **1**. 2p**. 2**. 1p**. 3.** 3p**. 4.** 3p
Timp de lucru: 50 minute.

Capitolul 8

Integrarea funcţiilor raţionale. Integrale reductibile la integrale de funcţii raţionale

8.1. Integrarea funcţiilor raţionale

În prima parte a acestui capitol vom da câteva metode de integrare a funcțiilor raționale $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $(a, b \in \mathbb{R})$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, unde g și h sunt funcții raționale, grad $g \leq 4$ și $h(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$.

DEFINIŢIE

O funcție $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ se numește **simplă** dacă are una dintre următoarele forme:

i) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$;

ii) $f(x) = \dfrac{A}{(x-\lambda)^n}$, $A \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 4$;

iii) $f(x) = \dfrac{Bx + C}{\left(mx^2 + nx + p\right)^2}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, cu $n^2 - 4mp < 0$, $n \in \{1, 2\}$.

Vom calcula în continuare integralele funcțiilor simple de tipul *ii)* și *iii)* pe un interval $[a, b]$.

a) Dacă funcția rațională $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este de forma

$$f(x) = \frac{1}{x-\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus [a, b],$$

avem $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x-\lambda}\mathrm{d}x = \ln|x-\lambda|\,\Big|_a^b = \ln|b-\lambda| - \ln|\lambda - a| = \ln\frac{b-\lambda}{a-\lambda}$.

b) Dacă funcția rațională $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este de forma

$$f(x) = \frac{1}{(x-\lambda)^n},\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus [a, b],\ n \in \{2, 3, 4\},$$

avem $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-\lambda)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-\lambda)^{n-1}}\Bigg|_a^b = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(b-\lambda)^{n-1}} - \frac{1}{(a-\lambda)^{n-1}}\right)$.

c) Dacă funcția rațională $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este de forma

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \lambda^2}, \ \lambda \neq 0,$$

avem $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2+\lambda^2}\,dx = \frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\Big|_a^b = \frac{1}{\lambda}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{\lambda} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\lambda}\right).$

d) Dacă funcția rațională $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este de forma

$f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2+\lambda^2\right)^2}$, $\lambda \neq 0$, avem:

$$\int_a^b \frac{1}{\left(x^2+\lambda^2\right)^2}dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b \frac{\lambda^2}{\left(x^2+\lambda^2\right)^2}dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b \frac{x^2+\lambda^2}{\left(x^2+\lambda^2\right)^2}dx - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b \frac{x^2}{\left(x^2+\lambda^2\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b \frac{1}{x^2+\lambda^2}dx - \frac{1}{2\lambda^2}\int_a^b x\left(\frac{-1}{x^2+\lambda^2}\right)'dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b \frac{1}{x^2+\lambda^2}dx + \frac{1}{2\lambda^2}\cdot\frac{x}{x^2+\lambda^2}\Big|_a^b - \frac{1}{2\lambda^2}\int_a^b \frac{1}{x^2+\lambda^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{x^2+\lambda^2}\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{\lambda} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\lambda}\right) - \left(\frac{b}{b^2+\lambda^2} - \frac{a}{a^2+\lambda^2}\right)\right).$$

OBSERVAȚII:

i) Dacă dăm m factor comun putem aduce funcțiile de tipul iii) la forma

$$f(x) = \frac{B'x + C'}{\left(x^2 + px + q\right)^n} \text{ cu } p^2 - 4q < 0, \ n \in \{1, 2\}.$$

ii) Dacă $p^2 - 4q < 0$, atunci $x^2 + px + q$ se poate scrie ca sumă de pătrate:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + px + \frac{p^2}{4}\right) + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = \varphi^2(x) + \gamma^2,$$

unde $\varphi(x) = x + \dfrac{p}{2}$ și $\gamma = \sqrt{\dfrac{4q - p^2}{4}} > 0.$

Ne vom ocupa mai departe, ținând cont de observațiile anterioare, de funcțiile de tipul *iii)*, astfel

I. $$\int_a^b \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+\gamma^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\gamma^2}=\frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg}\frac{t}{\gamma}\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\left(\operatorname{arctg}\frac{\varphi(b)}{\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\varphi(a)}{\gamma}\right)$$

II. $$\int_a^b \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\left(\varphi^2(x)+\gamma^2\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+\gamma^2\right)^2}$$ și vom continua folosind punctul d).

III. Dacă funcția este de tipul $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+px+q\right)^2}$, atunci, înmulțind și împărțind cu 2, apoi adunând și scăzând p, obținem:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^2}-\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^2}.$$

A doua funcție din membrul drept este de tipul precedent.
Vom face schimbarea de variabilă $t := \Psi(x) = x^2 + px + q$ și obținem

$$\int_a^b \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-\frac{1}{t}\Big|_{\psi(a)}^{\psi(b)}=-\left(\frac{1}{\psi(b)}-\frac{1}{\psi(a)}\right)$$

Exemple

1. Să calculăm $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x$.

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

Facem mai departe substituția $x+\dfrac{5}{2}=t$ cu $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ și capetele $\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{2} \\ x_2=\dfrac{7}{2}\end{cases}$ și avem

$$I=\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Big|_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{39}.$$

2. Să calculăm $\int_0^1 \frac{x+3}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}x$.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+6}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{4}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}x\right)$$

Mai departe facem schimbarea de variabilă $t:=\Psi(x)=x^2+2x+2$ în prima integrală, iar $z:=\varphi(x)=x^2+1$ în a doua integrală; obținem:

$$I=\frac{1}{2}\left(\int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}+\int_1^2 \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+1\right)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\bigg|_2^5+\int_1^2 \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+1\right)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1\right)$$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+1\right)^2}=\int_1^2 \frac{1+z^2}{\left(z^2+1\right)^2}\mathrm{d}z-\int_1^2 \frac{z^2}{\left(1+z^2\right)^2}\mathrm{d}z=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}+\frac{1}{2}\int_1^2 z\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'\mathrm{d}z=$$

$$=\operatorname{arctg}x\Big|_1^2+\frac{1}{2}\left(z\cdot\frac{1}{1+z^2}\right)\Bigg|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right).$$

3. Să calculăm $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

Vom scrie:

$$I=\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-3}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$$

În prima integrală facem substituția $t:=x^2+x+1$, iar în a doua $z:=x+\frac{1}{2}$; obținem

$$I=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{t}\mathrm{d}t-\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln t\Big|_1^3-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}t\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\ln\sqrt{3}-\sqrt{3}\frac{\pi}{6}.$$

Admitem fără demonstrație următorul rezultat:

TEOREMĂ

Descompunerea funcțiilor raționle în funcții simple

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție rațională, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, unde P și Q sunt polinoame prime între ele.

Presupunem că polinomul Q are forma

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}(x-a_3)^{\alpha_3}(x-a_4)^{\alpha_4}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{\beta_2},$$

cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_1 + \beta_2 = 4$.

Atunci f se descompune, în mod unic,

$$f(x) = K(x) + \sum_{n=1}^{4}\left[\frac{A_1^n}{(x-a_n)^{\alpha_n}} + \frac{A_2^n}{(x-a_n)^{\alpha_n-1}} + \ldots + \frac{A_n^n}{x-a_n}\right] +$$

$$+\frac{B_1^1x+C_1^1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \frac{B_1^2x+C_1^2}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2} + \frac{B_2^2x+C_2^2}{x^2+p_2x+q_2},$$

unde K este un polinom cu coeficienți reali, iar a_i, A_j^k, B_j^k sunt coeficienți reali și $p_i^2 - 4q_i < 0$.

OBSERVAŢIE

Practic, pentru realizarea unei descompuneri a unei funcții raționale ca sumă de funcții raționale simple procedăm astfel:

i) Facem împărțirea cu rest a lui P la Q și obținem $P = KQ + R$, unde R este un polinom de grad strict mai mic decât gradul lui Q, și putem scrie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

ii) Scriem formula de descompunere ca în teorema de mai sus, în care coeficienții A, B, C,... sunt nedeterminați.

iii) Determinăm coeficienții A, B, C,... etc. printr-o metodă oarecare (dând valori, identificând etc.)

Procedeul de mai sus se numește *metoda coeficienților nedeterminați.*

Exemple

1. Să calculăm $\int_0^2 \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^3 + 1} dx$.

Avem $f(x) = \frac{x^4 + x - x^2 - x + 1}{x^3 + 1} = x - \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x^4 + x}{x^3 + 1} - \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$.

Deducem că putem scrie $\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$, de unde, aducând la același numitor, obținem $x^2 + x - 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$ și de aici
$x^2 + x - 1 = (A + B)x^2 + (-A + B + C)x + A + C, \forall x \in [0, 2]$,
ceea ce conduce la sistemul

$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + B + C = 1 \\ A + C = -1 \end{cases}$, cu soluția $\begin{cases} A = \frac{-1}{3} \\ B = \frac{4}{3} \\ C = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Integrala dată se poate scrie:

$$\int_0^2 \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^3 + 1} dx = \int_0^2 x dx - \int_0^2 \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{x+1} dx - \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= 2 + \frac{1}{3}\ln(x+1)\Big|_0^2 - \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{1}{t} dt = 2 + \frac{1}{3}\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 4,$$

unde am folosit schimbarea de variabilă $t = x^2 - x + 1$.

2. Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2} dx$.

Conform teoremei de descompunere în funcții simple, avem:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

și de aici, aducând la același numitor:
$1 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx = (A + B)x^2 + x(2A + B + C) + A$

Obținem sistemul: $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases}$, cu soluția $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$.

Avem $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{-2x^3-9x^2-2x-2}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

3. Să calculăm $\int_0^1 \frac{x^6-8x^2}{(x^2+1)(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

Vom avea $\frac{x^6-8x^2}{(x^2+1)(x+1)^2} = x^2-2x+2+\frac{-2x^3-9x^2-2x-2}{(x^2+1)(x+1)^2}$ și deducem

$$\frac{-2x^3-9x^2-2x-2}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}.$$

Aducând la același numitor, obținem:
$-2x^3-9x^2-2x-2 = (Ax+B)(x^2+2x+1)+C(x^2+1)(x+1)+D(x^2+1)$
și mai departe
$-2x^3-9x^2-2x-2 = (A+C)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(A+2B+C)x+B+C+D$,
iar de aici se obține sistemul:

$$\begin{cases} A+C=-2 \\ 2A+B+C+D=-9 \\ A+2B+C=-2 \\ B+C+D=-2 \end{cases}, \text{ cu soluțiile } \begin{cases} A=-\frac{7}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{3}{2} \\ D=-\frac{7}{2} \end{cases}.$$

Avem

$$\int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2-2x+2)\mathrm{d}x - \frac{7}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x -$$

$$-\frac{7}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)\Bigg|_0^1 - \frac{7}{4}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\ln(x+1)\Bigg|_0^1 + \frac{7}{2}\frac{1}{x+1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3}-\frac{7}{4}\ln(x^2+1)\Bigg|_0^1 + \frac{3}{2}\ln 2-\frac{7}{4} = \frac{4}{3}-\frac{7}{4}\ln 2+\frac{3}{2}\ln 2-\frac{7}{4}.$$

OBSERVAŢIE

În unele situații este mult mai simplu să folosim mai întâi o schimbare de variabilă pentru a simplifica unele calcule.

Exemple

1. Să calculăm $\int_1^2 \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} \mathrm{d}x$.

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{x}{x^2(x^2+1)} \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2(x^2+1)} \mathrm{d}x$$

Mai departe vom folosi schimbarea de variabilă $x^2 := t$, $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ și avem:

$$I=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x\left(x+1\right)} \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\ln x-\ln\left(x+1\right)\right)\Big|_1^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}\right).$$

2. Să calculăm $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} \mathrm{d}x$.

Soluția I

$$I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} \mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)} \mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}} \mathrm{d}x$$

Vom face schimbarea de variabilă $x+\frac{1}{x}=t$, $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, iar $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

Avem $I=\int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t^2-1} \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{7}$.

Soluția II (comparativă)

Scriem $\frac{x^2-1}{(x^4+2x^2+1)-x^2}=\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$

Aducând la același numitor, avem:

$x^2-1=(A+C)x^3+(A+B-C+D)x^2+(A+B+C-D)x+B+D$,

din care rezultă sistemul $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=1 \\ A+B+C-D=0 \\ B+D=-1 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-1 \\ D=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

$$I=\int_1^2 \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\right).$$

Mai departe facem substituția $x^2-x+1=t$, $(2x-1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ în prima integrală și $x^2+x+1=y$, $(2x+1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$ în a doua integrală și obținem

$$I=\frac{1}{2}\left(\int_1^3 \frac{1}{t}\mathrm{d}t-\int_3^7 \frac{1}{y}\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{2}\left(\ln t\Big|_1^3-\ln y\Big|_3^7\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{7}.$$

8.2. Integrale reductibile la integrale de funcţii raţionale

8.2.1. Integrarea funcţiilor trigonometrice

Ne propunem ca în acest paragraf să dăm câteva exemple de tipuri de integrale ce se pot reduce la integrale raționale.

Fie $R(\sin x, \cos x)$ o funcție rațională în $\sin x$ și $\cos x$.

Pentru a simplifica unele calcule, se recomandă substituția generală $\boxed{t:=\varphi(x)=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$ având grijă ca $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\neq 0$, $\forall\, x\in[a,b]$. Vom ține cont și de formulele:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}},\quad \sin x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}\quad \text{și}\quad \varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}\right)}$$

Exemplu

Calculăm $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x+\cos x+1}\mathrm{d}x$.

Cu substituția de mai sus $t : \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\ \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ și cu ajutorul formulelor anterioare, avem $I=\int_0^1\left(\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t=\ln(t+1)\Big|_0^1=\ln 2$.

Substituția anterioară transformă integrala funcției trigonometrice într-o integrală a unei funcții raționale, însă s-ar putea să ajungem la calcule foarte dificile.

Prin urmare, recomandăm unele substituții particulare.

i) Dacă $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ vom putea face substituția

$$\boxed{t := \varphi(x) = \cos x}$$

ii) Dacă $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ vom putea face substituția

$$\boxed{t := \varphi(x) = \sin x}$$

iii) Dacă $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ vom putea face substituția

$$\boxed{t := \varphi(x) = \operatorname{tg} x}$$

Vom folosi și formulele $\boxed{\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

Exemple

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}\,dx$.

Vom face substituția $t := \varphi(x) = \cos x$, $-\sin x dx = dt$.

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x(-\sin x)}{\cos^2 x+1}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1-\cos^2 x\right)\left(-\sin x\right)}{\cos^2 x+1}\,dx = -\int_1^0 \frac{1-t^2}{t^2+1}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= -\int_0^1 \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = -\left(t-2\operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = -1+\frac{\pi}{2}.$$

2. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x \sin^2 x}\,dx$.

Vom face schimbarea de variabilă $t := \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)\sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)t^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= \frac{-1}{t}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}+2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot 3\right).$$

3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Vom face schimbarea de variabilă $t=\operatorname{tg}x$, $x=\operatorname{arctg}x$ şi $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t}{t+1}\cdot\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t.$$

Continuăm cu metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

$$\frac{t}{t+1}\cdot\frac{1}{t^2+1}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{At^2+A+Bt^2+Ct+Bt+C}{(t+1)(t^2+1)}$$ şi de aici

$t=(A+B)t^2+(B+C)t+A+C$, iar de aici obţinem sistemul:

$$\begin{cases}A+B=0\\B+C=1\\A+C=0\end{cases}, \text{ cu soluţia } \begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{2}\\C=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Avem: $I=\int_0^1\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\ln\left(t+1\right)\Big|_0^1+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\ln\left(t^2+1\right)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\,\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}=-\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}.$$

OBSERVAŢIE

În anumite situaţii se pot face şi alte substituţii, care conduc la calcule mai simple.

Exemple

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Vom face schimbarea de variabilă $\cos^2 x=t$ cu $-2\cos x\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, adică $-\sin 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Soluţia 1

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{4\cos^2 x+1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{3\cos^2 x+1}\mathrm{d}x=$$

$$=-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{3t+1}=-\frac{1}{3}\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\ln\left(t+\frac{1}{3}\right)\Bigg|_1^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$$

Soluţia 2 (comparativă)

Facem substituţia tg $x = t$ cu $x = $ arctg x şi $\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x}}{4\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}+\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+4}\cdot\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t.$$

Folosind metoda coeficienţilor nedeterminaţi, obţinem:

$$\frac{2t}{t^2+4}\cdot\frac{1}{t^2+1} = \frac{At+B}{t^2+4}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

şi aducând la acelaşi numitor, obţinem prin identificare sistemul:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A+4C=2 \\ B+4D=0 \end{cases}, \text{ cu soluţia } \begin{cases} A=-\frac{2}{3} \\ C=\frac{2}{3} \\ B=D=0 \end{cases}.$$

$$I = \frac{1}{3}\left(-\int_0^1 \frac{2t}{t^2+4}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{3}\left(-\ln\left(t^2+4\right)\Big|_0^1 + \ln\left(t^2+1\right)\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\cdot\sin 2x}{1+\cos^8 x}\mathrm{d}x.$

Vom aranja convenabil fracţia din integrală.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\cdot 2\sin x\cos x}{1+\cos^8 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\cdot\sin x}{1+\cos^8 x}\mathrm{d}x.$$

Facem schimbarea de variabilă $\cos^4 x = t$ şi avem $-4\cos^3 x \sin x\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ şi capetele

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

$$I = -\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

Încercaţi să rezolvaţi acest exerciţiu folosind substituţia tg $x = t$! Ce observaţi?

8.2.2 Integrarea unor funcţii iraţionale

În acest paragraf vom încerca să dăm câteva metode de integrare a unor funcții iraționale particulare.

i) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{mx^2+nx+p}}\,\mathrm{d}x$;

$\boxed{t := \varphi(x) = 2mx + n = (mx^2 + nx + p)'}$, $mx^2 + nx + p \neq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$.

Aceeași substituție se poate face și pentru integrale de forma $\displaystyle\int_a^b \frac{Ax+B}{\sqrt{mx^2+nx+p}}\,\mathrm{d}x$.

Exemplu

Să calculăm $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3x+4}}\,\mathrm{d}x$.

Vom folosi substituția $t = 2x + 3$ cu $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.
Avem:

$$I = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{\frac{t-3}{2}+3}{\sqrt{\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 3\frac{t-3}{2} + 4}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{t+3}{\sqrt{t^2+7}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_3^5 \frac{t}{\sqrt{t^2+7}}\,\mathrm{d}t + \int_3^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+7}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{t^2+7}\,\Big|_3^5 + \ln\left(t+\sqrt{t^2+7}\right)\Big|_3^5\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{32} - 4 + \ln\frac{5+\sqrt{32}}{3+4}\right).$$

ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(\alpha x+\beta)^k\sqrt{mx^2+nx+p}}\,\mathrm{d}x$;

$\boxed{t := \varphi(x) = \frac{1}{\alpha x+\beta}}$, $\alpha m \neq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $mx^2 + nx + p \neq 0$.

Folosind această substituție se ajunge la integrale de tipul celor de la i).

Exemplu

Să calculăm $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x$.

Folosim substituția $t = \dfrac{1}{x+2}$, $x = \dfrac{1}{t} - 2$, $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Obținem $I = \int_1^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2 + 2\left(\frac{1}{t}-2\right)+4}}\left(-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{\sqrt{4t^2-2t+1}}\mathrm{d}t$

și în continuare procedăm ca la exemplul precedent.

iii) $\int_a^b \sqrt{\alpha^2 - x^2}\mathrm{d}x$; $\boxed{x = \alpha \sin t}$ sau $\boxed{x = \alpha \cos t}$, $[a, b] \subset [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$.

$\int_a^b \sqrt{x^2 - \alpha^2}\mathrm{d}x$; $\boxed{x = \frac{\alpha}{\sin t}}$ sau $\boxed{x = \frac{\alpha}{\cos t}}$,

$[a, b] \subset (-\infty, \alpha]$ sau $[a, b] \subset [\alpha, \infty)$, $\alpha < 0$.

$\int_a^b \sqrt{x^2 + \alpha^2}\mathrm{d}x$; $\boxed{x = \alpha \operatorname{tg} x}$

OBSERVAŢIE

Aceste tipuri de integrale se pot calcula, așa cum am văzut în capitolul anterior, și integrând prin părți.

iv) $\int_a^b \sqrt{x^2 + nx + p}\mathrm{d}x$; $\boxed{x + \frac{n}{2} = t}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Folosind substituția indicată, ajungem la integrale de tipul iii).

Exemple

a) Calculăm $I = \int_0^1 \sqrt{3 - 2x - x^2}\mathrm{d}x$.

Folosim schimbarea de variabilă $x + 1 = t$ și avem $I = \int_1^2 \sqrt{4 - t^2}\mathrm{d}t$.

Mai departe folosim substituția $t = 2\sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cu $\mathrm{d}t = 2 \cos t\ \mathrm{d}t$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 y}\, 2\cos y\mathrm{d}y = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y\mathrm{d}y = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2y}{2}\mathrm{d}y = 2\left(y + \frac{\sin 2y}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \mathrm{d}x$.

Soluție:

Vom face substituția $\sin^2 x = t$ și obținem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\sin^2 x\right)^2 + \left(1 - \sin^2 x\right)^2} \left(\sin^2 x\right)' \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 + 2\cos x} \mathrm{d}x$; b) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4 - 3\cos x}$.

Soluție:

a) Facem substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ și deducem $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t$. Deoarece $\operatorname{tg} \frac{0}{2} = 0$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$,

avem $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3 + 2\cos x} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{5 + t^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$.

b) Facem substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ și obținem $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4 - 3\cos x} = \int_0^0 \frac{2\mathrm{d}t}{1 + 7t^2} = 0$.

Cum $\frac{1}{4 - 3\cos x} > 0$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$, rezultă $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4 - 3\cos x} > 0$, contradicție.

Unde este greșeala?

Din substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, obținem $x = 2 \operatorname{arctg} t$.

Când t crește de la $-\infty$ la ∞, funcția $\operatorname{arctg} t$ crește de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, iar $x = 2 \operatorname{arctg} t$ crește de la $-\pi$ la π și nu acoperă intervalul $[0, 2\pi]$ care intervine în integrala dată.

Pe de altă parte, funcția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu are sens în punctual $x = \pi$.

Pentru a folosi substituția de mai sus vom face în prealabil translația $x = \pi + y$, cu ajutorul căreia transformăm intervalul $[0, 2\pi]$ în $[-\pi, \pi]$.

Avem $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4-3\cos x} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dy}{4-3\cos(y+\pi)} = 2\int_0^{\pi}\frac{dy}{4+3\cos y} = 2\lim_{\substack{\alpha\to\pi\\ \alpha<\pi}}\int_0^{\alpha}\frac{dy}{4+3\cos y}$.

Am folosit faptul că funcția $\frac{1}{4+3\cos y}$ este pară pe $[-\pi, \pi]$.

Acum facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = t$ și avem:

$$\int_0^{\alpha}\frac{dy}{4+3\cos y} = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\frac{2dt}{7+t^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}\Bigg|_0^{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{7}}.$$

În final avem $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4-3\cos x} = 2\lim_{\substack{\alpha\to\pi\\ \alpha<\pi}}\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{7}} = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}$.

3. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{1}{(1+t^2)(1+t^p)}\,dt,\ t \le 4$.

Soluție

$$\int_0^t\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)}dx = \int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)}dx + \int_1^t\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)}dx.$$

Vom face schimbarea de variabilă $\frac{1}{x} = t$ și avem:

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)}dx = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}}\int_{\alpha}^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)}\left(-x^2\right)\left(\frac{1}{x}\right)'dx =$$

$$= \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}}\int_1^{\frac{1}{\alpha}}\frac{x^p}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{x^p}{(1+x^2)(1+x^p)}dx.$$

Deci $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1+x^p}{(1+x^2)(1+x^p)}dx =$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_2^3 \left(x^2+x-1\right)\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$; c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\mathrm{d}x$;

d) $\int_1^2 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$; e) $\int_{-1}^2 \frac{1}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$; f) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)^4}\mathrm{d}x$; h) $\int_2^3 \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}\mathrm{d}x$; i) $\int_0^1 \frac{1}{\left(x^2-4\right)^2}\mathrm{d}x$;

j) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$; k) $\int_0^1 \frac{1}{(x+4)^2}\mathrm{d}x$; l) $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^4}\mathrm{d}x$.

2. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\mathrm{d}x$; c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$; e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x$; f) $\int_{-2}^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+10}\mathrm{d}x$.

3. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x$; c) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$;

d) $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x$; e) $\int_{-3}^{-2} \frac{x+2}{(x-2)(x-4)}\mathrm{d}x$; f) $\int_1^2 \frac{2x+3}{(x+2)x}\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$; h) $\int_{-1}^2 \frac{x+1}{x^2-7x+12}\mathrm{d}x$; i) $\int_0^2 \frac{x-3}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x$.

4. Să se calculeze :

a) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x$; b) $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\mathrm{d}x$; c) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^1 \frac{-x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x$; e) $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)(x-4)}\mathrm{d}x$; f) $\int_3^4 \frac{3x-1}{(x-1)x(x+1)}\mathrm{d}x$;

g) $\int_1^2 \frac{2x^2+x-1}{x^3+3x^2+2x}\mathrm{d}x$; h) $\int_0^1 \frac{3x^2-2}{x^3+6x^2+11x+6}\mathrm{d}x$.

5. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$; b) $\int_2^3 \frac{1}{x^3-1}\mathrm{d}x$; c) $\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x$;

d) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3-x^2+x-1}\mathrm{d}x$; e) $\int_{-2}^{-1} \frac{2x^2+3}{x^3-x^2+4x-4}\mathrm{d}x$.

6. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)x^2}\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2 x}\mathrm{d}x$; c) $\int_{-1}^0 \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\mathrm{d}x$.

d) $\int_2^3 \frac{1}{x^2(x^2-1)}\mathrm{d}x$; e) $\int_2^3 \frac{x+1}{\left(x^2-1\right)^2}\mathrm{d}x$; f) $\int_2^3 \frac{x+1}{(x^2-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

7. Să se calculeze:

a) $\int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$; c) $\int_0^1 \frac{x^5-x^4+x}{x^4+1}\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1}\mathrm{d}x$; e) $\int_2^3 \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}\mathrm{d}x$.

8. Să se calculeze:

a) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^3+1)}$; b) $\int_1^3 \frac{1}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x$; c) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$; e) $\int_1^2 \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$; f) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{3x^4+10x^2+3}\mathrm{d}x$;

g) $\int_1^2 \frac{6x^4+3x^3+4x^2+1}{3x^4+10x^2+3}\mathrm{d}x$; h) $\int_0^1 \left(\frac{x^2+2x+3}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x$; i) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^4+2x^3+x^2-2x+1}\mathrm{d}x$.

9. Să se calculeze următoarele integrale de funcții trigonometrice:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3\, x\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^4\, x\mathrm{d}x$; e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}^5\, x\mathrm{d}x$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x} \mathrm{d}x$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin x} \mathrm{d}x$; i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x$;

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - 2\cos x + 4} \mathrm{d}x$; k) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+\sin x} \mathrm{d}x$; l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \mathrm{d}x$;

m) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)\sin x} \mathrm{d}x$; n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^2 x}{1+\sin x} \cos x \, \mathrm{d}x$; o) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos x} \sin x \, \mathrm{d}x$;

p) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} \mathrm{d}x$; q) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} \mathrm{d}x$; r) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\operatorname{tg} x + 1}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$; s) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} \mathrm{d}x$;

t) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\sin 2x + \cos 2x} \mathrm{d}x$; u) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} \mathrm{d}x$; v) $\int_0^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x \, \mathrm{d}x$;

x) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 3x \, \mathrm{d}x$; y) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x} \mathrm{d}x$; z) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin x} \mathrm{d}x$.

10. Să se calculeze:

a) $\int_{-1}^{2} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}} \mathrm{d}x$; b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \mathrm{d}x$; c) $\int_2^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$;

d) $\int_1^2 \sqrt{\frac{x}{x+1}} \mathrm{d}x$; e) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} \mathrm{d}x$; f) $\int_{-1}^{2} \frac{\sqrt{x+4}}{x} \mathrm{d}x$;

g) $\int_5^{10} x(x+1)\sqrt{x-1} \, \mathrm{d}x$; h) $\int_0^1 x\sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x$; i) $\int_0^1 \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} \mathrm{d}x$;

j) $\int_3^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$; k) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \mathrm{d}x$; l) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^6+1}} \mathrm{d}x$;

m) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+4}} \mathrm{d}x$; n) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \mathrm{d}x$; o) $\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+2} \, \mathrm{d}x$;

q) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} \, \mathrm{d}x$; p) $\int_2^3 \sqrt{x^2+2x-3} \, \mathrm{d}x$; r) $\int_{-1}^{0} \sqrt{3-2x-x^2} \, \mathrm{d}x$.

11. Să se calculeze :

a) $I=\int_1^2 \frac{e^x-\cos x}{e^x-\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$; $J=\int_1^2 \frac{\sin x}{e^x-\cos x\sin x}\mathrm{d}x$;

b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$;

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

12. Să se calculeze:

$I=\int_1^2 \frac{x^7+1}{x^2(x+1)^2}\mathrm{d}x$; $J=\int_0^1 \frac{x^3+2x-1}{(x+1)^4}\mathrm{d}x$;

$K=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; $L=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

13. Să se găsească o relație de recurență pentru următorul șir:

$I_n=\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{2+\cos x}\mathrm{d}x$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}\mathrm{d}x$.

2. Să se calculeze $\int_{0}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

3. Să se calculeze $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$.

4. Fie $m, n \in \mathbb{Z}$ cu $|m| \neq |n|$. Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x$.

Timp de lucru: 50 minute
Barem: 1p din oficiu; **1.** 3p; **2.** 2p; **3.** 3p; **4.** 1p.

Testul 2

1. Să se calculeze $\int_{1}^{2} \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

2. Să se calculeze $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

3. Să se calculeze $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$.

4. Să se calculeze $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Timp de lucru: 50 minute
Barem: 1p din oficiu; **1.** 3p; **2.** 2p; **3.** 3p; **4.** 1p.

Testul 3

Să se calculeze integralele

1. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 2x \, dx$.

2. $\int_{0}^{7} \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$.

3. $\int_{0}^{1} \frac{x^3+2x+3}{x^2-x-2} dx$.

4. $\int_{1}^{2} \frac{x^2}{x^4+3x^2+1} dx$.

Timp de lucru: 50 minute
Barem: 1p din oficiu. **1**. 2p**. 2**. 2p**. 3.** 3p**. 4.** 2p.

Testul 4

Să se calculeze integralele:

1. $\int_{0}^{\pi} \frac{\cos 2x}{5-4\cos x} dx$**.**

2. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$**.**

3. $\int_{0}^{1} \frac{x^4+1}{(x+1)(x^2+2)} dx$**.**

4. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^4+3x^2+1} dx$**.**

Timp de lucru: 50 minute
Barem: 1p din oficiu. **1**. 2p**. 2**. 1p**. 3.** 3p**. 4.**3p

Capitolul 9

Aplicaţii ale calculului integral

9.1. Calculul unor limite de şiruri cu ajutorul integralelor

În acest paragraf vom da o metodă de calcul a limitei unor șiruri, ținând cont de legătura dintre integrabilitatea unor funcții și sumele Riemann asociate acestor funcții.

Reamintim următoarea:

TEOREMĂ

O funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă dacă și numai dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi șirul de diviziuni $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n)$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și oricare ar fi punctele intermediare $x_{i-1}^n \le \xi_i^n \le x_i^n$, $(1 \le I \le k_n$, $n \in \mathbb{N})$ șirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge la I.

Alegând diviziuni echidistante, putem spune că dacă o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci oricare ar fi fi punctele intermediare $x_{i-1}^n \le \xi_i^n \le x_i^n$, $(1 \le i \le k_n, n \in \mathbb{N})$ șirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi))_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $\sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi\right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^n\right)$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f,\xi\right) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^n\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Exemple

1. Să arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2$.

Vom aduce suma considerată la o formă convenabilă.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Considerăm funcția $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$ și diviziunea echidistantă

$$\Delta_n=\left(x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<\ldots<x_n=\frac{n}{n}=1\right) \text{ cu norma } \|\Delta_n\|=\frac{1}{n}\xrightarrow{(n\to\infty)}0.$$

În fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ alegem punctul intermediar $\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$.

Observăm că termenul general al șirului din enunț este chiar suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ_n și punctelor intermediare ξ_i:

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n}.$$

Cum funcția f este integrabilă, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_i)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2.$

2. Să calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k+kn+n^2}$.

Aducem șirul la o formă convenabilă.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+kn+n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n}+1\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n}+1}.$$

Considerăm funcția $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$ care este continuă, deci integrabilă.

Pentru diviziunea $\Delta_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}=1\right)$ și pentru punctele intermediare

$\xi_k=\frac{k-1}{n}+\frac{k-1}{n^2}$ șirul sumelor Riemann asociat funcției f, diviziunii Δ_n

și sistemului de puncte intermediare este

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}+\frac{k-1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k-1}{n^2}+\frac{k-1}{n}+1}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\frac{k-1}{n^2}+\frac{k-1}{n}+1}\right)=\frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n}+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n}+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=x_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{n}}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi)=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$, deducem $x_n\to\ln 2$.

Limita șirului de mai sus poate fi calculată și folosind criteriul „cleștelui".

Putem scrie $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}+1}\le\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n^2}+\frac{k}{n}+1}\le\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n}+1}$ și asemănător se

demonstrează că cele două șiruri cu care am majorat, respectiv minorat, au limita

$\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{1\le i<j\le n}\cos\frac{i}{n}\cos\frac{j}{n}$.

Soluție

Aducem la o formă convenabilă:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}\cos\frac{i}{n}\cos\frac{j}{n}=\frac{1}{2n^2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}\right].$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)^2=\left(\int_0^1\cos x\mathrm{d}x\right)^2=\sin^2 1$, iar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}\right)=0\cdot\int_0^1\cos^2 x\mathrm{d}x=0.$$

În final, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{1\le i<j\le n}\cos\frac{i}{n}\cos\frac{j}{n}=\frac{\sin^2 1}{2}$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze limita următoarelor șiruri:

a) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$; b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$; c) $x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n+k}$;

d) $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{n}{n+2k}}$; e) $x_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$; f) $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$;

g) $x_n = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)\sqrt{n^2+k^2}}$; h) $x_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{k\pi}{2n}$; i) $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1+\frac{k}{n}}$.

2. Să se calculeze limita următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; b) $a_n = \frac{\sqrt[n]{(n^2+1^2)(n^2+2^2)...(n^2+n^2)}}{n^2}$;

c) $a_n = \left(\frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot n^n}{n^{1+2+3+...+n}}\right)^{\frac{1}{n^2}}$; d) $a_n = \sqrt[n]{C_{2n}^{n}}$,

3. Să se arate că dacă $f: [0, 1] \to (0, \infty)$ este integrabilă, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

4. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{n^2+k}}$.

5. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

6. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{k}{n}}$.

7. Fie $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă.

Atunci $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p-1}}{n^p} f\left(\frac{k^p}{n^p}\right) = \frac{1}{p}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \ \forall\, p \geq 1$.

9.2. Aria unei suprafeţe plane

În acest paragraf vom defini clasa mulțimilor care au arie și vom da o metodă de calcul a ariilor unor astfel de mulțimi.

DEFINIŢIE

Vom spune că o mulțime M mărginită din plan are **arie** dacă există și este unic un număr real, notat cu $S(M)$, mai mare sau egal decât aria oricărei suprafețe poligonale incluse în M și mai mic sau egal decât aria oricărei suprafețe poligonale care include pe M.

Numărul $S(M)$ se numește **aria mulțimii *M***.

În continuare vom da o formulă pentru calculul ariei subgraficului unei funcții.

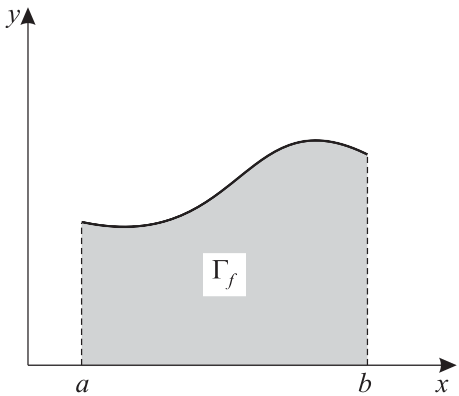
DEFINIŢIE

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcție integrabilă.

Mulțimea

$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x)\}$

se numește *subgraficul* lui f.



TEOREMĂ

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcție integrabilă. Atunci subgraficul lui f are arie și

$$S(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

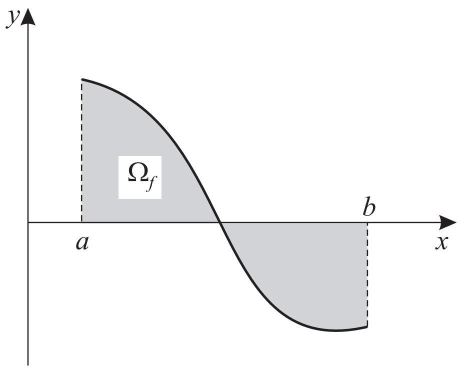
COROLAR

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă și mulțimea

$\Omega_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ a \le x \le b, y$ între 0 și $f(x)\}$.

Atunci mulțimea Ω_f are arie și

$$S(\Omega_f) = \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x.$$



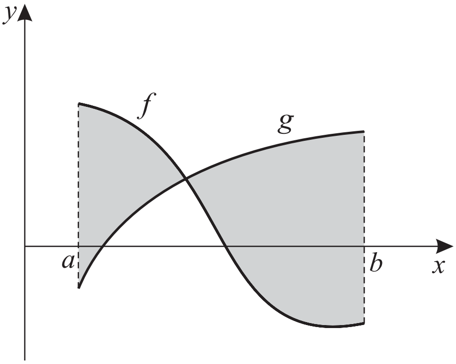
COROLAR

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții integrabile și mulțimea

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \; y \text{ este între } f(x) \text{ și } g(x)\}.$$

Atunci mulțimea $\Gamma_{f,g}$ are arie și

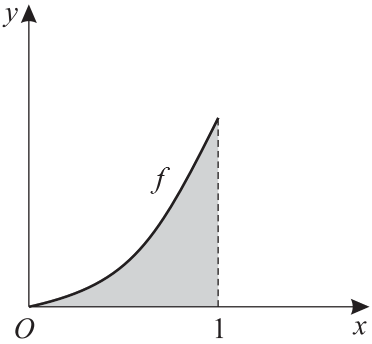
$$S(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$



Exemple

1. Să determinăm aria subgraficului funcției $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

$$S(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



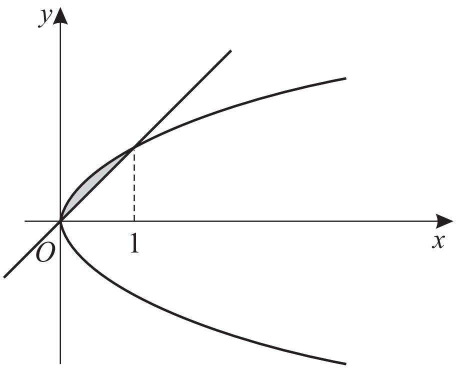
2. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Să se arate că Γ_f nu are arie.

Fie P o suprafață poligonală inclusă în Γ_f.
Cum între oricare două numere reale există un număr irațional, mulțimea P nu poate avea puncte deasupra axei Ox, deci aria lui P este zero.
Să considerăm Q, o suprafață poligonală care conține Γ_f. Cea mai mică suprafață poligonală care conține Γ_f este mulțimea $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Rezultă $S(Q) \ge S(A) = 1$.
Din cele două situații deducem că nu există un număr real care îndeplinește cele două condiții din definiție, deci mulțimea dată nu are arie.

3. Să calculăm aria mulțimii cuprinse între dreapta de ecuație $y = x$ și parabola de ecuație $y = x^2$.

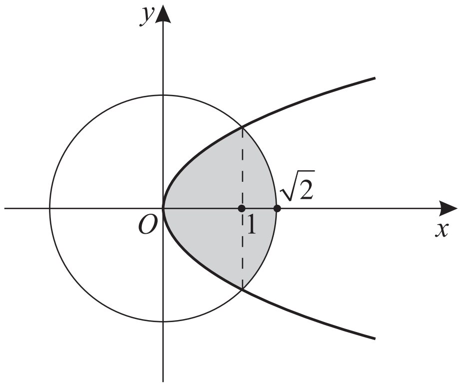
Vom rezolva sistemul $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$ pentru a determina punctele de intersecție ale celor două curbe și obținem punctele $O(0, 0)$, $P(1, 1)$. Atunci



$$S(\Gamma_f) = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right)dx = \left.\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între parabola $y^2 = x$ și cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 2$.



Soluție

Pentru a detemina coordonatele punctelor de intersecție ale celor două curbe, vom rezolva sistemul $\begin{cases} y^2 = x \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ și obținem $A(1, 1)$, $B(1, -1)$.

Aria mulțimii cuprinse între cerc și parabolă se poate calcula datorită simetriei

$$S = 2\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \sqrt{2-x^2}\right) \mathrm{d}x = 2\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1\right) - 2I = \frac{4}{3} - 2I .$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x + \int_0^1 x\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 + x\sqrt{2-x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x .$$

Deducem că $I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$.

2. Fie funcția $f : [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Să se arate că aria mulțimii punctelor aflate între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = 2$ este cuprinsă între $\sqrt{2}$ și 3.

Soluție

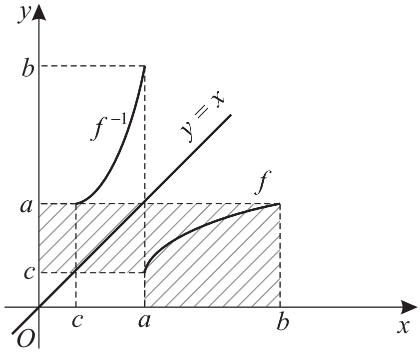
Aplicăm teorema de medie și obținem existența unui punct $c \in (1, 2)$ astfel încât

$$\int_1^2 (1+x)^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}.$$

Ținem cont că $\sqrt{2} < 2^{\frac{1}{c}} < (1+c)^{\frac{1}{c}} < 3^{\frac{1}{c}} < 3$ și obținem concluzia dorită.

3. Fie $f : [a, b] \to [c, a]$, $a, b, c > 0$, o funcție continuă și bijectivă.
Să se arate că:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = ba - ac.$$



Soluţie

Egalitatea poate fi exprimată în funcție de arii.
Astfel, $S_1 + S_2 = ba - ac$.

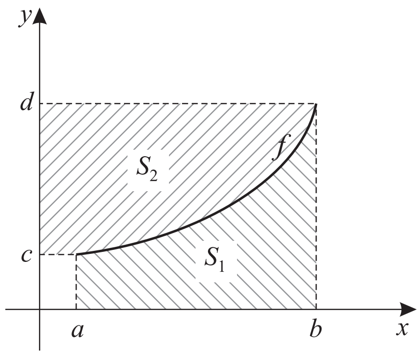
4. Fie $f : [a, b] \to [c, d]$, $a, c \geq 0$, o funcție continuă, strict crescătoare și surjectivă.

Să se arate că există un unic $\varepsilon \in (a, b)$, astfel încât $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (\varepsilon - a)c + (b - \varepsilon)d$.

Soluţie

Cum f este strict crescătoare și surjectivă, deducem că f este bijectivă.
Știm că funcția f este pozitivă și vom nota

$$S_1 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ S_2 = \int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$



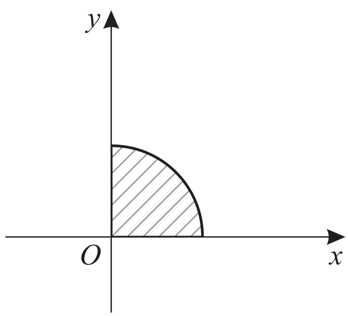
Din figură se observă că $S_1 + S_2 = bd - ac$. (*)
Conform teoremei de medie, există $\lambda \in (c, d)$

astfel încât $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = (d - c)f^{-1}(\lambda)$.

Fie $\varepsilon = f^{-1}(\lambda)$ și ținând cont de (*) avem $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (\varepsilon - a)\,c + (b - \varepsilon)d$

Observație. Unicitatea lui ε este evidentă.

5. Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$.



Soluţie

Graficul funcției $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ este un sfert din cercul unitate.

Astfel, aria sfertului de disc este $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ pe de o parte, iar pe de altă parte este $\frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4}$, deci $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze aria subgraficului următoarelor funcții:

a) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$; b) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$;

c) $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$; d) $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;

e) $f: [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$; f) $f: \left[-\frac{2\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$;

g) $f: [-2, 0] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$; h) $f: [e, e^2] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.

2. Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între axa Ox și graficul funcției f pentru următoarele funcții:

a) $f: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$; b) $f: \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$;

c) $f: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$; d) $f: [-3, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$;

e) $f: [-\sqrt{3}, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$; f) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = -e^{-x}$.

3. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f, g}$ pentru următoarele perechi de mulțimi:
a) $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = x^3$;
b) $f, g : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = 4 - x^2, g(x) = x^2$;
c) $f, g : [-1, 0] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2}, g(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
d) $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$;
e) $f, g : [2, 5] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x, g(x) = -x^2$.

4. Să se calculeze aria mulțimii dintre curba $y = x^2$ și dreapta $x + y - 2 = 0$.

5. Să se calculeze aria mulțimii dintre curba $y^2 = 4x$ și dreapta $y = 2x$.

6. Să se calculeze aria mulțimii din primul cadran delimitate de curbele

$y = x, y = 2x, y = \frac{1}{x}$.

7. Să se calculeze aria celor trei regiuni în care este despărțită elipsa de ecuație

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ de hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

8. Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între parabola de ecuație $y^2 = x$ și dreapta de ecuație $y = 2x - 1$.

