Costel Chiteş
(coordonator)
Daniela Chiteş
Daniela Heuberger
Nicolae Muşuroia

Matematică

Teme suplimentare
PENTRU CLASA A V-A

SEMESTRUL
2

CORINT

Date despre autori:
COSTEL CHITEȘ – profesor gr. I la Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu” din București, doctor în matematică, lector dr. la Facultatea de Științe ale Educației, cu o activitate de 10 ani ca inspector de matematică în cadrul Inspectoratului Școlar al Municipiului București, membru în comitetul de redacție al „Gazetei Matematice”, redactor al revistei „Arhimede” și al revistei „Argument”; a publicat manuale pentru clasele IX-XII, culegeri de exerciții și probleme și lucrări cu caracter metodic.

DANIELA CHITEȘ – profesor gr. 1 la Școala nr. 79 „Academician Nicolae Teodorescu” din București, metodist, coautor al mai multor auxiliare școlare de matematică pentru gimnaziu, publicate la diferite edituri, cât și autor al unor articole în reviste de specialitate.

DANIELA HEUBERGER – profesor gr. I la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din Baia Mare, autor a mai multor manuale și culegeri pentru clasele de excelență și pentru olimpiadele școlare și al unor probleme propuse pentru diferite concursuri de matematică interjudețene și naționale, având articole și probleme originale publicate în reviste de prestigiu din țară („Gazeta matematică, „R.M.T.”, „Argument”), redactor-șef adjunct al revistei de matematică „Argument”.

NICOLAE MUȘUROIA – profesor gr. I la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din Baia Mare, autor al mai multor manuale și culegeri pentru clasele de excelență și pentru olimpiadele școlare și al unor probleme propuse pentru diferite concursuri de matematică interjudețene și naționale, având articole și probleme originale publicate în reviste de prestigiu din țară („Gazeta matematică”, „R.M.T.”, „Argument”), redactor-șef al revistei de matematică „Argument”.

Redactare și tehnoredactare computerizată: Mihaela Zbarcea
Coperta: Andreea Apostol

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică: teme suplimentare pentru clasa a V-a: semestrul al II-lea/
Costel Chiteș, Daniela Chiteș, Daniela Heuberger, Nicolae Mușuroia. -
București: Corint, 2013
ISBN 978-973-135-746-1

I. Chiteș, Costel
II. Chiteș, Daniela
III. Heuberger, Daniela
IV. Mușuroia, Nicolae

51(075.33)

Cuprins

Cuvânt-înainte

În prima parte a lucrării noastre intitulată „Matematică. Teme suplimentare pentru clasa a V-a – Semestrul I“, am abordat capitole necesare unei înţelegeri unitare a matematicii, dar şi a aplicaţiilor acesteia în alte domenii.

Trecerea din şcoala primară în gimnaziu şi trecerea din gimnaziu la liceu reprezintă două praguri în formarea oricărui elev.

Ne referim la noul colectiv de elevi, la adaptarea la noile cerinţe şi standarde, cât şi la volumul de informaţii, modul de procesare, la importanţa actului educaţional pe care familia o susţine în acest demers.

Considerăm că actualii elevi au un mod mult mai rapid de achiziţionare a informaţiilor, în primul rând datorat mijloacelor electronice, gândesc mai rapid şi sunt mai spontani fără a fi totdeauna şi mai profunzi. Este datoria noastră, de părinţi, de educatori, de a dirija în sens pozitiv aceste căutări în domeniul cunoaşterii, atunci când acestea există. În caz contrar, trebuie încercate toate formele prin care se poate trezi în elev dorinţa de a învăţa. În acest scop trebuie să punem la contribuţie toate mobilurile posibile: aspiraţia spre mai bine, satisfacţia de a produce bucurie părinţilor, ruşinea de ignoranţă, dezvoltarea spiritului competitiv etc.

Ne dorim ca această lucrare să vină în ajutorul celor ce îşi propun să treacă de nivelul programelor analitice de matematică, programe care acoperă doar o parte din cunoştinţele necesare unei înţelegeri profunde a matematicii, pentru a se bucura de frumuseţe ei şi a multor aplicaţii în cele mai diverse domenii ale cunoaşterii.