9. Să se calculeze folosind ariile $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

9.3. Câteva aplicaţii ale calculului integral în fizică

1. Accelereția unei rachete crește proporțional cu pătratul timpului: $a = \alpha t^2$.
La momentul $t = 0$ avem viteza $v = 0$ și înălțimea $x = 0$.
Aflați legea vitezei și legea mișcării.

Soluţie

Avem $v = \int_0^{t_0} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \alpha t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{\alpha t_0^3}{3}$ (legea vitezei),

iar pentru legea mișcării $x = \int_0^{t_0} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \dfrac{1}{3}\alpha t^3\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{12}\alpha t_0^4$.

2. O rachetă pornește din repaus față de un sistem de referință inerțial, are masa m_0 și expulzează continuu gazele de ardere în direcția mișcării cu viteza relativă u față de rachetă. Aflați viteza rachetei în funcție de masa ei.

Soluţie

Dacă $\vec{F}$ este forța exterioară rachetei, $\vec{F_r}$ este forța reactivă, avem $\vec{F} + \vec{F_r} = m\vec{a}$,

unde $\vec{F_r} = \vec{u}m'(t)$, $m'(t)$ fiind debitul de expulzare.

Cum în cazul nostru $\vec{F} = 0$, avem $\vec{u}m'(t) = m\vec{a} = m\overrightarrow{v'(t)}$, $v'(t) = \dfrac{um'(t)}{m(t)}$.

$$v = \int_{t_0}^{t_1} u\frac{m'(t)}{m(t)}\,\mathrm{d}t = u\ln\frac{m_1}{m_0} = -u\ln\frac{m_0}{m_1}$$, unde m_1 este masa rachetei la momentul t_1.

OBSERVAŢIE

Viteza rachetei are sens opus vitezei de expulzare a gazelor. Când masa rachetei se reduce la jumătate, viteza atinsă de rachetă va fi $\vec{v} = -\vec{v'}\ln 2$.

Lucru mecanic

Considerăm o particulă P care se mişcă pe un interval $J \subset \mathbb{R}$ sub acţiunea unei forţe F. Forţa F are în fiecare punct $t \in J$ o valoare $F(t)$,de aceea vom identifica $F(t)$ cu un număr real şi vom considera forţa F ca o funcţie $F : J \to \mathbb{R}$.

Dacă forţa F este constantă, adică $F(t) = F_0$, $\forall\, t \in J$, atunci lucrul mecanic efectuat de forţa F pentru a deplasa particula P dintr-un punct a într-un punct b este $L_{a,b} = F_0(b - a)$.

În cazul în care forţa nu este constantă, vom considera o diviziune

$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ a intervalului $[a, b]$ şi vom avea

$L_{a,b} = L_{x_0,x_1} + L_{x_1,x_2} + \ldots + L_{x_{n-1},x_n}$, unde L_{x_{k-1},x_k} este lucrul mecanic efectuat de forţa F pentru a deplasa particula P din punctul x_{k-1} în punctul x_k.

Dacă norma diviziunii Δ este suficient de mică, atunci forţa F se aproximează, pe fiecare interval $[x_{k-1}, x_k]$, prin forţa constantă F_k.

Deci lucrul mecanic efectuat de forţa F pentru a deplasa particula P de la a la b se aproximează cu $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k\left(x_k - x_{k-1}\right)$.

OBSEVAŢIE

Ţinând cont de consideraţiile anterioare, putem spune că lucrul mecanic efectuat de forţa F pentru a deplasa particula P de la a la b este $L_{a,b} = \int_a^b F\left(x\right)\mathrm{d}x$.

3. O rachetă de masă m porneşte vertical în sus sub acţiunea unei forţe de tracţiune $F = 2mg(1 - y)$. Aflaţi lucrul mecanic efectuat de această forţă de tracţiune pe toată durata urcării, de la înălţimea $y = 0$ la înălţimea $y = y_0$.

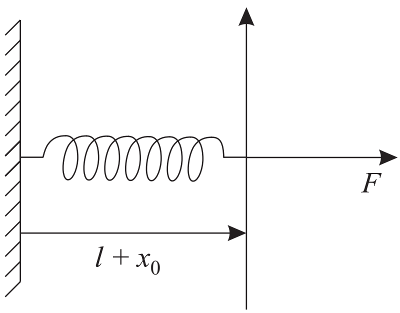
Soluţie

Lucrul mecanic cerut este $L = \int\limits_0^{y_0} F\mathrm{d}y = \int\limits_0^{y_0} 2mg\left(1 - y\right)\mathrm{d}y = 2mg\left[y_0 - \frac{1}{2}y_0^2\right]$.

4. Ştim că forţa necesară pentru a întinde un resort de lungime dată l, până la lungimea $l + x$ este proporţională cu lungimea x, adică $F(x) = kx$, $k > 0$.

Lucrul mecanic necesar pentru a întinde resortul până la lungimea $l + x_0$ este

$$L = \int\limits_0^{x_0} kx dx = k\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{x_0} = \frac{k}{2}x_0^2 .$$



9.4. Volumul corpurilor de rotaţie

În paragraful ce urmează, presupunem cunoscute calculele referitoare la poliedre şi la corpurile rotunde (cilindrul, con, trunchiul de con).

DEFINIŢIE

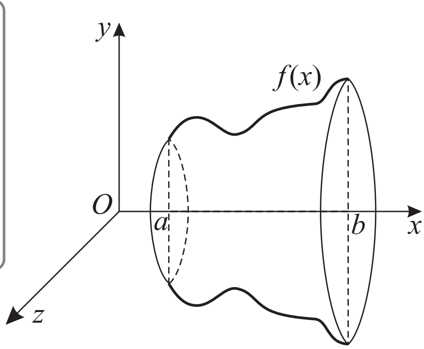
Vom spune că o mulțime M de puncte din spațiu are **volum** dacă există şi este unic un număr $v(M)$ mai mare sau egal decât volumul oricărei mulțimi poliedrale incluse în M şi este mai mic sau egal decât volumul oricărei mulțimi poliedrale care include pe M.

DEFINIŢIE

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcție.
Mulțimea

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

se numeşte *corpul obținut prin rotirea subgraficului funcției f în jurul axei Ox.*



Modul de calcul al volumului acestui corp este dat de următoarea

TEOREMĂ

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcție integrabilă. Atunci mulțimea C_f are volum şi

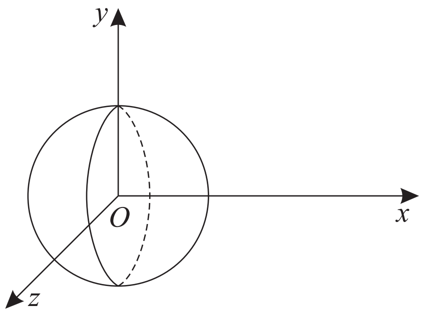
$$\nu(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Exemple

1. Să calculăm volumul sferei de rază $r > 0$.
Vom considera funcția $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\ .$$

Dacă efectăm o rotație a graficului funcției f în jurul axei Ox vom obține o sferă de rază r cu centrul în originea axelor.



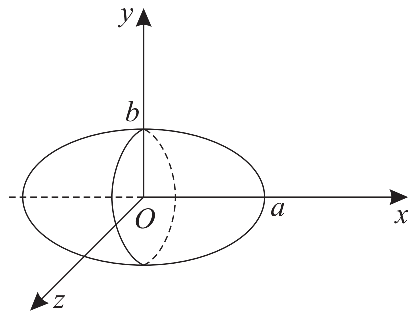
Funcția considerată este, evident, integrabilă și volumul corpului obținut va fi

$$v=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r}=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

2. Să se găsească volumul elipsoidului de rotație.
Vom face o rotație a graficului funcției

$$f:[-a,a]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ a,b\geq 0$$

în jurul axei Ox.



Funcția este continuă, deci integrabilă și obținem volumul

$$v=\pi\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4\pi}{3}ab^2.$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație determinate de următoarele funcții:
a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=2x-x^2$;
b) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$;
c) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^3}$;
d) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^3-x^4}$;
e) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}$;
f) $f:\left[\frac{1}{e},e\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\frac{\ln x}{x^2+1}}$.
g) $f:[1,4]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4}{x}$.

2. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția

$$f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ \frac{2}{\pi}x-1, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}.$$

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția

$$f : [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x}.$$

2. Să se calculeze aria graficului cuprinsă între dreptele $x = 1$, $x = e$, axa Ox și curba $y = 2x - x \ln x$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{1}{n^{i+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^i\right)$.

Timp de lucru: 50 minute
Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.

Testul 2

1. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția

$$f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x.$$

2. Să se calculeze aria graficului cuprinsă între dreptele $x = 1$, $x = 3$, axa Ox și curba $y = (x + 1) \ln x$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+k}{n^3}}$.

Timp de lucru: 50 minute
Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.

Testul 3

1. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia

$$f:\left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \arccos x.$$

2. Să se calculeze aria mulţimii din plan cuprinse între curbele de ecuaţie $y = e^x$, $y = e^{-x}$ şi dreptele $x = 1$, $x = 2$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{n}\right)$.

Timp de lucru: 50 minute
Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.

Testul 4

1. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia funcţia

$$f:\left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{1-x^2}\ .$$

2. Să se calculeze aria mulţimii din plan cuprinse între parabola de ecuaţie $y^2 = x$ și dreapta $y = 2x - 1$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k}{k + \sqrt{8n^2 - 2kn}}$.

Timp de lucru: 50 minute
Barem: 1p din oficiu. **1.** 3p. **2.** 3p. **3.** 3p.

Teste de sinteză pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Testul 1

1. Să se determine mulțimea $\left\{x\in \mathbb{N} \,\middle|\, \dfrac{2x^2+x+1}{3x+1}\in \mathbb{N}\right\}$.

2. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

3. Fie $d\in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Să se arate că dacă există a b, c, $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a + b\sqrt{d} = c + q\sqrt{d}$, atunci $a = c$ și $b = q$.

4. Să se arate că dacă $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ cu a, b, $c \in \mathbb{Q}$, atunci $a = b = c = 0$.

Testul 2

1. Să se calculeze $\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}$.

2. Să se rezolve ecuația $\left[\dfrac{3x-1}{2}\right] = \{x\}$.

3. Fie $f : A \to B$. Să se arate că $G_f = A \times B$ dacă și numai dacă B are un singur element, unde G_f este graficul funcției f.

4. Fie a, $b > 0$ și $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n + b^n = 2$. Să se arate că:

a) $ab \le 1$; b) $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right) \ge 4$.

Testul 3

1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \ge 0 \\ x^2 - ax + 1, & x < 0 \end{cases}$ să fie:

a) injectivă; b) surjectivă; c) bijectivă.

2. Fie f, g: $A \to A$ astfel încât $f \circ g \circ f$ să fie bijectivă. Să se arate că funcțiile f și g sunt bijective.

3. Să se arate că nu există funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone, astfel încât $(f \circ f)(x) = -2x + 1$.

4. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x, y) = 3^x \cdot 5^y$. Să se studieze injectivitatea și surjectivitatea lui f.

Testul 4

1. Să se arate că familia de parabole $f_m(x) = (m + 3)x^2 - (3m + 1)x + 2m - 1$, $x \in \mathbb{R}$ are două puncte fixe.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei $f_m(x) = mx^2 - (2m + 1)x + m - 1$, $x \in \mathbb{R}$, să fie situat în cadranul II.

3. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Să se calculeze expresia $E = \dfrac{x_1^4 - x_1^2 + 1}{x_1^3 + 2} + \dfrac{x_2^4 - x_2^2 + 1}{x_2^3 + 2}$.

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $m\sqrt[3]{(x^3 + 8)^2} + \sqrt[3]{x^3 + 8}\,(m - 1) + 2 = 0$ să aibă o soluție.

Testul 5

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $(m - 1)x^2 + 2mx + m - 2 \le 0$, $\forall\, x > 0$.

2. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1) = 12xy\\ (x+1)^2(y+1)^2 = 30xy\end{cases}$.

3. Arătați că dacă $a(4a - 2b + c) > 0$, atunci $b^2 > 4ac$.

4. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} mx^2 + (m-1)x - 6, & x < 1\\ -x^2 - 2x + m, & x \ge 1\end{cases}$ să fie strict descrescătoare.

Testul 6

1. Determinați $x \in \mathbb{Q}$ pentru care: a) $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; b) $\left(-\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{2x}}$.

2. Determinați $x \in \mathbb{Q}$ pentru care are sens expresia $(x^2 - 5x)^x$.

3. Rezolvați sistemul $\begin{cases}\sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 5\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 6\end{cases}$.

4. Considerând șirul $(x_n)_{n\ge1}$ dat prin relația de recurență $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{5}{x_n^2}\right), n \ge 1, x_1 = 1$.

a) Calculați x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

b) Comparați termenii anteriori cu numărul $\sqrt[3]{5}$. Care dintre ei sunt aproximări cu două zecimale exacte ale lui $\sqrt[3]{5}$?

Testul 7

1. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{89} \lg(\operatorname{tg} k^0)$.

2. Să se demonstreze inegalitatea $\log_{ab}c + \log_{bc}a + \log_{ca}b \geq \frac{3}{2}$, $a, b, c > 1$.

3. Aflați numărul cifrelor numărului 3^{100}.

4. Arătați că $\operatorname{tg}\left(\lg \frac{x}{y}\right) + \operatorname{tg}\left(\lg \frac{y}{z}\right) + \operatorname{tg}\left(\lg \frac{z}{x}\right) = \operatorname{tglg}\frac{x}{y} \cdot \operatorname{tglg}\frac{y}{z} \cdot \operatorname{tglg}\frac{z}{x}$, $x, y, z > 0$.

Testul 8

1. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Demonstrați $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$.

2. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $x^2 - (a - i)x + 20 + 5i = 0$ admite o rădăcină reală.

3. Determinați $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ astfel încât $z_1 + z_2 + ... + z_n = -ni$.

4. Determinați funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea $f(x) + f(\varepsilon x) = x$, $\forall x \in \mathbb{C}$, unde $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\varepsilon^3 = 1$.

Testul 9

1. a) Arătați că dacă $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, atunci $\cos n\alpha = \frac{z^{2n}+1}{2z^n}$, $\sin n\alpha = \frac{z^{2n}-1}{2iz^n}$.

b) Calculați $a = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$.

2. Calculați $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^p$, unde ε_k sunt rădăcinile de ordinul n ale unității, iar $p \in \mathbb{N}$, fixat.

3. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ și $\cos x + \cos y + \cos z = 0$. Demonstrați că $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ și $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

4. Fie $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| = |w| = 1$. Demosntrați că dacă $|z + w| = 1$, atunci $w = z \cdot \varepsilon$ sau $w = y \cdot \varepsilon^2$, unde ε este rădăcina de ordinul trei a unității.

Testul 10

1. a) Să se arate că $\arcsin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$.

b) Să se calculeze $\sum\limits_{k=1}^{n}\arcsin\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+2}}$.

2. Arătați că $\cos(n(\operatorname{arctg} 2\sqrt{2})) \in \mathbb{Q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Să se arate că $(\arcsin x)(\arccos x) \le \dfrac{\pi^2}{16}$, $\forall\, x \in [-1, 1]$.

4. Fie funcția $f: [0, 1] \to \left[-\dfrac{\pi^2}{4}, 0\right]$ astfel încât $f(\sin t) = t^2 - \pi t$, $\forall\, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Demonstrați că: a) $f(x) = (\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x$; b) f este bijectivă.

Testul 11

1. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} 2^x + x = 2^y + y \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases}$.

2. Să se rezolve ecuația: $6^x + 2 = 3^x + 2^{x+1}$.

3. Să se rezolve ecuația:

$$\log_a x + \log_{a^2} x^2 + ... + \log_{a^n} x^n - \frac{1}{2}\log_a x^{n+1} = \sqrt{\log_a x^n},\ n \in \mathbb{N},\ a > 0,\ a \ne 1.$$

4. Să se arate că nu există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $a^{x^2+x-a} > \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Testul 12

1. Câte numere naturale mai mici sau egale cu 300 se divid cu 2 sau cu 3 sau cu 5?

2. Să se determine exponentul lui 2 din descompunerea în factori a numărului A_{2n}^{n}.

3. Să se arate că dacă $A_m^{n+1} = 2A_m^{n-1}$, atunci m și n sunt prime între ele.

4. Dintre submulțimile mulțimii $\{1, 2, 3, ..., n\}$ cu k elemente, câte:

a) nu-l conțin nici pe 1, nici pe 2?

b) nu conțin unul dintre numerele 1 și 2, dar îl conțin pe celălalt?

c) conțin ambele numere?

d) deduceți egalitatea $C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$ ca rezultat al punctelor a), b), c).

Testul 13

1. Într-un tramvai cu trei vagoane se urcă, la întâmplare, şapte persoane. Care este probabilitatea ca în primul vagon să urce patru persoane?

2. Un profesor dă ca temă de vacanţă 100 de exerciţii. Un elev rezolvă 96 dintre acestea. După vacanţă, profesorul verifică rezolvarea a şase probleme dintre cele 100.
Care este probabilitatea ca elevul să fie întrebat de rezolvarea cel puţin a uneia dintre problemele nerezolvate?

3. a) Dintr-o urnă în care se află *n* bile albe şi *m* negre se extrag *k* bile.
Care este probabilitatea ca printre bilele extrase să se obţină *r* bile albe?

b) Calculaţi $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + ... + C_n^k C_m^0$.

4. Fie $A = \{f / f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, f \text{ funcţie}\}$. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare o funcţie din *A*, aceasta să fie injectivă? Dar surjectivă? Dar bijectivă?

Testul 14

1. Să se calculeze $\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k}$.

2. Să se determine coeficientul lui $x^2y^3zw^4$ din dezvoltarea $(x + y + z + w)^{10}$.

3. Calculaţi suma ultimelor trei cifre ale numărului 19^{92}.

4. Calculaţi suma primelor 30 de zecimale ale numărului $(1 - \sqrt{2})^{100}$.

Testul 15

1. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale nenule este o progresie geometrică dacă şi numai dacă $\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2\right) = (a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n)^2$.

2. Determinaţi primul termen şi raţia unei progresii geometrice în funcţie de S_1 şi S_2, ştiind că $S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ şi $S_2 = a_{11} + a_{12} + ... + a_{20}$.

3. Să se arate că $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{54}$ nu sunt termeni ai unei progresii geometrice.

4. Să se afle termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ şi $a_{n+1}^5 = a_{n+2}^3 \cdot a_n^2$, $\forall\, n \geq 1$.

Testul 16

1. Determinaţi $x \in S_4$ astfel încât:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rezolvați în S_4 ecuația $y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Fie numerele $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Să se determine $\sigma \in S_n$ astfel încât $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)}$ să fie maximă.

4. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$. Calculați $\min \{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k = e\}$.

Testul 17

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 4-x & 5-x \\ 3-x & 5-x & 3-2x \end{vmatrix} = 0$.

2. Să se rezolve ecuația: $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = 0$ să admită o rădăcină dublă număr întreg.

4. Să se determine rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Testul 18

1. Determinați $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \beta x_4 = \gamma \end{cases}$ să fie compatibil și rangul matricei sistemului să fie 2.

2. Se consideră numerele complexe distincte două câte două a, b, c, d. Arătați că sistemul omogen $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ ax + by + cz + dt = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2t = 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3t = 0 \end{cases}$ admite numai soluția banală.

3. Să se găsească condiția de compatibilitate a sistemului $\begin{cases} x-3y+4=0 \\ x+y-4\alpha\beta=0 \\ (\alpha^2+1)x-(2\alpha\beta+1)y-\gamma=0 \end{cases}$,

unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

4. Să se discute după valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ natura sistemului: $\begin{cases} x+2y+(a-3)z=5 \\ -x+(a-5)y+2z=-1 \\ 2x+y+z=a \end{cases}$.

Testul 19

1. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt[4]{n^8+1}-n^2\right)$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+a}+b\sqrt{n+b}+c\sqrt{n+c}\right)$, unde a, b, c sunt numere reale astfel încât $a+b+c=0$.

3. Fie $a>0$ și șirul definit recurent astfel $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu $x_1=a$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$.

Testul 20

1. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n!(n+2k)!}{[(n+k)!]^2}\right)^n$, $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $a>0$. Se consideră șirul definit prin recurența $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{1+nx_n^2}$, $x_1=a$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Să se studieze convergența șirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(nx_n)_{n\geq 1}$ și în cazul în care au limită să se calculeze limitele lor.

3. Fie $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$, $n\geq 1$. Să se arate că nu există nici o funcție rațională f, astfel încât $x_n=f(n)$, $\forall\ n\geq 1$.

4. a) Dacă p_n este al n-lea număr prim și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{n\ln n}=1$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_{n+k}}{p_n}$, $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Dacă nu există $\lim\limits_{n\to\infty} n|\sin n|$, să se demonstreze că nu există $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin n|$.

Testul 21

1. Să se determine numerele reale $a > 0$ și $b > 0$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{ax^5+(b+1)x^4+1}-\sqrt[5]{bx^5+x^4-1}\right)=2.$$

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Arătați că există un număr real $\delta > 0$ astfel încât $\cos x + a\sin bx > 0$, $\forall\, x \in (-\delta, \delta)$.

ii) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$.

3. Să se determine parametrii reali $a > 0$, $b > 0$ și $c > 0$ astfel încât graficul funcției $f(x) = ax + \sqrt{bx^2+cx-1}$ să aibă ca asimptotă oblică spre ∞ dreapta $y = 2x + 1$ și ca asimptotă orizontală spre $-\infty$ dreapta $y = -1$.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x>0}}\left[\dfrac{1}{\ln x}\right]$.

Testul 22

1. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

a) Arătați că funcția f are proprietatea Darboux pe $\mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția f nu este continuă în punctul $x_0 = 0$.

2. Fie $f: [0, 1] \to [0, 1] \cup [2, 3]$ o funcție continuă astfel încât $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3$. Să se arate că:

a) f nu este surjectivă; b) f nu este injectivă.

3. Fie $f: \mathbb{R} \to (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty), f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + 1)$.

a) Să se arate că f este bijectivă.

b) Să se arate că f nu este continuă în $x_0 = 0$.

c) Să se arate că funcția f^{-1} este continuă.

d) De ce funcția f^{-1}, deși continuă, are inversa $(f^{-1})^{-1} = f$ discontinuă?

4. Să se arate că nu există funcții surjective și continue $f: [0, 1] \to (0, 1)$.

Testul 23

1. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xe^x$ în punctul $x = 0$.

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ae^{2x}, & x \le 0 \\ \sin 2x + b\cos 3x, & x > 0 \end{cases}$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

3. Fie $f : (0, \infty) \to (1, \infty), f(x) = e^x + x^2 + x$.

a) Să se arate că funcția f este bijectivă.

b) Să se arate că f^{-1} este derivabilă pe $(1, \infty)$ și să se calculeze $f^{-1}(e^2 + 6)$.

4. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + 2x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(3)}{(k-1)!}$.

Testul 24

1. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă în punctele a și b astfel încât $f(a) < 0$ și $f'(b) > 0$. Să se arate că funcția f are un punct de minim $c \in (a, b)$.

2. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcții Rolle. Să se arate că dacă $f(a) = f(b) = 0$ și $f'(x)g(x) \ne f(x)g'(x)\ \forall\ x \in (a, b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in [a, b]$ astfel încât $g(c) = 0$.

3. Să se arate că $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 50° < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36}$.

4. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție Rolle astfel încât $f(a) < f(b)$.
Să se arate că $\exists\ c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) > 0$.

Testul 25

1. Să se arate că $\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x,\ \forall\ x > 0$.

2. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{me^x - (1+m)e^{-x}}{1+e^x}$ este monotonă pe $\mathbb{R}$?

3. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ x^2 - 1, & |x| \le 1 \\ |1 - \ln x|, & x > 1 \end{cases}.$$

4. Să se arate că pentru orice $a \in [0, 1]$ există $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ și $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = a$.

Testul 26

1. Să se studieze posibilitatea aplicării teoremei lui l'Hospital în cazul următoarei limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{xe^{2x} + xe^{x} - 2e^{2x} + 2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}.$$

2. Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^3 + 3x^2 - 9\ln x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

3. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{1-x^2}}, & |x| > 1 \\ x^2 - 1, & |x| \le 1 \end{cases}$.

4. Să se arate că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, funcția $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sin x$ are un punct de inflexiune $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

Testul 27

1. Se dau șirurile $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$ și $y_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

Arătați că cele două șiruri sunt monotone și mărginite.

2. Se dă șirul definit prin $a_0 \in (0, 3)$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{a_n}$.

a) Studiați monotonia și mărginirea șirului.

b) Arătați că $\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-3} = (-3)\frac{a_n+1}{a_n-3}$ și deduceți expresia lui a_n în funcție de a_0.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} [a\ln(n+1) + b\ln(n+2) + c\ln(n+3)]$.

4. a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha} + 2^{\alpha} + ... + n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Determinați $\beta \in \mathbb{R}$ pentru care există și este finită limita: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + ... + \sqrt[3]{n}}{n^{3}}$.

Testul 28

1. Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x}$.

2. Cercetați dacă funcția $f(x) = \dfrac{m + \sin\frac{1}{x}}{x}$, $m \in \mathbb{R}$, are limite laterale în 0.

3. Studiați continuitatea funcțiilor următoare în punctul indicat:

a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ x\ln x, & x > 0 \end{cases}$, în 0; b) $f(x) = [\ln x]$, în 2.

4. Fie funcțiile continue $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$, f surjectivă. Arătați că există cel puțin un punct $x_0 \in [0, 1]$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$.

Testul 29

1. Studiați derivabilitatea funcțiilor următoare pe domeniul maxim de definiție.

a) $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$; b) $f(x) = \arcsin(x + 2)$; c) $f(x) = \max\left(1, x, \dfrac{1}{x}\right)$.

2. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2 + mx + 2}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

3. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2\sin x + \cos x, & x \ge 0 \\ ax^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$

să fie derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$.

4. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (1 + x)\ln x$.
Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(0)$.

Testul 30

1. Determinați punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[5]{2x^2 - x^3}$.

2. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-1+x} - x$.

a) Să se arate că $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că șirul $x_{n+1} = e^{-1+x_n}$, $x_1 > 1$ este monoton, nemărginit determinând limita sa.

3. Arătați că $\arcsin(\cos x) = x - \dfrac{3\pi}{2}$, $\forall\, x \in [\pi, 2\pi]$.

4. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$.

Indicaţii şi soluţii

Capitolul 1. Grupuri

Pag. 19

1. Sunt legi de compoziție asocierile de la punctele: a); b); d); f).

2. $1 * (-2) = 1$; $-3 * 0 = 3$; $(0 * 2) * (-1) = 2 * (-1) = 1$; $(a * 2) * 3 = (|a| + 2 - 2|a|) * 3 = (2 - |a|) * 3 = |2 - |a|| + 3 - 3|2 - |a|| = 3 - 2|2 - |a||$.

3. $(a, b) * \left(\dfrac{-a}{b(a+b)}, \dfrac{1}{b}\right) = \left(0, \dfrac{-a}{b^2(a+b)}\right)$.

4.

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	3	1
3	3	4	2	1
4	4	1	4	1

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

7. a) $x, y \in (-2, \infty)$ $x \top y \in (-2, \infty) \Leftrightarrow 3xy + 6x + 6y + 10 > -2 \Leftrightarrow xy + 2x + 2y + 4 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) > 0$, adevărat deoarece $x + 1 > 0$, $y + 2 > 0$; b) observăm că $(x * y) * z = 9xyz + 18(xy + xz + yz) + 36(x + y + z) + 70$; însă $(x * y) * z \in (-2,\infty)$; rezultă că $9xyz + 18(xy + xz + yz) + 36(x + y + z) + 72 > 0 \Leftrightarrow xyz + 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) + 8 > 0$.

8. $x * y = (x - 9)(y - 9) + 9$; $x \in [8, 10] \Leftrightarrow -1 \le x - 9 \le 1 \Leftrightarrow |x - 9| \le 1$, analog $|y - 9| \le 1$. Atunci $|x - 9||y - 9| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le (x - 9)(y - 9) \le 1 \Leftrightarrow 8 \le (x - 9) + (y - 9) + 9 \le 10 \Leftrightarrow x * y \in [8, 10]$.

9. $2xy - x - y + m > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4xy - 2x - 2y + 2m > 1 \Leftrightarrow (2x -)(2y - 1) + 2m - 2 > 0$ pentru orice $x, y \in \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$; rezultă $2m - 2 \ge 0$, adică $m \ge 1$.

10. $x \circ y \ne i \Leftrightarrow xy - i(x + y) + 1 + i \ne i \Leftrightarrow xy - i(x + y) + 1 \ne 0 \Leftrightarrow (x - i)(y - i) \ne 0$.

11.a) Fie M o parte stabilă finită a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea și fie $x \in M$; atunci $x^n \in M$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$. Șirul puterilor lui x nu are oricare doi termeni distincți, deoarece în caz contrar ar fi infinit. Deci există $k, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^k = x^p \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$. Părțile stabile finite ale lui $\mathbb{Z}$ se află printre submulțimile mulțimii $\{-1, 0, 1\}$, adică $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 1]\}$; $\{-1, 0, 1\}$; b) Doar mulțimea $\{0\}$; c) $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, ... n\}$; $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

12. a) $(a \circ b) \circ c = (a + b + ab) \circ c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)\,c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$; $a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + b + c + ab + ac + bc + abc$; b) $(x * y) * z = \dfrac{2 - xy}{3 - x - y} * z = \dfrac{2 - \dfrac{2 - xy}{3 - x - y} \cdot z}{2 - \dfrac{2 - xy}{3 - x - y} - z} = ...$

14. a) 6; b) 1; c) $1 - i$; d) $(1, 0)$.

15. a) Toate matricele cu excepția matricei nule sunt simetrizabile; b) sunt simetrizabile 8 și 10; c) toate elementele sunt simetrizabile; d) 0.

16. Legea dată prin tabla:

	0	1	2
0	*	*	0
1	*	*	1
2	0	1	2

unde locul steluţelor poate fi luat de orice element din mulţime; 3^4 legi de compoziţie au elementul neutru 2.

17. b) Nu este asociativă, este comutativă; c) elementul neutru este 0.
18. Legea nu este asociativă: $(a * a) * c \neq a * (a * c)$; este comutativă; b este element neutru.
19. b) toate elementele cu excepţia elementului 1.
20. c) nu are element neutru.

22. Demonstrăm că $x \circ y \in (0, 3)$. Observăm că $x \circ y = \dfrac{3xy}{xy + (x-3)(y-3)} > 0$ (numitor şi numărător pozitivi) $\dfrac{3xy}{xy + (x-3)(y-3)} < 0 \Leftrightarrow 3xy < 3xy + 3(x-3)(y-3)$ etc.
23. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, există şi sunt unice numerele $u, v, w \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \text{sh } u$, $y = \text{sh } v$, $z = \text{sh } w$ (deoarece funcţia sh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ este bijectivă).
Atunci $x * y = \text{sh } u \text{ sh } v + \text{sh } v \text{ sh } u = \text{sh}(u + v)$; $(x * y) * z = \text{sh}(u + v + w)$; 0 este element neutru; $-x$ este simetricul lui x.

24. Legea nu este asociativă, este comutativă, elementul neutru este $\frac{1}{2}I_2$.
25. Pentru diferenţa simetrică: elementul neutru este $\varnothing$, siemtricul lui A este A.
26. Elementul neutru I_2; toate elementele sunt siemtrizabile.
28. Elementul neutru $(1, 0)$; elementele simetrizabile: $(1, b)$, $(-1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$.
29. $(A * B) * C = (AM^{-1}B) * C = (AM^{-1}B)M^{-1}C$; $A * (B * C) = A * (BM^{-1}C) = AM^{-1}(BM^{-1}C)$; $A * M = M * A = A$ (M element neutru); elemente simetrizabile $A * B = M \Leftrightarrow AM^{-1}B = M$ $\Rightarrow \det A \cdot \det(M^{-1}) \det B = \det M \Rightarrow \det A \neq 0$, rezultă că A este inversabilă în raport cu înmulţirea; $B = MA^{-1}M$ este simetricul elementului A.
30. Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Numărul legilor de compoziţie care-l au pe a_1 element neutru este egal cu $n^{(n-1)^2}$; pentru $a_2, a_3, ... a_n$ avem acelaşi număr; în total avem $n\ n^{(n-1)^2}$ legi de compoziţie.
31. $(x * x)\left(z * \dfrac{1}{x}\right) = (xz) * 1 \Leftrightarrow 1\left(z * \dfrac{1}{x}\right) = xz \Leftrightarrow z * \dfrac{1}{x} = xz$, $\forall\, x, z \in \mathbb{Q}^*$. Înlocuind x cu $\dfrac{1}{x}$ obţinem $z * x = \dfrac{z}{x}$.
32. $xy + ax + by > -1 \Leftrightarrow xy + x + y + 1 + (a-1)x + (b-1)y > 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) + (a-1)x + (b-1)y > 0$, $\forall\, x, y > -1$. Deoarece $(x + 1)(y + 1) > 0$. Rezultă că $(a-1)x + (b-1)y \geq 0$, $\forall\, x, y > -1$. Pentru $y = 0$ obţinem $(a-1)x \geq 0$, $\forall\, x > -1 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$; analog $(b-1)y \geq 0$, $\forall\, y > -1 \Leftrightarrow b = 1$.
33. a) Fie propoziţia $P(n)$: $n = 6x + 7y$, x, y $\mathbb{N}$. Demonstrăm prin inducţie după $n \geq 30$. Verificăm că $P(30), P(31), P(32), P(33), P(34), P(35)$ sunt adevărate şi demonstrăm că $P(n) \to P(n + 6)$ este adevărată: $n + 6 = 6x + 7y + 6 = 6(x + 1) + 7y$, $x + 1 \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$.
b) Orice sumai mare sau egal[cu 30, plus sumele 6 7, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27 28. Cu monede de 3 şi 5 plăti sumele: 3, 5, 6 şi orice sumă mai mare sau egală cu 8 (prin inducţie).

34. a) $1 \in A$, atunci $2 = 1 + 1 \in A$; $3 = 2\ 1 + 1 \in A$, ..., $n \in A$ (inducție după $n \in \mathbb{N}$); $-1 \in A$, atunci $-2 = (-1) + (-1) \in A$ etc. $-n \in A$ (inducție după $n \in \mathbb{N}$). b) $i \in A$, atunci $2i = i + i \in A$; $3i \in A$, ..., $ni \in A$ ($n \in \mathbb{N}$). $-i \in A$, atunci $-2i = -i + (-i) \in A$; ..., $-ni \in A$ (inducție după $n \in \mathbb{N}$). c) $a + bi \in A$ (deoarece $a \in A$; $bi \in A$), deci $\mathbb{Z} \in A$, adică $\mathbb{Z} = A$.
pag. 36
1. b) $x * y \in M \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 \geq 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) + 2 \geq 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) \geq 0$; $(x * y) * z = (xy - 2x - 2y + 6) * z = (xy - 2x - 2y + 6)\, z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6$. Elementul neutru: $x * e = x$, $\forall\, x \in M \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x \Leftrightarrow e\,(x-2) = 3(x-2)$. Rezultă $e = 2$.
2. d) Observăm că $f_n \circ f_m = f_{n+m} \in G$; $f_n = f_m \Leftrightarrow n = m$, operația de compunere a funcțiilor este asociativă (proprietate cunoscută a compunerii). Pe G operația este comutativă $f_n \circ f_m = f_{n+m} = f_m \circ f_n$; $f_n \circ f_e = f_n \Leftrightarrow f_{n+e} = f_n \Leftrightarrow n + e = n \Leftrightarrow e = 0$, deci f_0 este elementul neutru; $f_n \circ f_{n'} = f_0 \Leftrightarrow n + n' = 0 \Leftrightarrow n' = -n$; simetricul lui f_n este $f_{-n} \in G$.
f) Asocierea este lege de compoziție pe G; asociativă, elementul neutru este $(1, 1, 0) \in A$, iar simetricul lui (x, y, z) este $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{-z}{xy}\right)$;
g) Elementul neutru este $1 - i$, $\forall\, z \neq -i$ este simetriyabil, siemtricul său este $z' = \frac{2 - iz}{z + i}$;
j) Notăm $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$; $M(0, 0)$ este elementul neutru $M(-x, -y)$ este siemtricul (opusul lui $M(x, y)$).
3. a) $\mathcal{M}$ este grup de matrice; b) $GL_2(\mathbb{R})$ este grup de matrice; c) $\mathcal{M}$ este grup dar nu este grup de matrice (nu conține I_3); elementul neutru al grupului este $A(0)$.
4. a) Din asociativitate deducem $a^2x + abx + bz = ax + aby + b^2z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$. Rezultă $a^2 = a$, $b^2 = b$. Condiția de grup se verifică numai pentru $a = 1$, $b = 1$; b) Din $x * e = e * x$, $\forall\, x \in (-1, 1)$ avem: $\frac{ax + be}{1 + xe} = \frac{ae + bx}{1 + xe}$, $\forall\, x \in (-1, 1) \Leftrightarrow ax + be = ae + bx \Leftrightarrow (a-b)(x-e) = 0$, $\forall\, x \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$. Din $x * e = x$, $\forall\, x \in (-1, 1)$ avem $x^2e + x = ax + ae$, $\forall\, x \in (-1, 1)$ (rezultă $e = 0$, altfel avem o ecuație de gradul al II-lea cu o infinitate de soluții, toate numerele reale aparținând intervalului $(-1, 1)$, apoi $a - 1 = 0$ etc.
c) $x * y = (x-3)(y-3) + \alpha - 9 > 3 \Leftrightarrow (x-3)(y-3) + \alpha - 12 \geq 0$; deducem $\alpha = 12$.
5. Demonstrăm mai întâi că $a^m \cdot b =‘ b \cdot a^m$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$; apoi demonstrăm $a^m b^n = b^n a^m$ (m fixat, inducție după n) etc.
7. a) $p^{123} = p^{120} \circ p^3 = e \circ p^3 = p^3$; $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $p^{-38} = p^{40} \circ p^{-2} = p^{-2} = (p^{-1})^2$;
c) $x = p^{-1} \circ q$; respectiv $x = e$.
8. a) $\hat{5}x = \hat{3} \Leftrightarrow x = (\hat{5})^{-1} \cdot \hat{3} = \hat{5} \cdot \hat{3} = \hat{7}$; b) $\hat{2}x = \hat{4} \Leftrightarrow x \in \{\hat{2}, \hat{6}\}$; d) $\hat{4}x = \hat{3} \Leftrightarrow 4x \equiv 3 \pmod 8 \Leftrightarrow 4x = 3 + 8q$, $q \in \mathbb{Z}$ egalitate imposibilă (rezultă că $3 \,⋮\, 4$).
9. $x * y = (x+2)(y+2) - 2$; legea este asociativă; elementul netru este -1. $x * x' = -1 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 2 = -1 \Leftrightarrow x'(x-2) = 2x - 3$; $x \neq 2$; $x' = \frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2x-4+1}{x-2} = $
$= 2 + \frac{1}{x-2} \in \mathbb{Z}$ rezultă $(x-2) \mid 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1$ etc.

10. Dacă X este finită, atunci $f: X \to X$ este injectivă $\Leftrightarrow f$ este surjectivă. Dacă X este finită $K(x)$ și $S(x)$ sunt grupuri; dacă X este infinită, atunci elementele simetrizabile sunt funcțiile bijective din $K(x)$ și $S(x)$.

11. $i \in \mathbb{R}_n$ este simetrizabil $\Leftrightarrow (i, n) = 1$ (aceeași demonstrație ca și în $\mathbb{Z}_n$).

12. a) $a * a = a^2 - 2a \le a \Leftrightarrow a^2 - 3a \le 0 \Leftrightarrow a \in [0, 3] \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$; b) Fie $x \in H, x < 0$: avem $x * x \in H \Leftrightarrow x^2 - 2x \in H$, deci $x^2 - 2x \le 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 2\} \cap (-\infty, 0) = \varnothing$. Deci $H = \{0\}$.

13. $|z + z_0| = |z| + |z_0| \Leftrightarrow z = \lambda z_0, \lambda \ge 0,\ M_{z_0} = \{\lambda z_0 \mid \lambda \ge 0\}$. elementul neutru este 0; $\lambda z_0 + \lambda' z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda' = -\lambda \le 0, \lambda' \ge 0$; rezultă $\lambda' = 0$; singurul element simetrizabil este 0.

14. $A^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow x^n = 1; y^n = 1 \Rightarrow x, y \in U_n = \{1, \varepsilon, ..., \varepsilon^{n-1}\}$, unde ε este rădăcină de rodin n a unității; grupul are n^2 elemente.

15. Avem $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 \\ c_1 & 0 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & x & 0 \\ c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_1 & 0 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ 0 & x^2 & 0 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & 0 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$.

Avem: $(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_2c_1 + c_2d_1)(a_1b_2 + b_1d_2) = a_2d_2(a_1d_1 - b_1c_1) - b_2c_2(a_1d_1 - b_1c_1) - a_2d_2 - b_2c_2 = 1$.

Trebuie ca $x^2 = x \Rightarrow x \in \{0, 1\}$; elementul neutru este I_3: rezultă $x = 1$.

$AB = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 \\ c_1 & 0 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & x & 0 \\ c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1a_2 + b_1c_2 = 1 \\ c_1a_2 + d_1c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_2 = -c_1;$

$d_2 = a_1; b_2 = -b_1$; inversa matricei $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 \\ c_1 & 0 & d_1 \end{pmatrix}$ este $B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1 & 0 & d_1 \end{pmatrix}$.

17. Elementul neutru este 0; $x \oplus x' = 0 \Leftrightarrow \{x + x'\} = 0 \Leftrightarrow x + x' \in \mathbb{Z}$. Rezultă $x + x' = 1 \Leftrightarrow x' = 1 - x$ (toate elementele sunt simetrizabile).

18. a) $\hat{3}x = \hat{2} \Leftrightarrow x = (\hat{3})^{-1} \cdot \hat{2}$; pentru inversul lui $(\hat{3})^{-1}$ avem: $\hat{3} \cdot \hat{a} = \hat{1} \Leftrightarrow 3a \equiv 1 \pmod{40}$

$\Leftrightarrow 3a = 1 + 40q, q \in \mathbb{Z}; a = \dfrac{40q+1}{3} = \dfrac{39q+q+1}{3} = 13q + \dfrac{q+1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{q+1}{3} = k \in \mathbb{Z};$

$q = 3k - 1; a = 13(3k - 1) + k = 40k - 13 = 40k - 40 + 27 = 40(k - 1) + 27$; rezultă $a = (\hat{3})^{-1} = \widehat{27}$; $x = \widehat{27} \cdot \hat{2} = \widehat{54} = \widehat{14}$.

19. $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ este grup comutativ; elementul neutru este $\varnothing$, siemtricul oricărui element A este A. $A \Delta X = BC \Leftrightarrow A \Delta (A \Delta X) = A \Delta B \Leftrightarrow (A \Delta A) \Delta X = A \Delta B \Leftrightarrow \varnothing \Delta X = A \Delta B \Leftrightarrow x = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

20. a) Fie $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$ $\sigma \circ x = x \circ \sigma \Leftrightarrow \sigma = x \circ \sigma \circ x^{-1} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \Leftrightarrow .$

$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & e & d & a & c \end{pmatrix}$

Analizăm cazurile:
1) $a = 1$; rezultă prin identificare $b = 2$, $e = 5$, $c = 3$, $d = 4$; rezultă soluția
$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2) $a = 2$; $b = 5$; $e = 3$; $c = 4$, $d = 1$; $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ etc.

b) $x^2 = \sigma$; amplificând la stânga și la dreapta cu x obținem $x^3 = \sigma x$; cu necesitate rezultă $\sigma x = x\sigma$; controlăm care dintre soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 de la punctul a) verifică ecuația $x^2 = \sigma$.

21. Elementul neutru al monoidului, e, este elementul neutru al grupului G; a nu este simetrizabil $a * a' = e \Leftrightarrow a = e$; rezultă că $a \in G$, contradicție.

22. $x^2y = yx \Rightarrow x^2y = yx^2 \Rightarrow x^2(yx) = yx^2 \Rightarrow x^2(x^2y) = yx^2 \Rightarrow x^4y = yx^2 \Rightarrow x^4yx^2 = yx^4 \Rightarrow$ $x^4(yx^2) = yx^4 \Rightarrow x^4(x^4y) = yx^4 \Rightarrow x^8y = yx^4 \Rightarrow ey = yx^4 \Rightarrow y = yx^4 \Rightarrow x^4 = e$.
Din $x^4y = yx^2 \Rightarrow x^2 = e$, iar din $x^2y = yx \Rightarrow x = e$, y arbitrar.

23. Fie $y \in \mathbb{C}$. Ecuația $f(z) = y \Leftrightarrow 3z - 4\overline{z} = y$ (1). Conjugând relația (1) obținem

$3\overline{z} - 4z = \overline{y}$ (2). Din (1) și (2), eliminând $\overline{z}$ obținem $z = -\dfrac{1}{7}(3y + 4\overline{y})$.

Ecuația are soluție unică; deci f este bijectivă inversabilă, iar $f^{-1}(y) = -\dfrac{1}{7}(3y + 4\overline{y})$.

Fie $h_1(z) = 2z - 1$; $h_2(z) = z + 2\overline{z}$;

b) $f \circ g = h_1 \Leftrightarrow h = f^{-1} \circ h_1$, $h(z) = f^{-1}(h_1(z)) = f^{-1}(2z - 1) = -\dfrac{1}{7}[3(2z - 1) + 4(2\overline{z} - 1)] = \ldots$;
$h \circ f = h_2 \Leftrightarrow h = h_2 \circ f^{-1}$; $h(z) = h_2(f^{-1}(z)) = f^{-1}(z) + 2(f^{-1}(z)) = \ldots$

pag. 43

1. $f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i\sin 2\pi(x + y) = (\cos 2\pi x + i\sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i\sin 2\pi y) = f(x) \cdot f(y)$.
2. $f(z_1 \cdot z_2) = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = f(z_1) \cdot f(z_2)$.
3. c) $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
d) $g(0) = -1 \neq 0$ (imaginea elementului neutru nu este elementul neutru al grupului); nu este morfism.
4. a) Observăm că f este corect definită ($(x, -5x, 3x)$ este soluție a sistemului oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$).
$f(x + y) = (x + y, -5x - 5y, 3x + 3y) = (x, -5x, 3x) + (y, -5y, 3y) = f(x) + f(y)$.
5. b) Ecuația $f(x) = y$, $y \in G$ are soluție unică: $x = \ln(y - 2)$ deci f este bijectivă;
$f(x + y) = 2 + e^{x+y}$, $f(x) * f(y) = (2 + e^x) * (2 + e^y) = (2 + e^x)(2 + e^y) - 2(2 + e^x) -$ $- 2(2 + e^y) + 6 = 2 + e^{x+y}$.
7. $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$; funcția $f: M \to (0, \infty)$, $f(A(a)) = a$ este izomorfism de grupuri.