Vom încerca să vă determinăm în a vă construi propriile portofolii, în care să adăugaţi continuu noi probleme interesante, aplicaţii diverse şi mici incursiuni proprii de cercetare a unor teme. Gazeta Matematică şi alte reviste de specialitate vă vor direcţiona, vă vor sprijini în încercările temerare de a performa. Susţinem ideea de a utiliza internetul pentru o rapidă informare asupra unor subiecte, a unor aplicaţii ale matematicii în diverse domenii. Nu trebuie uitat că toate aceste informaţii sunt selectate dintr-o bibliografie specializată. Trebuie să ne deprindem cu modul de a selecta cărţile în funcţie de nivelul la care ne aflăm, de gradul de accesibilitate a acestora, de scopurile studiului nostru. Să ne amintim expresia: „cum este biblioteca aşa este şi persoana care o posedă“ . Zborul spre adevăr este imposibil în absenţa elanului, a patosului dionisiac.

Matematica şi poezia au o arhitectură asemănătoare, având în bună măsură aceeaşi esenţă, susţine academicianul Solomon Marcus în lucrarea [3]. „Poezia este un amestec de luciditate şi vrajă. Luciditate înseamnă aici organizare a textului la diferite niveluri. Studiul acestei organizări nu poate fi dezvoltat cu fineţea necesară fără ajutorul matematicii, deoarece organizare înseamnă structură, iar structurile sunt obiectul matematicii.“ [3].

Rezolvarea de exerciţii şi probleme poate fi privită ca un joc intelectual, completarea unui rebus. Relativ la joc, amintim patru trăsături importante ale sale: caracterul agreabil, natura imprevizibilă, aspectul problematic şi cel strategic. Sunt astfel stimulate diferite tipuri de gândire: logică, probabilistică, combinatorială, algoritmică, inductivă, analogică, lingvistică etc. Aceste tipuri de raţionamente sunt utilizate adesea de către copiii de azi, datorită impactului informaticii în societate. Anumite noţiuni pe care noi, adulţii, le învăţam în liceu, copiii noştri le însuşesc operând cu acestea rapid şi corect. Vom prezenta în acest sens un argument. Prin anii 1975, la olimpiada de matematică din U.R.S.S, elevii de clasa a V-a au primit din partea comisiei o problemă dificilă prin care se făcea selecţia. În urma evaluării lucrărilor, comisia de matematică a fost uluită de numărul mare de participanţi care au rezolvat corect problema dificilă. S-au întrebat apoi care este motivul? L-au găsit! Elevii utilizau un alt tip de gândire, algoritmic, logic, mai suplu decât se aştepta comisia. Profesorii din comisie nu puteau rezolva acel tip de problemă la vârsta elevilor evaluaţi. Din acest motiv credeau că problema este dificilă.

Ne fac o deosebită bucurie, copiii din ziua de azi, care rezolvă jocuri de lego cu o rapiditate demnă de invidiat. Acesta este motivul pentru care credem că nu trebuie să frânăm dezvoltarea intelectului copiilor noştri, ci trebuie să o susţinem prin toate mijloacele pe care le avem. Învăţarea continuă este necesară pe întreg parcursul vieţii. Acest adevăr trebuie perceput de fiecare copil prin exemplul dat de adulţi.

Un expert în rezolvări de probleme, spunea Howard W. Eves, „trebuie înzestrat cu două calităţi incompatibile: o imaginaţie neobosită şi o stăruinţă plină de răbdare“.

Lucrarea noastră încearcă să sprijine o înţelegere mai clară a conceptelor, să prezinte modele de exerciţii rezolvate, să evidenţieze aplicaţii ale cunoştinţelor asimilate.

Am preferat să dezvoltăm dorinţa cercetărilor proprii prin generalizări ale unor proprietăţi, prin incursiuni în istoria matematicii.

Considerând că matematica nu este doar un instrument pentru celelalte ştiinţe, ci este un act de cultură indispensabil pentru fiecare dintre noi, am prezentat la finalul lucrării scurte prezentări ale matematicienilor citaţi, lansând elevilor interesaţi alte dezvoltări.

Lectura manualului, parcurgerea notiţelor din clasă, rezolvarea temelor rămân fundamentale pentru elevi. Materialul nostru sperăm să dea o nouă lumină, să deschidă direcţii spre aplicaţii, care în anii următori de şcoală îşi vor arăta rolul. Am ales tipuri importante de probleme pe care le-am analizat şi rezolvat complet, propunând apoi lectorului exerciţii asemănătoare. Am evidenţiat probleme de numărare din motivele mai sus menţionate. Caracterul agreabil al acestora, importanţa lor în aplicaţiile practice, cotidiene, au rolul de a evidenţia utilitatea directă, indispensabilă a unor cunoştinţe de matematică. Dorim ca acest material să ajute elevul pentru a ajunge de la nivelul manualului la nivelul problematicii concursurilor şi olimpiadelor şcolare.