8. c) Fie $\alpha = \dfrac{2\cdot 2^2}{2\cdot 2^2 - 1} \circ \dfrac{2\cdot 3^2}{2\cdot 3^2 - 1} \circ \ldots \circ \dfrac{2\cdot n^2}{2n^2 - 1}$; calculăm $f(\alpha)$ în grupul $((0, \infty), \cdot)$ și apoi „întoarcem“ rezultatul în grupul G.

$$f\left(\frac{2k^2}{2k^2 - 1}\right) = \frac{2 - \dfrac{2k^2}{2k^2 - 1}}{\dfrac{2k^2}{2k^2 - 1}} \text{‘} \frac{2k^2 - 2}{2k^2} \text{‘} \frac{k^2 - 1}{k^2} \text{‘} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}.$$

$$f(\alpha) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2\cdot 4}{3^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}. \text{ Deci } \alpha = f^{-1}\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ldots$$

9. b) $f(0) = 0; f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{Z}; f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}; f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$ (inducție după n). Notăm $f(1) = a$, $a \in \mathbb{Z}$. Atunci $f(2) = 2\alpha$, $f(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1) + f(1) + ... + f(1) = a + a + ... + a = na, \forall n \in \mathbb{N}$. $f(-na) = -f(na) = -na = (-n) \cdot a$; deci $f(x) = x \cdot a\ \forall x \in \mathbb{Z}$ (pozitiv sau negativ).

10. a) $f(0) = 0$; fie $f(1) = a$, $a \in \mathbb{Q}$; ca și la 9b) demonstrăm că $f(n) = na$, $n \in \mathbb{Z}$. Observăm că $a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Deducem că $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Însă $f\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{Z}$ deci $\frac{a}{n} \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, posibil numai pentru $a = 0$.

b) Dacă $f(1) = b$, atunci orice morfism este de forma $f(x) = bx$.

c) Rezultă din a), morfismul banal nefiind bijecție.

11. $f_a \circ f_b = f_{ab}$; izomorfismul este g: $G \to (0, \infty)$ $g(f_a) = a$.

12. Izomorfismul este $f: \mathcal{C}(0, 1) \to U, f(M) = \cos t + i\sin t$, unde are coordonatele $(\cos t, \sin t)$.

13. $f: M \to \mathbb{R}, f(d_m) = m$.

14. c) f este chiar izomorfism de grupuri; părțile stabile finite sunt imaginile reciproce ale părților stabile cu 6 elemente ale lui $\mathbb{C}^*$ cu înmulțirea: U_6, deci $f^-(U_6) = \{1 - i, \varepsilon - i, \varepsilon^2 - i, \varepsilon^3 - i, \varepsilon^4 - i, \varepsilon^5 - i\}$, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}$.

15. b) Din $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ rezultă $m = n = 1$; deci $f(x) = \sqrt{1 + x}$; c) la fel ca la ex. 8, calculăm imaginea elementului în $(0, \infty)$ prin izomorfismul f^{-1}: $G \to (0, \infty)$, $f^{-1}(x) = x^2 - 1$ etc.

16. c) Calculăm $g(\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{n \text{ ori}}) = g(x) \cdot g(x) \cdot ... \cdot g(x) = (g(x))^n = (2x + 2)^n$; $g^{-1}(x) = \frac{x - 2}{2}$;

rezultă $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{n \text{ ori}} = g^{-1}((2x + 2)^n) = \frac{(2x+2)^n - 2}{2} = 2^{n-1}(x + 1) - 1$.

17. Nu sunt izomorfe pentru că o astfel de ecuație are o singură soluție în $\mathbb{R}^*$ și 3 soluții în $\mathbb{C}^*$ (fie z una dintre cele trei soluții ale ecuației $x^3 = 1$ are 3 soluții distincte, contradicție).

18. $f(xy) = f(x) \cdot f(y) \Leftrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \Leftrightarrow (xy)^{-1} = (yx)^{-1} \Leftrightarrow xy = yx$.

19. Deoarece $f(1) = 1$ și $g(1) = 1$, rezultă că $f(1) = g(1)$. Rămâne să arătăm că $f(x) = g(x)$, $\forall x \in U_n$. Suficient să arătăm că $f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$, unde $\varepsilon \in U_n$, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Fie $x \in \mathbb{C}^* \setminus U$. Atunci $x \cdot \varepsilon \in \mathbb{C}^* \setminus U_n$ (altfel din $x \cdot \varepsilon \in U_n$, rezultă $x \in U_n$, U_n fiind grup). Rezultă că $f(x\varepsilon) = g(x \cdot \varepsilon) \Leftrightarrow f(x) \cdot f(\varepsilon) = g(x) \cdot g(\varepsilon) \Leftrightarrow f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$ (deoarece $f(x) = g(x) \neq 0$).

pag. 55

1.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

2. a)

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

b)

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

3.

$\cdot$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

Verificăm asociativitatea $(x \oplus y) \oplus z = z \oplus (y \oplus z)$. Constatăm: comutativitatea, elementul neutru 6; toate elementele sunt simetrizabile.

4. $A^4 = I$; ord $(A) = 4$; ord$(A^2) = 2$; ord$(A^3) = 4$.
5. $ab = e \Leftrightarrow a = b^{-1} \Leftrightarrow ba = e \Rightarrow ab = ba$, contradicție.
6. Fie $a \in G$; deoarece ordinul grupului este 5, rezultă că $a^5 = e$. Atunci $a^2 \neq e$ (altfel $a^4 = e$ și $a = e$); $a^3 \neq e$ (altfel $a^2 = e$), $a^4 \neq e$ (altfel $a = e$).
7. a) σ este ciclu de lungime 5, ord$(\sigma) = 5$; b) ord$(\hat{8}) = 3$; c) ord$(\hat{9}) = 10$, $d(1 + i)^n \neq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ord $(1 + i) = \infty$.
8. $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$; pentru orice $n \in \mathbb{N}$: $(AB)^n \neq I_2$.
9. Se aplică teorema lui Fermat: a) 1; b) 0; c) $7^{89} = 7^{88} \cdot 7^2 = (7^{22})^4 \cdot 7^2 \equiv 7^2 \pmod{23} \equiv 3 \pmod{23}$.
12. $\forall, \sigma, \tau \in H$ avem: i) $(\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(\tau 92)) = \sigma(2) = 2$; rezultă $\sigma \circ \tau \in H$; ii) $\sigma^{-1}(2) = 2$, adică $\sigma^{-1} \in H$.
13. $(a^{-1}h_1a)(a^{-1}h_2a) = a^{-1}h_1(e)h_2a = a^{-1}(h_1h_2a) \in a^{-1}Ha$; $(a^{-1}ha)^{-1} = a^{-1}h^{-1}a \in a^{-1}Ha$.
14. a) Generalizare: Dacă $(H_i)_{i\in I}$ este o familie de subgrupuri ale grupului G, atunci $\bigcup_{i\in I} H_i$ este subgrup (urmăriți definiția subgrupului);
b) Fie $x \in 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$, atunci x este multimplu și de 6 și de 4; deci este multimplu de 12, adică $x \in 12$; reciproc.
c) Fie $x \in U_4 \cap U_6$, rezultă $x^4 = 1$ și $x^6 = 1$, $1 = x^6 = x^4 \cdot x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$. Pe caz general: $U_n \cap U_m = U_d$, unde $d = (n, m)$ (demonstrația va fi dată la capitolul polinoame).
15. b) Fie $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $aX = Xa \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ rezultă $\delta = \alpha$ și $\gamma = -\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
16. Fie a un element ord$(a) = 5$ și grupul de ordin n. Atunci $a^n = e$. Însă $n = 5k + r$, $0 \leq r < 5$ implică $a^r = e$, rezultă $r = 0$ (altfel a ar avea ordinul mai mic decât 5).
17. a) Grupul lui Klein are toate elementele de ordin 2, în timp ce $\mathbb{Z}_4$ are și elemente de ordin 4. $(\hat{1})$
b) Dacă există în grup un element de ordin 4, notat a, atunci grupul este $\{e, a, a^2, a^3\}$ și este izomorf cu $\mathbb{Z}_4$. În caz contrar, toate elementele cu excepția elementului neutru, au ordinul 2, deci este izomorf cu grupul lui Klein.
18. a) Fie $k = \{e, a, b, c\}$ un grup de tip Klein. $H_1 = \{e, a\}$; $H_2 = \{e, b\}$, $H_1 \cup H_2 = \{e, a, b\}$ nu este subgrup deoarece nu este parte stabilă a lui $K(a \cdot b \notin H_1 \cup H_2)$.
b) Presupunem că $H_1 \not\subset H_2$ și $H_2 \not\subset H_1$; rezultă că există $x \in H_1$, $x \notin H_2$ și $y \in H_2$, $y \notin H_1$. Însă $H_1 \cup H_2$ este subgrup, deci $xy \in H_1 \cup H_2$. Din $xy \in H_1 \cup H_2$ rezultă $xy \in H_1$ sau $xy \in H_2$. Dacă $xy \in H_1$ și $x \in H_1$, rezultă $y \in H_1$, contradicție; dacă $xy \in H_2$ și $y \in H_2$, rezultă $x \in H_2$ contradicție; așadar $H_1 \subset H_2$ sau $H_2 \subset H_1$.
c) $H \cup K$ este subgrup, atunci conform b), rezultă $H \subset K$ sau $K \subset H$. Însă $pZ \subset Z \circ Z$ ar rezulta $p \in Z \circ Z$, adică $p = 20$ q, imposibil.
19. Rezultă că subgrupul conține elementul neutru al grupului, adică $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x$. Deducem $p(x) = F'(x) = 1$. Se verifică: $H = \{F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}\}$ este subgrup al grupului bijecțiilor lui $\mathbb{R}$ în raport cu compunerea funcțiilor.
20. Grupurile $(C^*, \cdot)$ și $(G, \cdot)$ sunt izomorfe: izomorfismul fiind funcția $f: C^* \to G$,

$f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Deoarece $(C^*, \cdot)$ are un unic subgrup de ordin n, anume U_n, rezultă că $(G, \cdot)$ are un unic subgrup de ordin n, $f(U_n)$.

21. b) Fie $A = \frac{1}{2}(X + X^t)$ și $B = \frac{1}{2}(X - X^t)$, rezultă $A + B = X$, $A^t = A$, $B^t = -B$.
22. Reducere la absurd.
23. $f_1(e) = e = f_2(e)$. Fie $h \in H \setminus \{e\}$, arătăm că $f_1(h) = f_2(h)$. Considerând un element $x \in G \mid H$ avem, conform cu 22) $xh \in G \mid H$. Rezultă $f_1(xh) = f_2(xh) \Leftrightarrow f_1(h) = f_2(x) \cdot f_2(h)$. Însă $f_1(x) = f_2(x)$. Rezultă $f_1(h) = f_2(h)$.
24. Deoarece $e \in H$ și $a \notin H$, rezultă că $a \neq e$, de asemenea $a^{-1} \notin H$ (altfel $a \in H$), $a^{-1} \notin H \Leftrightarrow a^{-1} \in G \setminus H$. Însă $G \setminus H = \{a\}$, rezultă că $a^{-1} = a \Leftrightarrow a^2 = e$, deci $\{e, a\}$ este subgrup al lui G. Dar: $\{e, a\} \cup H = G$ (reuniunea a două subgrupuri ale lui G este subgrup al lui $G \Leftrightarrow \{e, a\} \subset H$, fals sau $H \subset \{e, a\}$, adică, $\forall\, x \in G \setminus \{a\}$, $x = 1$. Rezultă $G = \{e, a\}$, cu $a^2 = e$, așadar $G \approx Z_2$.

Capitolul 2
pag. 75
1. a) Ambele legi sunt corect definite. Arătăm că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup comutativ. Elementul neutru este –2; simetricul lui x este $-4 - x$. Arătăm că $(\mathbb{Z}, \top)$ este monoid; elementul neutru este $-\frac{3}{2}$. Arătăm că a doua lege $(\top)$ este distributivă față de prima $(*)$.
$x \top (y * z) = (x \top y) * (x \top z) \Leftrightarrow x \top (y * z) = x \top (y + z + 2) = 2x(y + z + 2) + 4x +$
$+ 4(y + z + 2) + 6 = 2xy + 2xz + 8x + 4y + 8z + 14$.
$(x \top y) * (x \top z) = (2xy + 4x + 4y + 6) * (2xz + 4x + 4z + 6) = 2x + 2xz + 8x + 4y + 8z + 14$.
e) Evident $(\mathbb{Z}[i], +)$ este grup comutativ și $(\mathbb{Z}[i], *)$ este monoid: fie $x = a + bi$, $y = c + di$, $z = \alpha + \beta i$, $x * y = ac + (bc + ad)i$, $(x * y) * z = ac\alpha + (ac\beta + bc\alpha + ad\alpha)i$
$x * (y * z) = (a + bi) * [c\alpha + (\mathrm{i}c\beta + \mathrm{d}i\alpha)i] = ac\alpha + (bc\alpha + ac\beta + ad\alpha)i$.
Elementul unitate este 1. Demonstrăm apoi că $x * (y * z) = (x * y) + (x * z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}[i]$.
2. În toate cazurile, a doua operație nu are element neutru.
4. Inelul are divizori ai lui zero: $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \neq 0$.
5. b) $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $\det X = a^3$; dacă $a \neq 0$, atunci X este inversabilă; dacă $a = 0$, atunci $X^3 = 0_3$.
c) $A^n = (I_3 + B)^n = I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2$ (deoarece $I_3 B = BI_3$ și $B^3 = 0_3$)
6. $\frac{1}{a + b\varepsilon} = \frac{a + b\bar{\varepsilon}}{(a + b\varepsilon)(a + b\bar{\varepsilon})} = \frac{a + b\bar{\varepsilon}}{a^2 + ab(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + b^2\varepsilon\bar{\varepsilon}} = \frac{a + b(-1 - \varepsilon)}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a - b}{a^2 - ab + b^2} - \frac{b}{a^2 - ab + b^2} \cdot \varepsilon$; rezultă că toate elementele inelului, cu excepția lui 0, sunt inversabile.
7. $\frac{1}{x + iy\sqrt{3}} = \frac{x - iy\sqrt{3}}{x^2 + 3y^2} = \frac{x}{x^2 + 3y^2} - \frac{y}{x^2 + 3y^2} i\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}\,] \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 3y^2} \in \mathbb{Z}$ și $\frac{y}{x^2 + 3y^2} \in \mathbb{Z}$; rezultă $\left(\frac{x}{x^2 + 3y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + 3y^2}\right)^2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 3y^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$(x^2 + 3y^2) \mid 1 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \cdot y = 0$ etc.

8. Din $x * y = y * x$, rezultă $a = b$. Din $x * e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $ax + ae + c = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $a = 1$, $e = 0$ și $c = 0$ etc.
9. Elementele inversabile ale inelului $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$ sunt acele resturi $i \in \mathcal{R}_n$ pentru care $(i, n) = 1$; $U(\mathcal{R}_{12}) = \{1, 5, 7, 11\}$.
10. a) $x = \hat{2}$, $y = \hat{3}$; b) $(x, y) \in \{(\hat{1}, \hat{1}); (\hat{7}, \hat{3}); (\hat{3}, \hat{5}); (\hat{9}, \hat{7}); (\hat{5}, \hat{9})\}$; c) Prin scădere obținem $\hat{2}y = \hat{1}$ care nu are soluții în $\mathbb{Z}_{12}$, deci sistemul nu are soluții.
11. b) det $U = \hat{5}$, det $V = \hat{5}$ și $\hat{5}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_6$; c) $X = U^{-1} \cdot V^{-1}$; d) Deoarece mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ este finită (6^4 elemente) și $A^k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, rezultă că în șirul de puteri U, U^2, U^3, există doi termeni egali. Din $U^p = U^k$, $k > p$, $U^{p-k} = I_2$.
13. Divizori ai lui zero: f_1, f_2: $\{0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
15. b) Elementele inversabile sunt: $(\hat{1}, 1)$; $(\hat{1}, -1)$; $(\hat{3}, 1)$; $(\hat{3}, 1)$; $(\hat{3}, -1)$.
18. a) $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X^2 = 0 \Leftrightarrow a + d = 0$, $ad - bc = 0$, $a + d = 0 \Leftrightarrow (a = 0$ și $d = 0)$ sau $(a = 1; d = 1)$ etc.
b) X este inversabilă $\Leftrightarrow$ det $X = 1 \Leftrightarrow ad - bc = \hat{1} \Leftrightarrow ad + bc = \hat{1} \Leftrightarrow (ad = \hat{1}$ și $bc = \hat{0})$ sau $(ad = \hat{0}$ și $bc = \hat{1})$ etc.
19. c) card $T = 3^2 = 9$. $A \in T$ și det $A = \hat{1} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \hat{1}$. Însă $x^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $y^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$. Rezultă $x^2 = \hat{1}$, $y^2 = 0$ sau $x^2 = \hat{0}$, $y^2 = 1$ (patru soluții).
20. a) $x = \hat{1}$, $y = \hat{2}$, $z = \hat{3}$.
21. A este inversabilă $\Leftrightarrow$ det A este element inversabil în $\mathbb{Z}_6 \Leftrightarrow$ det $A \in \{\hat{1}, \hat{5}\}$. Însă det $A = \hat{3}a - \hat{2}$; obținem ecuațiile $\hat{3}a = \hat{3}$ și $\hat{3}a = \hat{1}$, $a \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$ (de la prima ecuație, a doua ecuație nu are soluții).
22. Înlocuind succesiv x prin $\hat{4}x$ obținem sistemul: $\begin{cases} f(x) + f(\hat{4}x) = \hat{3}x \\ f(\hat{4}x) + f(\hat{2}x) = \hat{5}x \\ f(\hat{2}x) + f(x) = \hat{6}x \end{cases}$.

Adunând ecuațiile obținem $\hat{2}(f(x) + f(\hat{4}x) + f(\hat{2}x)) = 0$, de unde $f(x) + f(\hat{4}x) + f(\hat{2}x) = 0$, de unde comparând cu a doua ecuație obținem: $f(x) = \hat{2}x$.
23. a) adevărată; b) falsă, trecând elementele matricei în $\mathbb{Z}_3$ obținem matricea $\hat{A}$ și

det $\hat{A} = \begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{vmatrix} = \hat{2} \neq \hat{0}$; deci 3 nu divide det A; c), d) deoarece 3 nu divide det A,

rezultă că det $A \neq 0$, deci A este inversabilă $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$; deoarece 2 divide A, rezultă că det A nu este inversabil în 2, deci A nu este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.
24. b) $(a+b)^5 = a^5 + C_5^1 a^4b + C_5^2 a^2b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Însă $5a^4b = a^4b + a^4b + a^4b + a^4b + a^4b = 0$; $5ab^4 = 0$; $10a^2b^3 = 0$.
25. a) Vezi demonstrația de la capitolul 1; b) verificând prin calcul.
26. $(1 - ba)(1 + bua) = 1 + bua - ba - (ba)(bua) = 1 + b(u - 1 - abu) = 1 + b \cdot 0 \cdot a = 1$.

27. Luând $x = -1$ obținem $(-1)^6 = (-1)$. Însă orice inel $(-1)^6 = 1$. Obținem $1 = -1 \Leftrightarrow 1 + 1 = 0$; rezultă $a + a = 0$, pentru orice $a \in A$; fie $x \in A$; $(x + 1)^6 = x + 1 \Leftrightarrow x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x = 0$. Însă $6x^5 = (x^5 + x^5) + (x^5 + x^5) + (x^5 + x^5) = 0 + 0 + 0 = 0$; $6x = 0$ (analog), $20x^3 = 0$; $15x^4 = 14x^4 + x^4 = 0 + x^4 = x^4 = x^4$; $15x^2 = x^2$. Obținem $x^6 = x^4$, adică $x^4 = x$, de unde $x^2 = x$. Exemplu $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

28. Dacă n este ordinul grupului $U(a)$, atunci $(-1)^{2n} = 1$, intră $(-1)^n = -1$ (deoarece n este impar). Rezultă $-1 = 1$, adică $1 + 1 = 0$.

pag. 89

1. b) Fie $\alpha = b\sqrt[3]{7}$ și $\beta = c\sqrt[3]{49}$; arătăm că $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, deci $b, c = 0$. Observăm că $\alpha + \beta = -a \in \mathbb{Q}$ (1); $\alpha\beta = bc\sqrt[3]{7^3} = 7bc \in \mathbb{Q}$, $\alpha^3 - \beta^3 = 7b^3 - 49c^3 \in \mathbb{Q}$; rezultă $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \in \mathbb{Q}$, de unde $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Dacă $x \neq 0$, atunci $x^{-1} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a + b\sqrt[3]{7} + c\sqrt[3]{49}}$. Pentru a arăta că $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ raționalizează numitorul fracției apelând la formula de calcul: $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u^2 + v^2 + w^2 - uv - uw - vw)$. Luând în această formulă $u = a$; $v = b\sqrt[3]{7}$, $w = c\sqrt[3]{49}$ și amplificând numitorul fracției $\dfrac{1}{x}$ cu $u^2 + v^2 + w^2 - uv - uw - vw$ obținem

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{a^2 - 7bc + (7c^2 - ab)\sqrt[3]{7} + (b^2 - ac)\sqrt[3]{49}}{a^3 + 7b^3 + 49c^3 - 21abc}$; f) luăm $a = 2$; $b = 1$; $c = -1$.

3. a) Dacă $\hat{b} \neq \hat{0}$, atunci $\hat{b}$ este inversabil și $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 = 0 \Leftrightarrow (ab^{-1})^2 + \hat{1} = 0 \Leftrightarrow (ab^{-1}) = \hat{2}$, imposibil pentru că în $\mathbb{Z}_3$, $\hat{x}^2 \neq \hat{2}$, oricare ar fi $\hat{x} \in \mathbb{Z}_3$.

b) card $L = 3^2 = 9$; $K = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

11. a) $\varphi : F \to \mathbb{Q}$, $\varphi(f_a) = a$ este izomorfism de corpuri.

b) $f_a \circ f_b = f_{ab}$; $f_{\frac{6}{4}} \circ f_{\frac{12}{10}} \circ \ldots f_{\frac{n^1+n}{n^2+n-2}} = f_{\frac{6}{4}\cdot\frac{12}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n-2}}$.

Însă $\dfrac{6}{4} \cdot \dfrac{12}{10} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^2 + n}{n^2 + n - 2} = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k^2 + k}{k^2 + k - 2} = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)} =$

$= \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k}{k-1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k+1}{k+2} = n \cdot \dfrac{3}{n+2} = \dfrac{3n}{n+2}$ etc.

12. Corpul $\mathcal{M}$ este izomorf cu corpul numerelor complexe, prin izomorfism $f : \mathcal{M} \to C, f(\mathcal{M}(a, b)) = a + bi$.

b) $f(A^n) = (f(A))^n = (\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{11n\pi}{6} + i\sin\dfrac{11n\pi}{6}\right)$.

Deci $A^n = 2^n\begin{pmatrix} \cos\dfrac{11n\pi}{6} & \sin\dfrac{11n\pi}{6} \\ -\sin\dfrac{11n\pi}{6} & \cos\dfrac{11n\pi}{6} \end{pmatrix}$; c) Rezolvăm în corpul C sistemul $\begin{cases} u + v = 3 + 3i \\ u^3 + v^3 = -9 + 9i \end{cases}$,

unde $u = f(X)$; $v = f(Y)$; obținem $u_1 = 2 + i$, $v_1 = 1 + 2i$, respectiv $u_2 = 1 + 2i$, $v_2 = 2 + i$;

corespunzător $X_1 = f^{-1}(u_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $Y_1 = f^{-1}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, respectiv, $X_2 = f^{-1}(u_2)$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $Y_2 = f^{-1}(v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. a) Elementul zero este $f_\varnothing$, elementul unitate este f_T; dacă $A, B \in \mathcal{P}(T)$, nevide, $A \cap B = \varnothing$, atunci $f_A \odot f_B = f_\varnothing$, adică f_A și f_B sunt divizori ai lui zero.
b) Funcția φ: $\mathcal{P}(T) \to F_\tau$, $\varphi(f_A) = A$ este izomorfism.
c) $A \Delta X = B \Leftrightarrow A \Delta (A \Delta X) = A \Delta B \Leftrightarrow (A \Delta A) \Delta X = A \Delta B \Leftrightarrow \varnothing \Delta X = A \Delta B \Leftrightarrow X = A \Delta B$; $f_A \oplus f_X = f_B \Leftrightarrow A \Delta X = B$, datorită izomorfismului.

14. a) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ automorfism; rezultă $f(0) = 0$; $f(1) = 1$, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$; b) analog $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.; demonstrăm că $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1). Observăm că f este strict cescătoare: $x > 0 \Rightarrow f(x) = f(\sqrt{x}\,)^2) = (f(\sqrt{x}\,))^2 > 0$. Dacă $x > y$, atunci $x - y > 0 \Rightarrow f(x - y) > 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) > 0$. Presupunem, că (1) este falsă: $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}$ ($x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) astfel încât $f(x_1) \neq x_1$. Fie $r \in \mathbb{Q}$, $f(x_1) < r < x_1$ (2); deoarece f este crescătoare (strict) deducem că $f(f(x_1)) < f(r) < f(x_1)$ $\Leftrightarrow f(\varphi(x_1) < r < f(x_1)$, adică $r < f(x_1)$. e) Trebuie să calculăm $f(a + bi) = f(a) + f(bi) = f(a) + f(b) f(i) = a + bf(i)$. Suficient să determinăm $f(i)$. Observăm că $-1 = f(-1) = f(i^2) = (f(i))^2$; deducem $f(i) = \pm i$; două izomorfisme $f(x) = x$ și $f(x) = \bar{x}$.

15. $x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = -1$. În primul caz $A = \{0, 1\}$, $A \approx \mathbb{Z}_2$, în al doilea caz $A = \{0, 1, -1\}$, deci $A \approx \mathbb{Z}_3$.

Capitolul 3

pag. 103

3. a) $m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm i$; $m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1, -4\}$. Dacă $m \in C \setminus \{-i, i\}$, atunci grad $(f) = 3$; dacă $m \in \{-i, i\}$, atunci grad $(f) = 2$; b) dacă $m = \hat{1}$, grad $(f) = 0$; dacă $m = -\hat{1}$, grad $(f) = 1$; dacă $m \neq \pm 1$, grad $(f) = 4$; c) $m^4 + m + 1 > 0$ (nu se anulează): evident dacă $m > 0$; dacă $m \in [-1, 0)$, atunci $m + 1 > 0$, deci $m^4 + m + 1 > 0$; dacă $m \in (-\infty, -1]$, atunci $m^4 + m + 1 = m(m^3 + 1) + 1 = m(m + 1)(m^2 - m + 1) + 1 > 0$ deoarece $m(m + 1)$ 0.

5. a) Răspuns afirmativ: căutăm polinoame sub forma $f = x^2 + ax + b$, $g = x^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și după înmulțire și identificare obținem sistemul: $bd = 8$, $ad + bc = 21$, $a + c = 0$, $b + d + ac = 0$; soluție: $b = 1$, $d = 8$, $a = 4$, $c = -3$.
b) Nu există polinoame h cu proprietate cerută pentru că: grad$(h) = 1$, $h = ax + b$; din identificare $a^2 = 25$, $ab = 1$, $b^2 = 2$, imposibil.

6. a) $(x+1)^4(x-1)^5 = (x^4 + C_4^1 x^3 + C_4^2 x^2 + C_4^3 x + C_4^4)(x^5 - C_5^1 x^4 + C_5^2 x^3 - C_5^3 x^2 + C_5^4 x - C_5^5)$; coeficientul lui $x^3 = C_4^1 \cdot (-C_5^5) + C_4^2 \cdot C_5^4 + C_4^3 \cdot (-C_5^3) + C_4^4 \cdot C_5^2$;
b) $(1 + x + x^2)^{10} = [1 + (x + x^2)]^{10} = 1 + C_{10}^1 (x + x^2) + C_{10}^2 (x + x^2)^2 + C_{10}^3 (x + x^2)^3 + \ldots + C_{10}^{10} (x + x^2)^{10}$, coeficientul lui x^4 se află în binoamele $C_{10}^2 (x + x^2)^2$, $C_{10}^3 (x + x^2)^3$ și $C_{10}^4 (x + x^2)^4$, adică: $C_{10}^2 \cdot C_2^2 + C_{10}^3 \cdot C_3^1 + C_{10}^4 \cdot C_4^0$.

7. grad $f = 1$; $f = -\hat{3}x$; $f = \hat{3}x + \hat{1}$.

9. $(1 - i)^3 + a(1 - i)^2 + b = 1 \Leftrightarrow (b - 2) + i(-2 - 2a) = 0 \Leftrightarrow b = 2$; $a = -1$.

10. Suma coeficienților unui polinom f este $f(1)$.

11. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, deci $\cos 3\dfrac{\pi}{9} = 4\cos^3\dfrac{\pi}{9} - 3\cos\dfrac{\pi}{9}$; $\cos\dfrac{3\pi}{9} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Deci $f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=\left(4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}\right)+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$; $\sin\frac{4\pi}{9}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{9}\right)=\cos\frac{\pi}{18}$;

$\cos 3\frac{\pi}{18}=4\cos^2\frac{\pi}{8}-3\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\sin\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+2$.

12. b) Dacă luăm $f=aX^2+bX+c$, $a\neq 0$, din condiții deducem $a=0$.

13. Dacă $a\in\mathbb{Z}_3$, atunci $a+a+a=\hat{0}$; $(f+g)^3=f^3+3f^2g+3fg^2+g^3$, însă $3f^2g=f^2g+f^2g+f^2g=\hat{0}$; $3fg^2=fg^2+fg^2+fg^2=\hat{0}$. $(f+g+h)^3=(f+g)^3+h^3=f^3+g^3+h^3$.

14. a) Polinomul nu are grad mai mare sau egal cu 2, pentru că, în caz contrar, identificând coeficienții lui X^{n-2} obținem o contradicție; rezultă că $f=aX+b$; $a(X+1)b+a(X-1)+b=$ $=2(aX+b)$; b) răspuns negativ: grad $(P)=1$, $P=aX+b$, rezultă $(1+X)(aX+b)+$ $+(2X+1)[a(X+1)+b]=3X^2+2X+1$; din identificare obținem un sistem fără soluție.

15. b) $(k^3+7k^2+14k)k!=[(k+1)(k+2)(k+3)+\alpha(k+1)(k+2)+\beta(k+1)+\gamma]\cdot k!=$ $=(k+3)1!+\alpha(k+2)!+\beta(k+1)!+\gamma k!$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3+7k^2+14k)k!=\sum_{k=1}^{n}(k+3)!+\alpha\sum_{k=1}^{n}(k+2)!+\beta\sum_{k=1}^{n}(k+1)!+\gamma\sum_{k=1}^{n}k!=$$

$$=\ldots\ \frac{k^2+2k-4}{k}=\frac{k(k-1)+\alpha k+\beta}{k!}=\frac{1}{(k-2)!}+\frac{\alpha}{(k-1)!}+\frac{\beta}{k!},\ \forall\, k\geq 2.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k-4}{k}=-1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}+\alpha\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)!}+\beta\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}.\ \text{Analog}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k-1}{k}=$$

$$=3+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}+\alpha\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)!}+\beta\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=3+E_{n-2}+\alpha(E_{n-1}-1)+\beta(E_n-2)\to$$

$3+e+\alpha(e-1)+\beta(e-2)$ cu α și β găsiți anterior; am notat cu $E_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$, termen general al unui șir cu limita e.

16. a) $(1+X)^n(1+X)^n=(C_n^0+C_n^1X+C_n^2X^2+\ldots+C_n^nX^n)(C_n^0+C_n^1X+C_n^2X^2+\ldots+C_n^nX^n)$, coeficientul lui $X^n=C_n^0\cdot C_n^n+C_n^1\cdot C_n^{n-1}+C_n^2\cdot C_n^{n-2}+\ldots+C_n^n\cdot C_n^0=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2$ $+\ldots+\left(C_n^n\right)^2$ (am folosit identitatea $C_n^k=C_n^{n-k}$) coeficientul lui X^n în $(1+X)^{2n}$ este C_{2n}^n; rezultă $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$; b) folosim identitatea $(1-X)^n(1+X)^n=(1-X^2)^n$ și identificăm coeficienții lui X^n în ambii membri: $C_n^0\cdot C_n^n-C_n^1\cdot C_n^{n-1}+C_n^2\cdot C_n^{n-2}+$

$$+\ldots+(-1)^n\,C_n^n\cdot C_n^0=\begin{cases}0, & n\ \text{impar}\\ (-1)^k C_{2k}^k, & n=2k\end{cases}.$$

17. Coeficientul lui X^{10} în suma $(1+X+X^3)^{10}=(1+X+X^3)(1+X+X^3)\cdot\ldots\cdot(1+X+X^3)$.

18. $f\cdot g=1\Rightarrow \text{grad}(f)+\text{grad}(g)=0\Rightarrow \text{grad}(f)=0$, rezultă f polinom constant, nenul.

19. a) $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{200}=f(1)=3^{100}$, unde $f=a_0+a_1X+\ldots+a_{200}X^{200}$.
$a_0-a_1+a_2-\ldots+a_{200}=f(-1)=1^{100}=1$
b) Calculăm $f(1), f(\varepsilon), f(\varepsilon^2)$, unde ε^2 sunt rădăcini de ordinul 3 ale unității.
$f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{200}$;
$f(\varepsilon)=a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+a_3\varepsilon^3+\ldots+a_{200}\varepsilon^{200}$
$f(\varepsilon^2)=a_0+a_1\varepsilon^2+a_2\varepsilon^4+a_3\varepsilon^6+\ldots+a_{200}\varepsilon^{40}$, $(\varepsilon^3=1, \varepsilon^2+\varepsilon+1=0)$

Adunând egalitățile obținem:
$f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) = 3a_0 + 3a_3 + 3a_6 + ... + 3a_{198}$; deci $a_0 + a_3 + a_6 + ... + a_{198} =$

$= \frac{1}{3}(3^{200} + 0^{200} + 0^{200}) = 3^{199}$.

Pentru suma $a_0 + a_4 + a_8 + ... + a_{200}$, calculăm $f(1), f(-1), f(i), f(-i)$ și adunăm cele patru egalități obținute.

pag. 111

1. d) câtul $\hat{4}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$ și restul $X + \hat{4}$; g) câtul 0 și restul 1.
3. $f = (X^5 - 5X + 8)(aX + b) + 2X - 7$ (1) și $f = (X^2 - 3X)C(x) + 6X - 15$ (2). Din (2) rezultă $f(0) = -15, f(3) = 3$ care înlocuite în (1) conduc la un sistem de două ecuații pentru a și b.
4. a) $f(-2) = 1$; b) $f(\hat{1}) = \hat{1}, f(-\hat{1}) = \hat{2}$.
5. Nu din prima condiție avem $f(\hat{1}) = \hat{5}$, iar din a doua rezultă $f(\hat{1}) = \hat{0}$.
6. $f(i) = 1; f(-i) = 1, f(1) = 4, f(-1) = -2, f = (X^4 - 1)c + aX^3 + bX^2 + cX + d$;

rezultă $a = c = \frac{3}{2}$, $b = 0$, $d = 1$.
7. a) $f = (X^2 + X - 2)g + aX + b$; înlocuim X cu 1 și -2; $f(1) = 26$,

$$f(-2) = \frac{(-2)^{26} - 1}{-2 - 1} = \frac{-(2^{26} - 1)}{3};$$

b) $f = (X + 1)^2 g + aX + b$; înlocuim X cu -1 și rezultă $f(-1) = -a + b$, de unde scoatem $b = a$; deci $f = (X + 1)^2 \cdot g + a(X + 1) \Leftrightarrow (X + 1)(X^{24} + X^{22} + ... + X^2 + 1) =$
$= (X + 1)^2 \cdot g + a(X + 1) \Leftrightarrow X^{24} + X^{22} + ... + X^2 + 1 = (X + 1) \cdot g + a$; înlocuim $x = -1$ etc.
c) $f = (X^2 + 1)g + aX + b$ (împărțirea se face în $\mathbb{R}[X]$, deci $a, b \in \mathbb{R}$). Suficient să înlocuim în egalitate $x = i$: $f(i) = ai + b$; identificăm apoi părțile reale respectiv imaginare etc.;
d) $f = (X^2 + X + 1)g + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$; înlocuim $x = \varepsilon$ și identificăm ($\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^2 = 1$); e) $f = X^4(X^{21} + X^{20} + ... + 1) + X^3 + X^2 + X + 1$.
8. Gradul numărătorului este mai mare decât al numitorului.
a) Împărțim numărătorul la numitor, obținem: $X^3 + X + 1 = (X^2 + X - 2)(X - 1) + 4X - 1$.

Atunci $\frac{X^3 + X + 1}{X^2 + X - 2} = \frac{(X^2 + X - 2)(X - 1) + 4X + 1}{X^2 + X - 2} = X - 1 + \frac{4X + 1}{X^2 + X - 2} = X - 1 +$

$\frac{4X + 1}{(X - 1)(X + 2)}$; scriem $\frac{4X + 1}{(X - 1)(X + 2)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 2}$ etc.

9. c)

	X^3	X^2	X^1	X^0
$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{2}$	

11. a) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$; $f = (X^3 - 6X^2 + 11X - 6)C + aX^2 + bX + c$, înlocuim X cu 1, 2, respectiv, 3; b) $f = (X^3 - 6X^2 + 11X - 6) \cdot \alpha + aX^2 + bX + c$ respectiv $f = (X^3 - 6X^2 + 11X - 6)(\alpha X^2 + \beta X + 8) + aX^2 + bX + c$, cu a, b, c determinați la punctul a).
12. $f(1) = -15$; $f(-1 + i) = 0 \Leftrightarrow -n + p = 0$ și $4 - 2m + n = 0$.
13. Câtul împărțirii este $g = X^2 - 2X$;

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 - 2k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

14. $f = X^3 + 3X^2 - X + 1$; $f = (2X - 1)g + r$, $r \in \mathbb{R}$ (din teorema împărțirii cu rest) $\Leftrightarrow$ $f = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)g + r \Leftrightarrow f = \left(X - \frac{1}{2}\right)2g + r$. Deci: cu schema lui Horner împărim polinomul f la $X - \frac{1}{2}$; obținem $f = \left(X - \frac{1}{2}\right)h + r_1$; rezultă $g = \frac{1}{2}h$ și $r_1 = r$.

15. a)

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	X^{n-3}	...	X^2	X^1	X^0	
1	1	0	0	0	...	0	1	1	
		1	1	1	...	1	1	2	3

16. Suma coeficienților este $f(\hat{1})$; deci restul $= f(\hat{1}) = \hat{2}$.

17. $f = (X^2 - X + 1)C + 3X - 2$; înlocuim X cu $X + 1$, obținem: $f(X + 1) = [(X + 1)^2 - (X + 1) + 1]C(X + 1) + 3(X + 1) - 2 \Leftrightarrow f(X + 1) = (X^2 + X + 1)C(X + 1) + 3X + 1$, restul este $3X + 1$.

18. Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$; $f(f(x) - f(x) = a_0 + a_1f(x) + ... + a_n(f(X))^2 - a_0 - a_1X - ... - a_nX^n = a_1(f(X) - X) + a_2(f^2(X) - X^2) + ... + a_n((f(x))^n - X^n) = (f - X) \cdot g$ (deoarece fiecare termen $f^k(x) - X^k = (f - X) \cdot g_k$). Rezultă $f(f) = (f - X)g + f = (f - X) \cdot g + (f - X)(g + 1) + X$. Deci restul împărțirii este X.

19. a) $f = (X + 1)^5 + a(X + 1)^4 + b(X + 1)^3 + c(X + 1)^2 + d(X + 1) + e$. Putem împărți repetat la $X + 1$ cu schema lui Horner sau înlocuim formal în egalitate $X \to X - 1$ obținem: $f(X - 1) = X^5 + aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$, însă $f(X - 1) = (X - 1)^5 + 3(X - 1)^3 - (X - 1)^2 + 2$. Dezvoltăm binoamele, identificăm etc. b) $f = (X + 1)^3[(X + 1)^2 + a(X + 1) + b] + c(X + 1)^2 + d(X + 1) + e$; restul este $c(X + 1)^2 + d(X + 1) + e$, cu c, d, e determinați la a).

pag. 124

2. b) restul împărțirii lui f la g este $\frac{-b + 1 - a}{2}X + \frac{b^2 + b - ba - 2}{2}$; identificăm restul cu 0.

3. a) Avem condiția $\varepsilon^n + \varepsilon + 1 = 0$; $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$; b) $(i^2 + i + 1)^n - i = 0 \Leftrightarrow i^n - i = 0 \Leftrightarrow i = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

4. a) $X^4 + X^2 + 1$; $X^6 - 1$; b) 1; $f \cdot g$; e) $X - 1$; $(X^4 - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$.

5. $f \cdot X - g = 1$; rezultă $(f, g) = 1$; $(X^n - 1, X^{n-1} - 1) = X - 1$.

6. a) Nu, deoarece $(X^3 + X + 1)$ nu divide $(X^4 + X^2 + 3)$. b) Împărțim $X^4 + aX^3 + X + b$ la $X^2 + X$ și identificăm restul cu 0.

7. a) $(a, b) = 10 \Rightarrow a = 10a_1$, $b = 10b$, $(a_1, b_1) = 1$; $ab = 2400 \Leftrightarrow 100a_1b_1 = 2400 \Leftrightarrow a_1b_1 = 24 \Leftrightarrow (a_1 = 1, b_1 = 24)$ sau $(a_1 = 3, b_1 = 8)$; $(a_1 = 8, b_1 = 3)$; $a_1 = 24$, $b_1 = 1$.
b) Fie $a = da_1$, $b = db_1$, $(a_1, b_1) = 1$; atunci $[a, b] = da_1b_1$. Avem $d(a_1 + b_1) = 98$ și $da_1b_1 = 720$; $(98720) = 2$, deci $d / 2$, adică $d = 1$ sau $d = 2$; dacă $d = 1$, $a_1 + b_1 = 98$ și $a_1b_1 = 720$ cu soluțiile $a_1 = 90$ și $b_1 = 8$ care nu sunt prime între ele; dacă $d = 2$, atunci $a_1 + b_1 = 4$, $a_1b_1 = 360$ cu soluțiile (prime între ele) $a_1 = 40$, $b_1 = 9$ sau invers.

8. c.m.m.d.c. al polinoamelor trebuie să fie de gradul al doilea (după două etape în algoritmul lui Euclid restul trebuie să fie 0). Rezultă $a = -1$.

9. b) $f = (X^2 + 1)f_1$; $g = (X^2 + 1)g_1$, $(f_1, g_1) = 1$; $[f, g] = (X^2 + 1) \cdot f_1 \cdot g_1$.
Rezultă $f_1 \cdot g_1 = X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$; convine $f_1 = X + 1$ și $g_1 = X + 1$.

10. $(f, g, h) = ((f + g), h) = (X - 1, h) = X - 1$; $[f, g, h] = [[f, g], h] = [-X^2 + 1, X^2 + X^2 - 2] = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 2X + 2)$.

11. a) 1; b) 1; c) $X + 1$.

12. $f = g \cdot X + r_1$; $g = r_1X + X^2 - 1$; $r_1 = (X^2 - 1)X + 0$

13. b) $X^{-3} + 2X^2 + 11X + a \quad \big| \; X^3 + X^2 + 14X + b$

$\underline{X^3 + X^2 + 14X + b} \qquad 1$

$/ \quad X^2 - 3X + a - b$

$X^3 + X^2 + 14X + b \quad \big| \; X^2 - 3X + a - b$

$\underline{X^3 - 3X^2 + (a-b)X} \quad \big| \; X + 4$

$/ \; 4X^2 + (14 - a + b)X + b$

$\underline{4X^2 - 12X + 40 - 4b}$

$/ \; (26 - a + b)X + 5b - 4a$

Rezultă că ultimul rest trebuie să fie 0, adică $26 - a + b = 0$ și $5b - 4a = 0$ etc.

14. Existența polinoamelor f și g este asigurată de faptul că $(X^2 + 2X + 2; X^2 + 3X + 3) = 1$. Avem $(X^2 + 3X + 3)(X + 3) + (X^2 + 2X + 2)(-X - 4) = 1$.

15. a) Fie $(X^n - 1, X^m + 1) = d$, rezultă $X^n - 1 = d \cdot d_1$, $X^m + 1 = dd_2$, $(d_1, d_2) = 1$. Adică $X^n = dd_1 + 1$; $X^m = dd_2 - 1$, atunci $(X^n)^m = (dd_1 + 1)^m = (dd_2 - 1)^n$. Din $(dd_1 + 1)^m = (dd_2 - 1)^n$ deducem $d \cdot g_1 + 1 = dg_2 - 1$, obținem $d / 2$, adică $X^n - 1$ și $X^m + 1$ sunt prime între ele. b) La fel notând $(a^n - 1, a^m + 1) = d$, $d \in \mathbb{Z}$ deducem $d / 2$ rezultă că $d = 1$ sau $d = 2$ (abstracție de semn).

pag. 134

2. a) $f(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^3 + a - 3 = 0$, observăm soluția $a = 1$; împărțim $2a^3 + a - 3$ la $a - 1$ etc.