Toate tipurile de probleme selectate, precum şi noţiunile teoretice prezentate fac parte din cerinţele concursurilor şcolare.

Am inclus şi exerciţii propuse în Anglia la selecţia elevilor care se prezintă la interviu, pentru a fi admişi la facultăţi cu profil matematic.

Se remarcă numărul mare de probleme de aritmetică propuse, chiar dacă la liceu, în ţara noastră, programa analitică nu mai prevede aceste noţiuni, acestea aflându-se doar în programa de olimpiadă. Este un motiv în plus ca elevii din gimnaziu să aprofundeze acest capitol al matematicii. Dorinţa noastră, a profesorilor, este ca elevii noştri să poată performa la oricare din facultăţile din Europa sau din America. Desigur, elevii şi studenţii care absolvă facultăţile din România este necesar să aibe aceeaşi atitudine pentru studiu.

În lucrare sunt prezentate o serie de exerciţii rezolvate, ca model, iar pentru exerciţiile propuse, la sfârşitul lucrării sunt prezentate indicaţii şi răspunsuri.

Am ataşat la final şi tabelul numerelor prime mai mici de 10 000.

Invităm cititorul să încerce rezolvarea, prin efort propriu, a tuturor exerciţiilor şi, în cazul nereuşitei, să apeleze la capitolul de indicaţii şi soluţii.

Sugestiile pentru lecturi suplimentare conţin surse deosebite, cărţi de bibliotecă, de care nu te poţi despărţi. Lectura acestora făcută de mai multe ori, la intervale diferite de timp, îţi dau adevărata lor valoare, crează uneori nostalgii. Aşa cum în literatură există cărţi excepţionale, în toate celelalte domenii lucrurile stau la fel, deci şi în matematică.

Este important ca elevul să se obişnuiască a cerceta singur, a descoperi metode noi de rezolvare, probleme noi, să-şi pună continuu întrebări. Lucrarea noastră ajută în formarea unor deprinderi de lucru independente, în crearea propriilor portofolii. Aceste portofolii sunt evaluate de cadrul didactic şi vor fi completate şi îmbunătăţite continuu în anii de şcoală.

Autorii

1. Elemente de aritmetică

Definiţii

Un număr natural p, $p \geq 2$ se numeşte ***prim*** *dacă are ca divizori doar pe* 1 *şi* p.

Exemple

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...$

Un număr natural $n \geq 2$ care nu este prim se numeşte ***compus***.

Ciurul lui Eratostene

Reamintim că ciur reprezintă sită. În ciur (sită) vor rămâne doar numerele prime mai mici decât n.

Matematicianul alexandrin Eratostene a dat o metodă prin care putem determina toate numerele prime mai mici decât un număr natural dat.

Metoda este ingenioasă şi este utilizată cu eficienţă şi astăzi. Fie n un număr natural fixat, $n \geq 2$. Scriem numerele naturale $2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n-1, n$. Păstrăm numărul 2 şi marcăm toate numerele multiplu de 2 care sunt mai mici decât n. După marcarea numerelor, primul număr nemarcat este 3. El este prim deoarece nu este divizibil cu 2. Lăsăm nemarcat numărul 3 şi marcăm toţi multiplii lui 3 ce sunt mai mici decât n. Unele numere au fost deja marcate fiind multipli de 2. La următorul pas, primul număr nemarcat este 5. El este prim nefiind divizibil cu 2 sau cu 3. Lăsăm numărul 5 nemarcat şi marcăm toţi multipli de 5. Continuăm procedeul, iar la sfârşit, se va obţine o secvenţă de numere nemarcate; acestea reprezintă numerele prime mai mici sau egale cu n. Această metodă de cernere a numerelor este cunoscută sub denumirea de *ciurul lui Eratostene*.

Notă

Pe baza acestui principiu au fost construite tabele de numere prime. În cazul numerelor mari au fost utilizate calculatoare performante. Astfel, la Los Alamos Scientific Laboratory au fost determinate în acest fel toate numerele prime până la 100 000 000. S-a demonstrat, încă din Antichitate, că şirul numerelor prime este infinit.