3. a) $f(i) = 0$; b) $f(\varepsilon) = (\varepsilon + 1)^{11} + \varepsilon^7 = (-\varepsilon^2)^{11} + \varepsilon^7 = -\varepsilon^{22} + \varepsilon^7 = -\varepsilon + \varepsilon = 0$; c) fie $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o rădăcină a polinomului g; $\alpha^3 = -1$; $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, $f(\alpha) = \alpha^{6n-1} + \alpha - 1 = \alpha^{6bn} \cdot \alpha^{-1} +$

$+ \alpha - 1 = \alpha^{-1} + \alpha - 1 = \dfrac{1}{\alpha} + \alpha - 1 = \dfrac{1 + \alpha^2 - \alpha}{\alpha} = 0$; d) $f = \widehat{10}X^{11} - \widehat{10}X^{10} - X^{10} + \hat{1} =$

$= \widehat{10}X^{10}(X - \hat{1}) - (X^{10} - \hat{1}) = (X - \hat{1})(\widehat{10}X^{10} - X^9 - \ldots - X - \hat{1}) = (X - \hat{1}) \cdot g$; însă $g(\hat{1}) = 0$,

deci $g \vdots X - \hat{1}$.

4. a) $X^2 + 3X - 4 = (X - 1)(X + 4)$; b) $X^4 + 3X^2 - 4 = (X^2 - 1)(X^2 + 4) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 4) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$; c) $X^4 + X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) = (X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)(X - X_4)$; d) $X^4 + 4 = X^4 + 4X^2 + 4 - 4X^2 = (X^2 + 2)^2 - 4X^2 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2) = \ldots$; e) $X(X + 1)(X + 2)(X + 3) = [X(X + 3)][(X + 1)(X + 2)\} = (X^2 + 3X)(X^2 + 3X + 2)$; notăm $X^2 + 3X + 1 = Y$ etc.

5. a) polinomul nu se anulează în $\mathbb{Z}_3$.

b) $f(\hat{1}) = \hat{2} + a + \hat{1} = \hat{3} + a = \hat{0}$ $a = \hat{0}$; $f(\hat{2}) = f(-\hat{1}) = -\hat{2} - a + \hat{1} = -a - \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow a = -\hat{1} = \hat{2}$; dacă $a \neq \hat{0}$ și $a \neq \hat{2}$, atunci polinomul nu se anulează în $\mathbb{Z}_3$, deci este ireductibil.

6. $f(-\hat{1}) = 0$; $x^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2} \vdots (X + \hat{1})$ etc.

7. a) Polinomul nu se anulează în $\mathbb{Z}_2$, deci nu are în descompunere factori de gradul I. Ar putea să se descompună în produs de factori de gradul al doilea $X^4 + X^3 + X^2 + X + \hat{1} = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$; înmulțim, identificăm și obținem sistemul $a + c = \hat{1}$; $b + d + ac = \hat{1}$; $ad + bc = \hat{1}$; $bd = \hat{1}$. Din ultima ecuație obținem $b = d = \hat{1}$. Înlocuind în celelalte obținem $a + c = \hat{1}$ și $ac = \hat{1}$; imposibil.

b) $X^5 + \hat{1} = X^5 - \hat{1} = (X - \hat{1})(X^4 + X^3 + X^2 + X + \hat{1})$; c) $X^4 + 1 = X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + \hat{1}) = (X - \hat{1})(X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$; d) $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + \hat{1} = (X^4 + X^3 + X^2) + (X^2 + X + \hat{1}) = X^2(X^2 + X + \hat{1}) + (X^2 + X + \hat{1}) = (X^2 + X + \hat{1})(X^2 + \hat{1}) = (X - \hat{1})^2(X^2 + \hat{1})$.

8. a) $(X - \hat{1})(X - \hat{5})$; b) $X^2 + \hat{1}$.

9. a) $X^2 - 3$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ deoarece nu se anulează în $\mathbb{Q}$. În schimb în corpul $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ se anulează având rădăcinile $\pm\sqrt{3}$. b) Polinomul nu poate avea gradul 1 și nici 2; de grad 3 este polinomul $X^3 - 3$.

10. a) $\Delta = \hat{9} - \hat{8} = \hat{1}$; $x_{1,2} = (\hat{3} \pm \hat{1})(\hat{2})^{-1} = (-\hat{3} \pm \hat{1}) \cdot \hat{3}$; $x_1 = \hat{4}$, $x_2 = \hat{3}$; c) $\Delta = \hat{3}$, care nu este pătrat, deci ecuația nu are soluții.

11. a) $f = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 1$; b) Fie $g(X) = f(X) - f(-X)$; rezultă că $f(x + T) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{C}$. Să presupunem că grad$(g) \le 6$ și g se anulează de cel puțin 6 ori: în $a, -a, b, -b, c, -a$. Rezultă că $g = 0$, adică $g(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
12. a) Fie $T > 0$ astfel încât $\bar{f}\,(x + T) = \hat{f}\,(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{C}$, rezultă că $f(x + T) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{C}$. Să presupunem că grad$(f) \ge 1$. Fixăm $x_0 \in \mathbb{C}$. Avem $f(x_0) = f(x_0 + T) = f(x_0 + 2T) = ... = f(x_0 + nT)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Rezultă că polinomul f și polinomul constant $f(x_0)$ sunt egale într-o infinitate de valori. Rezultă că polinoamele sunt egale: $f = f(x_0)$, adică grad$(f) \le 0$, contradicție.
b) Dăm valori lui x în egalitatea dată; din $x = -3$, scoatem $f(0) = 0$, deci $f \,\vdots\, X$; din $x = 0$, scoatem $f(3) = 0$, deci $f \,\vdots\, (X - 6)$. Deducem că $f \,\vdots\, X(X - 3)(X - 6)$, adică $f = X(X - 3)(X - 6)g$, $g \in \mathbb{C}[X]$. Înlocuind în relația dată, obținem: $(X + 3)X(X - 3)(X - 6)g(X) = (X - 6)(X + 3)X(X - 3)g(X + 3)$, de unde $g(X) = g(X + 3)$ ($\bar{g}$ este funcție periodică de perioadă 3). Rezultă $g = k$ (constant) și $f = kX(X - 3)(X - 6)g$.
c) Funcția sinus este periodică, deci dacă ar fi polinomială ar fi constantă, contradicție.
13. Fie $f = X^{10} + aX + \hat{9}$, dacă $\alpha \in \mathbb{Z}_{11}$ avem $f(\alpha) = \alpha^{10} + a\alpha + \hat{9} = \hat{1} + a\alpha + \hat{9} = a\alpha + \widehat{10} = a\alpha - \hat{1}$ (În grupul $\mathbb{Z}_{11}^*$ puterea a zecea este $\hat{1}$); $f(\alpha) = \hat{0} \Leftrightarrow a\alpha = \hat{1} \Leftrightarrow \alpha = a^{-1}$. Așadar, f se anulează, deci polinomul f este reductibil.
14. Fie polinomul în nedeterminata X, $f = (x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$; observăm că $f(-y) = 0$; rezultă $f \,\vdots\, (x + y)$; analog $f \,\vdots\, (x + z)$ și $f \,\vdots\, (y + z)$. Rezultă că $f = (x + y)(x + z)(y + z) \cdot (\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta(xy + xz + yz))$. Dând valori lui x, y, z determinăm α, β.
15. Scriem funcția polinomială de grad 3 care exprimă volumul V în funcție de timp. Fie $V_1(t) = V(t) + 1000$; deducem $V_1(10) = 0{,}25$; $V_2(30) = 4{,}33$, $V_1(60) = 16{,}9$, $V_1(80) = 28{,}9$; obținem $V_1(t) = -0{,}00001t^3 + 0{,}00532t^2 + 0{,}0032t - 0{,}284$ (polinomul de interpolare a lui Lagrange). Rezultă $V_1(50) = 13{,}176$, deci $V(50) = 1013{,}176$ cm^2.
16. Polinomul f se poate scrie $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n$, unde $f_k = \dfrac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}$ (se determină în ordine $\lambda_n, \lambda_{n-1}, .., \lambda_0$). Deoarece $f(0), f(1), ..., f(n)$ sunt întregi, rezultă că $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{Z}$. Dacă $m > n$ avem $f_k(m) = C_m^n$, deci $f(m) \in \mathbb{Z}$, dacă $0 \le m \le n$, $f_k(m) = 0$, pentru $k > m$ și $f_k(m) = C_m^k$, pentru $k \le m$; analog în cazul $m < 0$. **17.** a) $\Delta = \hat{4}$; $x_1 = \hat{3}$, $x_2 = \hat{5}$.
pag. 146
1. Împărțim polinomul la $(X - 2)(X + 2)(X - 1)$ sau folosim primele două relații ale lui Viète.
2. Nu; -1 este rădăcină dublă a polinomului $X^5 - X^3 + X^2 - 1$ și simplă pentru $X^{1998} - 1$.
4. $f' = 4X^3 - 30X^2 + 72X + 4m$; $f^{(2)} = 12X^2 - 60X + 72 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, rădăcina triplă poate fi 2 sau 3.

5. $f = f(-1) + \dfrac{f^{(1)}(-1)}{1!}(X+1) + \dfrac{f^{(2)}(-1)}{2!}(X+1)^2 + \dfrac{f^{(3)}(-1)}{3!}(X+1)^3 + \dfrac{f^{(4)}(-1)}{4!}(X+1)^4.$

6. a) $f = f(-1) + \dfrac{f^{(1)}(-1)}{1!}(X+1) + \dfrac{f^{(2)}(-1)}{2!}(X+1)^2 + (X+1)^3 \cdot g.$

7. d) Împărțim $X^4 + X^2 + 3X + 2$ la $X^2 + X + 2$; obținem câtul $X^2 - X$ și restul $5X + 2$; din $X^4 + X^2 + 3X + 2 = (X^2 + X + 2)(X^2 - X) + 5X + 2$; rezultă $x_1^4 + x_1^2 + 3x_1 + 2 = 5x_1 + 2$ și $x_2^4 + x_2^2 + 3x_2 + 2 = 5x_2 + 2$.

8. a) $x_1x_2x_3 = \dfrac{-i}{3}$; din $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-3i+4}{3}$, obținem $x_1 + x_2 = \dfrac{-2i+4}{3}$, rezultă ecuația $x^2 - \left(\dfrac{-2i+4}{3}\right)x^2 + 1$; rezultă x_1 și x_2.

9. a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 1 \Leftrightarrow x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = x_1x_2x_3 \Leftrightarrow 2 = -1$, imposibil.

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2x_3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = x_1x_2x_3 \Leftrightarrow$
$m^2 - 2 \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow m^2 = 3$; $m = \pm\sqrt{3}$.

10. a) $x_4 = 2$ și verificăm ecuația. b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -10$; rezultă $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -5$. $x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -50 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_3x_4 = 10$; $(x_1x_2)(x_3x_4) = 24$. Rezultă $x_1x_2 = 6$; $x_3x_4 = 4$ etc.

11. $x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 < 6x_1^2x_2^2x_3^2$; $x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 =$
$= (x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2)^2 - 2x_1x_2x_3$; $(x_1 + x_2 + x_3)$; obținem $m^2 - 4 < 0$.

12. a) $x_1^3 - x_1^2 + x_1 + 1 = 0$; $x_2^3 - x_2^2 + x_2 + 1 = 0$; $x_3^3 - x_3^2 + x_3 + 1 = 0$; adunăm egalitățile.
b) înmulțim egalitățile cu x_1, x_2, respectiv, x_3.

14. c) fie $y = 2 - x$ (1); eliminăm x între (1) și $x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$; $x = 2 - y$ și $(2 - y)^3 - 3(2 - y)^2 + (2 - y) + 3 = 0$ etc.; e) $y_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{x_1} = \dfrac{3 - x_1}{x_1}$;

facem schimbarea $y = \dfrac{3 - x}{x}$; f) $y_1 = x_2x_3 = \dfrac{x_1x_2x_3}{x_1} = -\dfrac{3}{x_1}$, facem schimbarea $y = \dfrac{-3}{x}$.

15. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2 - 2(m^2 + 1) = -m^2 - 1 < 0$; b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b$;
$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2(a^2 - 3b) < 0$.

16. a) Fie $f = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$; $f'(x) = a[((x - x_2) \dots (x - x_m) + (x - x_1)(x - x_3) \dots$
$\dots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}))$; $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dots + \dfrac{1}{x - x_n}$;

b) $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sunt rădăcinile polinomului $f = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$; calculăm $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$.

17. a) $x_1 + x_3 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\dfrac{a}{3} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\dfrac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\dfrac{a}{3}\right) + c = 0$
$\Leftrightarrow 2a^3 - 9ab + 27c = 0$; b) considerăm rădăcinile sub forma α, αq, αq^2. Din relațiile lui Viète avem $\alpha(1 + q + q^2) = -a$; $\alpha^2 q(1 + q + q^2) = b$, $\alpha^3 q^3 = -c$; rezultă $b^3 = a^3c$; reciproc:

dacă $a = 0$, avem $b = 0$ și rădăcinile sunt α, $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon^2$; dacă $a \neq 0$, $c = \left(\dfrac{b}{c}\right)^3$; ecuația se scrie

$(ax)^2 + b^3 + a^3bx(ax + b) = 0 \Leftrightarrow (ax + b)(a^2x^2 - abx + b^2) + a^3bx(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$
$(ax + b)(a^2x^2 - (ab - a^3b)x + b^2) = 0$ etc.

18. a) $x_1x_2x_3 = 1$, rezultă $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$; $|a| = |x_1 + x_2 + x_3|$; b) $|b| = |x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3| =$
$= \left| x_1x_2x_3\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right)\right| = 1 \cdot \left|\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right| = |\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3| = |\overline{x_1 + x_2 + x_3}| = |\bar{a}| = |a|$.

b) $b - a = \overline{x_1 + x_2 + x_3} + x_1 + x_2 + x_3 \in \mathbb{R}$, $P(1) = a + b + 2 \in \mathbb{R}$; deci și $a + b \in \mathbb{R}$.

19. a) $x_1 + x_2 + x_3 = -a$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a^2+4a+11}{2}$; eliminăm a între cele două egalități; obținem $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 1$. b) $(x_k - 2)^2 \le 1$; $k = \overline{1,2,3}$; rezultă $-1 \le x_k - 2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x_k \le 3$.

20. Căutăm rădăcini de forma $x = \alpha\sqrt{3}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = -1$, $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

21. grad$(f) = n$; derivăm succesiv și obținem $f = f^{(1)} + X^n$; $f^{(1)} = f^{(2)} + X^{n-1}$; $f^{(2)} = f^{(3)} + n(n-1)X^{n-1}$, ..., $f^{(n-1)} = f^{(n)} + n!Xf^{(n)}\ n!$; adunăm egalitățile:

$f = n!\left(1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}\right)$. Rezolvăm ecuația și obținem soluțiile i, $i - 2i$;

b) $\left(-1, -1, \dfrac{1}{2}\right)\left(1, \dfrac{1}{2}, -1\right), \left(\dfrac{1}{2}, -1, -1\right)$.

23. Din condiții rezultă $a + b + c = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$; $ab + ac + bc = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$, $abc = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$; rezultă că $\{a, b, c\}$ și $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ sunt soluțiile aceleiași ecuații de grad 3; rezultă $\{a, b, c\} = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Nu putem avea $a = \bar{b}$, deoarece ar rezulta $|a| = |\bar{b}| = |b|$, contradicție; analog nu putem avea $a = \bar{c}$; deci $a = \bar{a}$, adică $a \in \mathbb{R}$ etc.

24. Notăm $x + y + z = \alpha$; $xy + xz + yz = \beta$, $xyz = \gamma^2$, x, y, z sunt soluțiile ecuației $t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma = 0$, dacă $f(t) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$; din $\alpha, \beta, \gamma > 0$, deducem că $f(t) < 0$, pentru orice $t \le 0$; prin urmare, ecuația nu are rădăcini negative sau 0.

pag 151

1. a) $x_1 = 3i$; $x_2 = -3i$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$, $x_4 = \dfrac{-2}{3}$. **2.** b) $a = 7 + \sqrt{3}$; $b = 7\sqrt{3}$, $x_{3;4} = \pm i\sqrt[4]{3}$; c) $x_2 = \bar{\varepsilon} = \varepsilon^2$; împărțim $X^4 + aX^3 + X^2 + bX + 1$ la $X^2 + X + 1$; din condiția de rest 0, oținem a, b.

3. b) 0; c) din $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$; $f(1) < 0$ și $f(2) > 0$ deducem că polinomul are câte o rădăcină în intervalele $(-1, 0)$, $(0, 1)$ și $(1, 2)$; deoarece suma pătratelor este 0, atunci nu toate rădăcinile sunt reale; c) Rezultă că ecuația are 3 rădăcini reale și e nereale.

5. a) $(X-1)(X-2)\left(X - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\left(X - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$; b) $(X-1)^2(x - 1 - i)(X - 1 + i)$;

c) $(X - i)^3(X + i)^3$.

6. a) Observăm că 1 este rădăcină, $x - 1$ factor etc; b) $X^5 - 1 = (x-1)(X^4 + X^3 + X^2 + x + 1) = (X-1)(X-\varepsilon)(X-\varepsilon^2)(X-\varepsilon^3)(X-\varepsilon^4) = (X-1)\{(X-\varepsilon)(X-\bar{\varepsilon})(X-\bar{\varepsilon}^2)] = \ldots$;
c) $X^6 + 1 = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1) = (X^2+1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2) = (X^2+1)[(X^2+1)^2 - 3X^2] = \ldots$;
d) $X^4 + 2X^2 - 3 = X^4 - X^2 + 3X^2 - 3 = X^2(X^2 - 1) + 3(X^2 - 1) = (X^2 - 1)(X^2 + 3) = \ldots$

7. Șirul lui Rolle.

8. a) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - 1$ este strict crescătoare, deci are cel mult o soluție; fiind de grad impar polinomul are cel puțin o rădăcină reală; deci rădăcina este unică. Observăm că $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$. b) Fie $x_2 = a + ib$; $x_3 = a - ib$; din $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, deducem că $a = -\dfrac{1}{2}x_1$, deci $a \in \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$, $|x_2|^2 = |x_3|^2 = x_2x_3 = \dfrac{1}{x_1} \in (1, 2)$.

9. a) $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_5^2 = 1 - 2 = -1 < 0$. b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3$; $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 +$ $+ ... + (x_3 - x_4)^2 = 3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) - 2(x_1x_2 + ... + x_3x_4) = 9 - 13 = -4 < 0$.

10. a) $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 13 = 2\sum\limits_{i=1}^{5} x_i - 1$; înlocuind $x_5 = 3$ avem $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum\limits_{i=1}^{4} x_i + 4 = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{4} (x_i - 1)^2 = 0$ $\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$..

11. $x_1x_2x_3x_4 = -32$; deci $(x_k)^5 = 32$, $|x_k| = 2$; dacă $x_1 \in \mathbb{R}$, atunci $x_1 = 2$ sau $x_1 = -2$; celelalte rădăcini sunt $x_1,\ \bar{x}_2, x_3,\ \bar{x}_3$. Din $x_1,\ \bar{x}_2, x_3,\ \bar{x}_3 \cdot x_1 = -32$, rezultă $x_1 = -2$. Scriem ecuația $(X+2)(X^2 + cX + 1)(X^2 + dX + 4)$. Din identificări deducem $c + d = -4$, $4(c + d)\ 2cd + 16 = 8$; $c = d = -2$ etc.

pag. 155

1. a) $x_2 = 1 + \sqrt{5}$; $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = -4$; $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$; $x_3 + x_4 = 2$; $x_1x_2x_3x_4 = 8$, $x_3x_4 = -2$.

2. a) $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = -1$; împărțim polinomul la $X^2 - 2X + 1$, restul trebuie să fie 0; deducem a, b.

3. a) $(X - 2)(X - 3 + 2\sqrt{2})^2(X - 3 - 2\sqrt{2})^2$; b) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = 2 + \sqrt{5}$; $(X - 2 - \sqrt{5})(X - 2 + \sqrt{5})(x - 1 + i)^2(X - 1 + i)^2$.

4. Ecuația mai are rădăcinile $-i$ și $-\sqrt{2}$.

5. $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 3x + 2 - 2\sqrt{2} = 2 \Rightarrow$

$x^3 + 6x - 2 = \sqrt{2}(3x^2 + 2) \Rightarrow (x^3 + 6x - 2)^2 = 2(3x^2 + 2)^2 \Rightarrow ...$

6. $f = (X^3 - 2)C + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$; $f(\sqrt[3]{2}) = 0 \Rightarrow a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$.

7. a) Polinomul admite și rădăcinile $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{5} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

b) Polinomul admite și radăcinile $\sqrt{5} - i$, $-\sqrt{5} + i$, $-\sqrt{5} - i$;

c) Polinomul admite și rădăcinile $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

8. a) $f(\varepsilon) = \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + 1 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. b) Conform cu a) $X^5 + X^4 + 1 = (X^2 + X + 1) \cdot g$, $g \in \mathbb{Z}[X]$, grad$(g) = 3$. Rezultă $n^5 + n^4 + 1 = (n^2 + n + 1)g(n)$; $n^2 + n + 1 \neq 1$.

pag. 159

1. a) Dacă ecuația are rădăcini raționale, atunci ele sunt întregi, aflate printre divizorii lui 4.

3. b) $a = -\dfrac{x^4 - 2x^2 - x}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x^3 + x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}$, deci $(x - 1) \mid 2$ $\Rightarrow x - 2 \in \{-2, 2, -1, 1\}$ etc.

4. Dacă are o rădăcină raționlă, atunci este întreagă.

Determinăm mulțimea $\left\{ m \in \mathbb{Z} \,\middle|\, m = \dfrac{\alpha^3 - \alpha}{\alpha - 2},\ \alpha \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Rădăcina este divizor al lui p: $1, -1, p, -p$. Verificăm pe rând.

6. a) $X^4 + 16X^3 - 60X^2 + 16X + 64 = (X - 2)^2(X^2 + 20X + 16) \geq 0$ (observăm că 2 este rădăcină dublă); b) $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + 1) \geq 0$.

7. a) Notăm $\sqrt[3]{4-x} = a$, $\sqrt{x+1} = b$; avem $a + b = 3$, eliminăm x între a și b: $4 - x = a^3$; $x + 1 = b^2$, deci $a^3 + b^2 = 5$; am obținut sistemul $\begin{cases} a+b=3 \\ a^3+b^3=5 \end{cases}$, scoatem $b = 3 - a$ și-l înlocuim în ecuația a doua: $a^3 + (3 - a)^2 = 5$, obținem o ecuație de gradul al treilea cu coeficienți întregi; soluția este 1 etc.