La sfârşitul lucrării sunt date toate numerele prime mai mici decât 10 000.

Exerciţii propuse

1. a) Prin utilizarea ciurului lui Eratostene, să se determine toate numerele prime mai mici decât 100.

b) Câte numere naturale, nenule m există cu $m \leq 100$ care sunt compuse?

2. Care sunt numerele prime de două cifre care au suma cifrelor egală cu 5?

3. Care dintre următoarele numere:

$$87, 111, 113, 143, 149, 165, 167, 279, 281$$

este prim?

Notă

O metodă care stabieşte prin calcul dacă un număr este prim, constă în împărţirea numărului dat la numere prime, în ordine crescătoare până când câtul devine mai mic decât împărţitorul.

Dacă nicio împărţire nu s-a efectuat exact, numărul considerat este prim. În caz contrar, numărul nu este prim.

Exemple: 87 se divide prin 3 sau se împarte exact prin 3. Rezultă că este compus. 111 se divide cu 3, deci este compus. 113 nu se divide prin 2, 3, 5, 7, deci este prim. Nu am verificat alte numere prime mai mari decât 7 deoarece pentru următorul număr prim care este 11 avem $11^2 = 121 > 113$.

Exerciţiu rezolvat

4. Un număr prim p se numeşte **număr prim al lui Sophie Germain**, dacă $2p + 1$ este prim. Să se determine toate numerele prime $p \leq 100$ ce sunt numere prime ale lui Sophie Germain.

Soluţie. Prin verificarea condiţiei pentru numerele prime $p \leq 100$, vom determina următoarele numere prime ale lui Sophie Germain: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89.

Notă

Sophie Germain a arătat, în anul 1825, că marea teoremă a lui Fermat este valabilă în cazul numerelor prime p pentru care $2p + 1$ este prim. Astfel, printre marii matematicieni care s-au ocupat de marea teoremă a lui Fermat, a fost şi Sophie Gemain. Cu ajutorul calculatoarelor s-au determinat toate numerele prime Sophie Germain mai mici decât 10^{10}. Numărul acestora este de 26 569 515.

Exerciţii propuse

5. Care este cel mai mare divizor propriu al numărului 360 ?

6. Fie x, y, z numere naturale nenule. Să se arate că 7 divide $4x + 8y + z$ dacă şi numai dacă 7 divide $6x + 12y + 5z$.

(G.M.7-8-9 / 2010)

7. Pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există p prim pentru care $p \mid n$.

8. Să se arate că:

a) $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$

b) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?

(G.M.10 / 2012)

9. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care mulţimea $\left\{a \in \mathbb{N} \mid 4 \cdot 7^n < a < 7^{n+1}\right\}$ are 146 de elemente.

10. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care mulţimea $\left\{a \in \mathbb{N} \mid 3^n \leq a < 2 \cdot 3^{n+2}\right\}$ are 459 de elemente.

11. Câte cifre au numerele următoare scrise în baza 10:

$A = \left(100^{50} - 1\right) : 9; \quad B = \left(1000^{30} - 1\right) : 9; \quad C = \left(10.000^{2345} - 1\right) : 9.$

12. Puteţi scrie numărul 3629 ca sumă de puteri de 2?

13. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care mulţimea:

$$\left\{a \in \mathbb{N} \mid 5^{n+1} \leq a \leq 3 \cdot 5^{n+4}\right\}$$

are 9351 de elemente.

14. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi se definesc numerele $A_n = \overline{1234\ldots n}$.
Să se arate că din $9 \mid n$ rezultă $9 \mid A_n$.

(N. Negoescu, G.M. 1970)

15. Puteţi scrie numărul 1 000 003 ca sumă de puteri distincte ale lui 2 ?

(Mathematics interview questions, England).

16. Să se arate că pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, numărul $1!+2!+3!+4!+\ldots+n!$ nu este pătrat perfect.

(Mathematics interview questions, England).

17. Fie numărul $M = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdots 2013$ produsul numerelor impare mai mici sau egale cu 2013 care nu sunt multiplu de 5. Care este ultima cifră a lui M ?

(Concursul LuminaMath, Ediţia a XVI-a, Etapa a II-a)

18. a) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ şi considerăm numerele $M_n = \overline{a_1a_2a_3...a_m14}^n$. Să se determine numerele n pentru care $64 \mid M_n$.

b) Ştiind că literele sunt cifre ale sistemului zecimal, să se determine din egalitatea:

$$\overline{MATH} + \overline{WORK} = 10^4$$

(Concursul LuminaMath, Ediţia a XVI-a, Etapa a II-a)

Exerciţiu rezolvat

19. Fiind date numerele prime diferite p_1, p_2, p_3, p_4, numerele naturale $x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot p_4^{a_4}$, $y = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot p_3^{b_3} \cdot p_4^{b_4}$, unde $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{N}$, atunci $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$.

Soluţie. $(x, y) = p_1^{\min\{a_1,b_1\}} \cdot p_2^{\min\{a_2,b_2\}} \cdot p_3^{\min\{a_3,b_3\}} \cdot p_4^{\min\{a_4,b_4\}}$;

$$[x, y] = p_1^{\max\{a_1,b_1\}} \cdot p_2^{\max\{a_2,b_2\}} \cdot p_3^{\max\{a_3,b_3\}} \cdot p_4^{\max\{a_4,b_4\}}.$$

Cum $\min\{a_k, b_k\} + \max\{a_k, b_k\} = a_k + b_k$, $1 \leq k \leq 4$, atunci deducem că:

$$(x, y) \cdot [x, y] = p_1^{\min\{a_1,b_1\}+\max\{a_1,b_1\}} \cdot p_2^{\min\{a_2,b_2\}+\max\{a_2,b_2\}} \cdot p_3^{\min\{a_3,b_3\}+\max\{a_3,b_3\}} \cdot$$

$$\cdot p_4^{\min\{a_4,b_4\}+\max\{a_4,b_4\}} = p_1^{a_1+b_1} \cdot p_2^{a_2+b_2} \cdot p_3^{a_3+b_3} \cdot p_4^{a_4+b_4} = x \cdot y.$$

După descompunerea numerelor x, y în factori primi, am „forţat“ scrierea lor ca produse formate din aceeaşi factori primi punând, unde era cazul, exponentul zero.

Notă

Proprietatea are loc pentru oricare pereche de numere naturale şi invităm cititorul să deducă o demonstraţie analoagă cu cea prezentată mai sus.

Exerciţii propuse

20. Pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$, $[a, b] = 420$ şi $a \cdot b = 12600$. Să se determine (a, b).

21. Considerăm şirul $(a_n)_n$ definit prin $a_n = n(n+1)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se scrie primii zece termeni ai şirului.
b) Să se determine cel mai mare număr natural d care divide toţi termenii şirului $(a_n)_n$.

22. Considerăm şirul $(b_n)_n$ definit prin $b_n = n(n+2)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se scrie primii zece termeni ai şirului.
b) Să se determine cel mai mare număr natural d care divide toţi termenii şirului $(b_n)_n$.

23. Considerăm şirul $(c_n)_n$ definit prin $c_n = n(n+1)(2n+1)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se scrie primii cinci termeni ai şirului.
b) Să se determine cel mai mare număr natural d care divide toţi termenii şirului $(c_n)_n$.

24. Considerăm şirul $(a_n)_n$ definit prin $a_n = n(n+1)(2n+34)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se scrie primii doi termeni ai şirului.
b) Să se determine cel mai mare număr natural d care divide toţi termenii şirului $(a_n)_n$.

Exerciţii rezolvate

25. Problema înmulţirii iepurilor. Matematicianul italian **Leonardo din Pisa** (cunoscut şi cu porecla **Fibonacci**), în lucrarea sa „Liber Abbaci", publicată în anul 1202, propune următoarea problemă:

Câte perechi de iepuri maturi se nasc dintr-o pereche după 12 luni, dacă fiecare pereche dă naştere unei singure perechi; perioada de gestaţie este de o lună iar fiecare pereche devine matură după o lună?

Soluţie. Vom număra deci în fiecare lună perechile de iepuri maturi. Vom crea tabelul următor în care perechile mature le notăm cu M, iar perechile nou născute cu n, numai pentru primele cinci luni:

1	2	3	4	5
M	M	M	M	M
	n	M	M	M
		n	M	M
			n	M
			n	M
				n
				n
				n

Vom obţine primii 5 termeni: 1, 1, 2, 3, 5.