8. a) Ecuația devine $\sin x(3 - 4\sin^2 x) - \cos^2 x - \sin x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$
$\sin x(3 - 4\sin^2 x) - (1 - \sin^2 x) - \sin x + \sin^2 x = 0$; $-4\sin^3 x + 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$;

notăm $\sin x = t$, $-4t^3 + 2t^2 + 2t - 1 = 0$; $t = \frac{1}{2}$ rădăcină etc.

b) împărțim cu $\cos x$: $\mathrm{tg}x - 1 = 4\cos^2 x \Leftrightarrow \mathrm{tg}x - 1 = \frac{4}{1+tg^2x}$;

notăm $\mathrm{tg}\, x = t$; $(t - 1)(t^2 + 1) = 4$, etc.

c) împărțim cu $\cos^4 x$: $\mathrm{tg}^4 x + 5\mathrm{tg}^3 x + 5\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x - 12 = 0$; notăm $\mathrm{tg}\, x = t$; căutăm soluții întregi ale ecuației $t^4 + 5t^3 + 5t^2 + t - 12 = 0$.

9. a) Aria bazei $= \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Înălțimea $AO = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{3}}$. Vol $= V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{3}} =$

$= \frac{1}{12}x^2\sqrt{3a^2 - x^2}$. Demonstrăm că $V(x) \le V(a\sqrt{2})$, volumul maxim se obține pentru $a\sqrt{2}$.

10. Fie x latura pătratului decupat; $x \in (0, 30)$; volumul cutiei este $(60 - x)^2 \cdot x$
$(60 - x)^2 \cdot x \le 16000 \Leftrightarrow x^3 - 60x^2 + 900x - 4000 \le 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2(x - 40) \le 0$; pătrătul maxim se obține pentru $c = 0$.

11. $f(3) = 1$; $f(-3) = 1$; dacă $\frac{p}{q}$ este rădăcină cu $(p, q) = 1$ este rădăcină, atunci $(3q - p) / 1$ și $(3q + p) / 1$; rezultă $3q - p = \pm 1$; $3q + p = \pm 1$, rezultă $6q = 0$ sau $6q = \pm 2$; contradicție.

pag. 164

1. a) $x^2 = y$; $y^2 + 7y - 8 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -8$; $x^2 = 1 \Rightarrow x_{1;2} = \pm 1$; $x^2 = -8 \Rightarrow x_{3;4} = \pm i\sqrt{8}$.

5. b) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^4 + 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 = 0$; notăm $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = y$ etc; c) $(2x + i)^3 - (2x - i)^3 \Rightarrow$
$\left(\frac{2x+i}{2x-i}\right)^3 = -1$; $y^3 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

6. a) $x = -1$; $ax^2 + x + a = 0$; $\Delta = 1 - 4a^2 \ge 0$; b) $x + \frac{1}{x} = y$; $y^2 - y + a - 2 = 0$ trebuie să aibă rădăcinile reale aparținând $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

7. a) Ecuația este reciprocă: $X^4 - 2X^3 + (2 - a)X^2 - 2X + 1 = 0$. b) Împărțind cu x^2 obținem:
$x^2 + \frac{25}{x^2} + \left(x + \frac{5}{x}\right) + 1 = 0$; notăm $x + \frac{5}{x} = y \Rightarrow y^2 - 10 + y + 1 = 0$ etc.

c) Împărțim cu x^2: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 5x + \frac{5}{x} + 2 = 0$; $x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$; notăm $x - \frac{1}{x} = y$
$\Rightarrow y^2 + 2 - 5y + 2 = 0$.

d) Privim ecuația ca ecuație de gradul al doilea cu necunoscuta în a:

$a^2 + (1 + x^2 - 2x)a - x^3 - x^2 - x = 0$; $\Delta = (x^2 + 1)^2$; $ai = \dfrac{-1 - x^2 + 2x \pm (x^2 + 1)}{2}$;

$2a = 1 - x^2 - 2x + x^2 + 1 \Leftrightarrow x = a - 1$ sau $2a = -1 - x^2 + 2x - x^2 - 1 \Leftrightarrow 2a = -2 + 2x - 2x^2$ $\Leftrightarrow x^2 - x + a + 1 = 0$ etc. e) $x^4 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x - 1)^2$ $\Leftrightarrow x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}\,(x - 1)$ etc. f) Ecuația are ca rădăcini inversele rădăcinilor de la e).

Capitolul 4
pag. 180

1. Dacă $a = b$ funcția este constantă, deci admite primitive. Dacă funcția admite primitive, atunci are P.D. , iar Imf este interval, deci a. **2.** f nu are P.D. **3.** a), b), **c)** funcții continue.

4. funcții cu discontinuități de speța I; **5.** $F' = f$; **6.** $F' = f$. **7.** $a = b = 1$. **8.** a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x + c$;

b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln x + C$; c) $F(x) = \sin x - 2\cos x + C$; d) $F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} + e^x + C$;

e) $F(x) = 3\operatorname{tg} x - 2x\operatorname{tg} x + C$; f) $F(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$; g) $F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$;

h) $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-2}{x+2} + C$; i) $F(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C$; j) $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right) + C$;

k) $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right) + C$; l) $F(x) = \arcsin\dfrac{x}{2} + C$. **9.** a) $F(x) = 2\sin\dfrac{x}{2} + C$;

b) $F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\cos 2x + C$; c) $F(x) = \dfrac{3^{4x}}{4\ln 3} + C$; d) $F(x) = \dfrac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + C$;

e) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\sin(2x+1) + C$; f) $F(x) = \dfrac{1}{2}\arcsin(2x+1) + C$.

11. a) $a = b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{2}{3}$**;** b) $a = b = 1$, $c = 4$; c) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$; d) $a = b = \dfrac{1}{2}$.

12. a) $x + C$; b) $\dfrac{\pi}{2}x + C$; c) $\dfrac{\pi}{2}x + C$; d) $\dfrac{x^3}{3} + C$.

13. Suma dintre o funcție care nu admite primitive și una care admite primitive.

14. Se scrie funcția dată ca suma dintre o funcție care admite primitive și una care nu admite primitive;

16. a) $F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + c, & x < 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + 1 + c, & x \geq 1 \end{cases}$; b) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + c, & x < 0 \\ x^2 + c, & x \geq 0 \end{cases}$;

c) $F(x) = \begin{cases} e^x + c, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + x + 1 + c, & x < 0 \end{cases}$; **d)** $F(x) = \begin{cases} -\cos x + c, & x > 0 \\ \sin x - x - 1 + c, & x \leq 0 \end{cases}$.

19. Vezi exemplul **4.**; **20.** $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+c, & x\neq 0 \\ c, & x=0 \end{cases}$ este o primitivă a lui f, f are discontinuități de speța II; **22.** funcțiile au P.D. $f(x)=1, f(x)=-1$. **23.** $f(x)=2\sqrt{2}\,x+C$.

24. a) $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x+C$; b) $\ln \mathrm{tg}x+C$; c) $\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C$; d) $\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C$;

e) $\frac{(2\sqrt{5})^x}{\ln(2\sqrt{5})}+C$; f) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$; g) $\mathrm{tg}x-x+C$; h) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin 6x}{6}-x\right)+C$.

25. $f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ e^x-1, & x>0 \end{cases}$. **26.** Se consideră funcția $g(x)=F(x)=x^{2n}$.

27. Se consideră funcția $g(x)=F^2(x)-x^2$. **28.** $F(x)=Ce^{\frac{x}{k}}$.

29. Înmulțind cu e^x obținem $(F(x)e^x)'=e^x\sin x$. **30.** Se consideră funcția $g(x)=xF(x)$.

Capitolul 5
pag. 202

1. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{n}$. **2.** a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{71}{300}$; c) $\frac{\pi}{24}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; d) $\frac{5}{3}$; e) $\frac{1}{2}$.

3. a) $\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$; b) $\frac{2\left(n^2-1\right)}{3n^2}$. **4. F**uncții cu discontinuități de speța I.

5. Funcție nemărginită. **6. F**uncție nemărginită. **7.** Funcție nemărginită și fără P.D.

8. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) 6; d) ln2; e) $e-1$; f) 1; g) $\frac{\pi}{4}$; h) ln2; i) $\frac{\pi}{3}$; j) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; k) $\frac{\pi}{4}$; l) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;

m) $\frac{1}{\ln 2}$; n) $\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; o) $\frac{\pi}{6}$; p) $\frac{2}{3}$; r) $\frac{17}{72}$; q) 1; s) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; t) $\ln\sqrt{3}$; u) $\ln\sqrt{3}$; v) $\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$.

11. Funcții cu discontinuitate de speța I. **12.** Funcții cu discontinuitate de speța I.

13. Funcții cu discontinuitate de speța I; $\frac{5}{6}$. **14.** Funcții cu discontinuitate de speța I; $\frac{1}{3}$.

15. Funcții cu discontinuitate de speța I; $e-\frac{1}{e}$. **16.** 1. **17.** 2. **18.** –2. **19.** $\frac{5}{2}$. **20.** 2.

21. a) 12; b) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; c) $\frac{2}{3}$; d) 8; **e)** $4\sqrt{2}$; f) $2\ln\frac{2}{3}$.

22. Considerăm un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu norma ce tinde la zero , iar sistemul de puncte intermediare ξ,asociat acestor diviziuni îl va conține puncte cu proprietatea din ipoteză; șirurile de sume Riemann associate acestor diviziuni, acestor sisteme de puncte intermediare și funcției f sunt $\sum_{k=1}^{n} e^{\xi_k}\left(x_k-x_{k-1}\right)$ și au ca limită

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; se consideră funcția g: $[a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$ care este funcție continuă și deci integrabilă. Șirul sumele Riemann associatefuncției g, diviziunii, și punctelor intermediare de mai sus este același ca cel asociat funcției f, deci șirurile au aceiași limită.
23. Se procedează la fel considerând sistemul de puncte intermediare din mulțimea numerelor raționale și funcția $g(x) = 1$. **24.** Folosim $m(b - a) > \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < M(b - a)$.

25. a) Se demonstrează că $e^x < (1 + x)^{x+1}$, $\forall\, x \in (1, 2)$ prin logaritmare obținem $x < (x + 1)\ln(x + 1)$ etc; b) demonstrăm că $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$; considerăm funcția $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ și îi studiem monotonia cu ajutorul derivatei I.

26.a) $0 \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_n^{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} \to 0;$

b) $0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0.$

27. $f(x) = x - \frac{1}{2}$. **28.** Nu neapărat. **29.** Funcții nemărginite.

30. a) Din $\frac{x^n}{2x+3} \le \frac{x^{n+1}}{2x+3}$, rezultă $I_n \le I_{n+1}$; b) $I_n = \frac{1}{2n} - \frac{3}{2}I_{n-1}$; c) 0.

Capitolul 6
pag. 217

1. Din teorema de medie și din injectivitate. **2. S**e aplică teorema de medie.

3. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1} = \int_0^1 x^p\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f(x) - x^p\right)\mathrm{d}x = 0$ și mai departe se aplică teorema de medie funcției $f(x) - x^p$. **4.** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_a^b \left(f(x) - x\right)\mathrm{d}x \ge 0$ aplicând teorema de medie pentru funcția $f(x) - x$ și obținem existența unui număr $c \in [a, b]$ astfel încât $\int_a^b \left(f(x) - x\right)\mathrm{d}x = (b - a)f(c) \ge 0$ și cum f continuă $\Rightarrow$ existența unui $x_0 \in (a, c)$, a.î. $f(x_0) = 0$.

5. Fie $h(x) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - f(a)\int_a^x g(x)\mathrm{d}x - f(b)\int_x^b g(x)\mathrm{d}x$, funcție care este continuă.

$h(a) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - f(b)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ și $h(b) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - f(a)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Presupunând că f este crescătoare avem $f(a) \le f(x) \le f(b)$ şi cum $g(x) \ge 0$ avem $f(a)g(x) \le f(x)g(x) \le f(b)g(x)$ şi ţinând cont de această ultimă relaţie avem $h(a)h(b) \le 0$, adică există $c \in [a, b]$, a. î. $h(c) = 0$. **7.** Se aplică l'Hospital a) 0; b) 1; c). **8.** Două puncte de extrem 0 şi 1. **9.** $\pm\sqrt{3}$. **10.** $f(x) = \ln(x + 1) + C$. **11.** $f(x) = -4e^{-x}(x + 1) + C$.
12. Se aplică teorema de medie şi apoi criteriul "cleştelui". a) 1; b) 1; c) 0; d) 0.

13. Se aplică teorema de medie şi se consideră funcţia $g(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x - (b - x)f(x)$.

14. Se aplică terema lui Rolle funcţiei $g(x) = \frac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

15. Se aplică teorea de medie şi apoi de două ori teorema li Rolle. **16.** Se aplică teorema fundamentală de existenţă a primitivelor unei funcţii continue. **17.** Dderivăm şi obţinem derivata nulă. **19.** Derivăm şi constatăm că derivata este pozitivă.

Capitolul 7
pag. 239

1. a) 1; b) $\frac{2e^3+1}{9}$; c) $e - 2$; d) $e - 2$; e) -2; f) 1; g) $\frac{\pi}{2}-1$; h) $\frac{1-\ln^2 2}{2}$; i) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$;

j) $\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi^2}{32}$; k) -2π; l) $\frac{e-2}{2}$. **2.** a) 2; b) 0; c) $\frac{3\sqrt{3}+\ln\left(3+\sqrt{10}\right)}{2}$.

3. a) $a = 0$, $b = 1$; b) $a = -2$, $b = -1$. **4.** a) $-\frac{\pi}{4}$; b) ln3; c) $\ln\sqrt{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{e-1}{2}$; f) $\frac{2}{3}$;

g) $\frac{\pi}{8}$; h) $\frac{\pi}{12}$; i) $\arcsin e^{-1} - \frac{\pi}{2}$; j) ln2; k) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$; l) $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$; m) $\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

n) $\frac{1}{\ln 2}$; o) $2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. **5**. Funcţii impare a), b), c), d) 0.
6. a) Se scrie numărătorul ca o combinaţie liniară de numitor şi de derivata numitorului astfel integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\left(e^x+\sin x+\cos x\right)}{e^x+\sin x+\cos x}+\frac{\frac{1}{2}\left(e^x+\cos x-\sin x\right)}{e^x+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x =$

$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\ln(e^x+\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\ln\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}\right).$$

b) schimbare de variabilă $x= -t$ şi adunăm integrala obţinută cu cea iniţială; $\frac{1}{3}$.
7. a) Se face schimbarea de variabilă $\sin x^2 = t$ urmată de o integrare prin părţi;
b) se procedează asemănător. **8.** a) $\frac{\pi}{8}\ln 2$; b) π; c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; d) $\frac{\pi}{2}$;

e) $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$; f) se procedează ca la a); g) se face schimbarea de variabilă tg$x = t$; h) se face schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}$; 0.

9. a) $\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\pi - 2$; d) $\frac{4\sqrt{2}-1}{5}-\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; e) $\frac{8}{105}$; f) $\frac{\ln 9}{2}$; g) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$; h) $\frac{1}{6}\ln\frac{2^6+1}{2^7}$; i) $\frac{1}{4}\ln\frac{3^4(2^4-1)}{(3^4-1)2^4}$. **10.** Se folosește ex.rezolvat 4. și teorema de medie.

11. f' este periodică și impară; se face schimbarea de variabilă $x = 2T - t$.

12. a) $I_1 = 1$, $I_2 = \frac{\pi}{4}$; b) $nI_n = (n-1)I_{n-2}$; c) ambele limite sunt 1.

13. a) $I_0 = e - 1$; b) $I_n = e - nI_{n-1}$. **14.** a) $I_0=\frac{\pi}{4}$, $I_1=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$; c) 0.

15. a) $I_{n+1}-I_n=\int_1^e(\ln x-1)\ln^n x\,dx$ și de aici $I_{n+1} \le I_n$ și $I_n \ge 0$; b) $I_n = e - nI_{n-1}$; c) 0.

16. Se integrează pe intervalul [0, 1] identitatea $\left(1+x\right)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$.

17. Integrăm prin părți $\int_a^b f(x)f''(x)\mathrm{d}x=f(x)f'(x)\Big|_a^b-\int_a^b\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$.

Capitolul 8
pag. 262

1. a) $\frac{47}{6}$; b) $\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}$; d) $\ln\frac{3}{2}$; e) $\frac{3}{4}$; f) $\frac{3}{8}$; g) $\frac{7}{24}$; h) $\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{13}\right)\right)$; j) $\frac{1}{2}$; k) $\frac{1}{20}$; l) $\frac{7}{24}$. **2.** a) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$; b) ln 3; c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; d) $\ln\sqrt{2}$; e) arctg 4 – arctg 2; f) ln 4. **3.** **a)** $\ln\frac{4}{3}$**;** b) $\ln\frac{4}{3}$; c) $\ln\frac{4}{3}$; d) $\ln\frac{9}{8}$; e) $3\ln\frac{6}{7}$ – 2ln 4; f) $\frac{1}{2}\ln\frac{32}{3}$; g) –3ln 2 + 2ln 3; h) 9 ln 2 – 5 ln 5; i) 3ln 5 – 5ln 3.

4. a) $-\frac{1}{4}$ ln 3; b) $-\frac{9}{20}\ln 3+\frac{3}{5}\ln 2$; c) $\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{3}\ln 5$; d) $\ln\frac{16}{9}$; e) 9ln2 + 2ln 3 – $\frac{11}{2}\ln 5$; f) 5ln2 – 2ln5; g) $\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$; h) 2ln3 + 16ln2.

5. a) $\frac{1}{3}\ln 2+\sqrt{3}\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{6}\ln\frac{13}{7}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$; c) $\frac{1}{7}\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{7\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}$; d) $-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{\pi}{8}$; e) $\frac{5}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\ln\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

8. a) se amplifică cu x^2 și se face substituția $x^3 = t$, $\frac{2}{3}\ln\frac{4}{3}$; b) se amplifică cu x și se face substituția $x^2 = t$, $\frac{1}{8}\ln\frac{45}{13}$; c) $\frac{1}{4}\ln 2$; d) se scrie $\int_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$; $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; e), b și g) se face substituția $x + \frac{1}{x} = t$ și $x - \frac{1}{x} = y$; h) $\frac{25}{3}$;

i) se face substituția $x - \frac{1}{x} = t$. **9.** a) $\cos x = t$; b) $\cos x = t$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\, x\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^2 x\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\mathrm{tg}^2 x + 1\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}x$; e) analog d); f) $1 + \sin^2 x = t$; g) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$; h) analog g); i) $\mathrm{tg}x = t$; j) și k) analog g); l) $\mathrm{tg}x = t$; m) analog g); n) $\sin x = t$; o) $\cos x = t$; p) $\mathrm{tg}x = t$; q) $\sin^2 x = t$; r) $\mathrm{tg}x = t$; s) $\sin^2 x = t$; t) $\mathrm{tg}x = t$; u) $\mathrm{tg}x = t$; v) se transformă produsul în sumă; x) se folosesc formulele pentru arcul triplu și dublu și se transformă produsul în sumă ; y) $\lim\limits_{\substack{\alpha\to\pi \\ \alpha<\pi}} \int_0^{\alpha} \frac{1}{2+\sin x}\mathrm{d}x + \lim\limits_{\substack{\alpha\to\pi \\ \alpha>\pi}} \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}\mathrm{d}x$ cu substituția $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$; z) analog y).

10. a) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x$; b) $\sqrt{x} = t$; c) $\sqrt[3]{x} = t$; d) $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = t$; e) $\sqrt{2-x} = t$; f) $\sqrt{x+4} = t$; g) $\sqrt{x-1} = t$; h) $\sqrt{x+1} = t$; i) $\sqrt[3]{x+2} = t$; j) amplificăm cu x și facem substituția $x^2 + 1 = t$; k) $x + \frac{1}{2} = t$; l) amplifică cu x^2 și facem substituția $x^3 = t$; m) $8x + 1 = t$; n) $x + 1 = \frac{1}{t}$; o) și q) $x + 1 = t$; p) $x - 1 = t$; r) $x + 1 = i$.

11. Se efectuează $I + J$ și $I - J$. a) $I = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{e^2 - \cos 2 - \sin 2}{2 - \cos 1 - \sin 1} + 1\right)$;

$J = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{e^2 - \cos 2 - \sin 2}{e - \cos 1 - \sin 1} - 1\right)$; b) $I = -1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; $J = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$;

c) $I = J = \frac{1}{4}$.

12. Pentru J se face substituția $x + 1 = t$; pentru K se face substituția $\sqrt{x} = t$; pentru L se face substituția $x = \sin^2 t$.

13. $I_n + 4I_{n-1} + I_{n-2} = 0$.

Capitolul 9
pag. 271

1. a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$; c) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$; d) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1+2x}}\mathrm{d}x$; e) $\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$; f) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$; g) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$; h) $\frac{\pi}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$; i) $\int_0^1 \sqrt{1+x}\mathrm{d}x$.

2. Mai întâi se logaritmează a) $e^{\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_\alpha^1 \ln x\mathrm{d}x}$; b) $e^{\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x}$; c) $e^{\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_\alpha^1 x\ln x\mathrm{d}x}$; d) $e^{\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x}$.

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+1} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{n^2+k}} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n}$ și aplicăm criteriul „cleștelui”.

5. $$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\,\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = \int_0^\pi \frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x .$$

6. $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{n}} \le \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{k}{n^2}} \le \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}3^{\frac{k}{n}}$ și aplicăm criteriul „cleștelui”.

pag. 276

1. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$; c) $\ln\sqrt{2}$; d) 1; e) $\frac{1}{2}$; f) $\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$; g) $1-e^{-2}$; h) e^2.

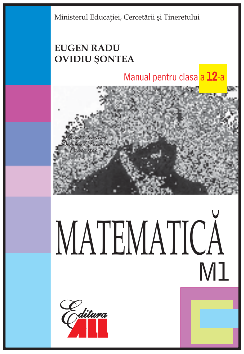
2. a) $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\ln\frac{2\sqrt{2}}{3}$; d) $\frac{65}{4}$; e) $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln\sqrt{2}$; f) $1-\frac{1}{e}$.

3. a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{8(2\sqrt{2}-1)}{3}$; c) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}$; d) $e+\frac{1}{e}-2$; e) $e^5-e^2+\frac{117}{3}$. **4.** $\frac{9}{2}$. **5.** $\frac{1}{3}$ **.**

6. $\ln\sqrt{2}$. **8.** $\frac{9}{16}$ **9. I**ntegrala este egală cu aria semidiscului de centru O și rază 2, adică 2π.

pag. 280

1. a) $\frac{4}{3}\pi$; b) $\frac{\pi^2}{2}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{20}$; e) $\frac{\pi}{3}$; f) 12π. **2.** $\frac{35\pi^2}{24}-2\pi$**.**

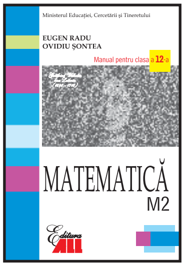


MATEMATICĂ (M1)
Manual pentru clasa a 12-a

filiera teoretică / profil real /
specializarea: matematică-informatică (TC+CD);
filiera vocațională /profil militar MApN /
specializarea: matematică-informatică (CD);
4 ore / săptămână

MATEMATICĂ (TC)
clasa a 10-a
EUGEN RADU
OVIDIU ȘONTEA

MATEMATICĂ (M1)
clasa a 11-a
EUGEN RADU
OVIDIU ȘONTEA



MATEMATICĂ (M2)
clasa a 12-a
EUGEN RADU
OVIDIU ȘONTEA

www.all.ro