Se observă că $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$. Continuâd completarea tabelului vom oţine: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Vor fi 144 de perechi de iepuri maturi după 12 luni.

26. Din problema precedentă s-a creat, apoi s-au studiat proprietăţi ale şirului lui Fibonacci $(F_n)_{n\geq 1}$ definit astfel:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

a) Din modul de definire al şirului să se verifice primii 12 termeni.

b) Să se scrie primii 20 de termeni ai şirului lui Fibonacci.

c) Să se verifice că: $5 \mid F_5$, $5 \mid F_{10}$, $5 \mid F_{15}$, $5 \mid F_{20}$.

d) Pentru diferite valori deja calculate, să se verifice că $F_n \mid F_{n\cdot k}$, unde n, k sunt naturale, nenule.

e) Pentru diferite valori calculate ale termenilor şirului Fibonacci, să se verifice relaţia: $(F_m, F_n) = F_d$, unde $d = (m, n)$.

Soluţie. a) $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$; $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$;
$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5, \ldots, F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$.

b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.

c) $F_5 = 5 \vdots 5$, $F_{10} = 55 \vdots 5$, $F_{15} = 610 \vdots 5$, $F_{20} = 6765 \vdots 5$.

d) $F_3 \mid F_6$ deoarece $F_3 = 2$ şi $F_6 = 8$, $2 \mid 8$; $F_3 \mid F_9$, deoarece $F_9 = 34$ şi $2 \mid 34$.

e) De exemplu, $(F_8, F_6) = (21, 8) = 1 = F_2$, $(F_{12}, F_9) = (144, 34) = 2 = F_3$.

Notă

Uneori, se porneşte în definirea şirului lui Fibonacci de la termenul F_0 pe care nu l-am definit. Îl vom defini astfel: $F_2 = F_1 + F_0$, de unde deducem $F_0 = F_2 - F_1$ sau $F_0 = 0$.

Astfel, vom putea defini şirul lui Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall\, n \geq 0$.

Invităm cititorul de a căuta pe internet revista canadiană „Fibonacci Quarterly“. Acestă revistă impresionează prin bogăţia de proprietăţi care au fost deduse relativ la şirul lui Fibonacci sau la şirul lui Lucas. Credem că este o viitoare sursă pentru cititori, de a studia ceea ce s-a publicat şi o invitaţie de a aduce noi contribuţii pe acest filon.

Exerciţii propuse

27. Să se verifice că oricare număr natural m, unde $1 \leq m \leq 30$, se scrie ca sumă de termeni distincţi ai şirului lui Fibonacci.

28. Se consideră şirul lui Fibonacci definit astfel:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

a) Să se scrie primii 12 termeni ai şirului.

b) Să se arate că prin suma oricăror opt termeni consecutivi ai şirului nu este un termen al şirului.

c) Să se determine doi termeni ai şirului pentru care $F_k^2 = k^2$.

Exerciţiu rezolvat

29. Se consideră şirul lui Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall\, n \geq 0$.

a) Să se scrie primii 12 termeni ai şirului lui Lucas.

b) Să se verifice relaţiile:

i) $L_n^2 = 2L_{n+1}^2 - L_n^2 + 2L_{n-1}^2$;

ii) $25L_n^2 = 2L_{n+1}^2 - L_n^2 + 2L_{n-1}^2$, pentru $1 \leq n \leq 9$.

(pct. b) reprezintă pe caz particular problema B-1044 din revista „Fibonacci Quarterly", Nr.1/2008-2009 propusă de Paul Bruckman, Sointula, Canada).

Indicaţie. a) 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199.

b) Pentru $n = 1$,

i) $L_1^2 = 1^2 = 1$, $2L_2^2 - L_1^2 + 2L_0^2 = 2\cdot 1^2 - 1^2 + 2\cdot 0^2 = 2 - 1 + 0 = 1$;

ii) $25F_1^2 = 25$, $2L_2^2 - L_1^2 + 2L_0^2 = 18 - 1 + 8 = 25$. Analog se verifică celelalte egalităţi.

Notă

Vă imaginaţi, că autorul problemei nu a enunţat afirmaţia plecând de la cazuri particulare. Noi am făcut acest traseu pentru a vă apropia de aceste şiruri interesante şi a vă invita să le studiaţi în anii care urmează la un alt nivel de înţelegere.

Scriind primii 12 termeni ai şirului lui Fibonacci am observat că se divid cu 5 termenii: $F_5 = 5$, $F_{10} = 55$. În cazul şirului lui Lucas, din primii 12 termeni, niciunul dintre ei nu se divide cu 5.

Oare avem posibilitatea de a folosi un aparat matematic, uşor de înţeles, care să ne ajute în acest moment?

Divizibilitatea va putea fi studiată mai elegant şi mai rapid cu ajutorul **congruenţei modulo** m.

Matematicianul german **Carl F. Gauss**, în anul 1801, publică la vârsta de 24 de ani, celebrul său tratat: „Cercetări matematice".

Gauss introduce noţiunea de congruenţă modulo m pe mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$, mulţime pe care încă nu am studiat-o, dar urmează să o studiem curând. Vom încerca să rezolvăm problemele propuse mai înainte şi, de ce nu, şi altele dificile cu ajutorul relaţiei de congruenţă modulo m utilizată doar pe mulţimea $\mathbb{N}$ cunoscută nouă până acum.

Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Vom spune că **două numere naturale** a, b **sunt congruente modulo** m şi scriem $a \equiv b \pmod{m}$, dacă a, b dau acelaşi rest la împărţirea prin m. Aceasta revine, prin utilizarea teoremei împărţirii cu rest, la a scrie: $a = m\cdot q + r$, $b = m\cdot q_1 + r$, unde $r, q, q_1 \in \mathbb{N}$, $r < m$.

Exemplu

Să considerăm modulul $m = 5$. Avem $7 \equiv 2 \pmod{5}$ deoarece $7 = 5\cdot 1 + 2$, adică 2 reprezintă restul împărţirii lui 7 prin 5.

Analog, $144 \equiv 4 \pmod 5$ deoarece $144 = 5 \cdot 28 + 4$, adică 4 reprezintă restul împărţirii lui 144 prin 5.

Exerciţiu propus

30. Să se determine numărul natural r pentru care au loc următoarele congruenţe:
a) $53 \equiv r \pmod 5$; b) $78 \equiv r \pmod 5$; c) $56 \equiv r \pmod{10}$;
d) $233 \equiv r \pmod{10}$; e) $256 \equiv r \pmod{11}$.

Exerciţii rezolvate

31. Dacă $m \in \mathbb{N}^*$ şi $a \equiv r_1 \pmod m$, $b \equiv r_2 \pmod m$ atunci $a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod m$, dacă $r_1 + r_2 < m$ sau $a + b \equiv r_1 + r_2 - m \pmod m$, dacă $r_1 + r_2 \geq m$.

Soluţie. Aplicăm teorema împărţirii cu rest: $a = m \cdot q_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < m$, $b = m \cdot q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < m$. Prin adunarea celor două egalităţi obţinem:

$$a + b = m \cdot (q_1 + q_2) + (r_1 + r_2)\,.$$

Dacă $r_1 + r_2 < m$, atunci din unicitatea restului şi câtului rezultă:

$$a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod m.$$

Dacă $r_1 + r_2 \geq m$, din inegalităţile $r_1 < m$ şi $r_2 < m$ avem $r_1 + r_2 < 2m$, de unde $r_1 + r_2 - m < m$, unde de fapt restul împărţirii lui $r_1 + r_2$ prin m este $r_1 + r_2 - m$.

Rezultă $a + b \equiv r_1 + r_2 - m \pmod m$.

Exemple

1) $7 \equiv 2 \pmod 5$, $21 \equiv 1 \pmod 5$ atunci $7 + 21 \equiv 2 + 1 \pmod 5$ sau $28 \equiv 3 \pmod 5$. Avem $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_1 + r_2 < 5$.

2) $8 \equiv 3 \pmod 5$, $19 \equiv 4 \pmod 5$, atunci $27 \equiv 2 \pmod 5$. Avem $r_1 = 3$, $r_2 = 4$ şi $r_1 + r_2 = 7 > 5$, deci vom considera $r_1 + r_2 - 5 = 2$ ca fiind restul împărţirii lui $a + b$ prin 5.

Mai precizăm că pentru $a \in \mathbb{N}$, $5 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod 5$. Într-adevăr, $5 \mid a$ dacă şi numai dacă restul împărţirii lui a prin 5 este egal cu 0.

Cu aceste noi „arme“ cu care suntem înzestraţi să revenim la problema propusă privind divizibilitatea prin 5 a termenilor din şirurile lui Fibonacci şi Lucas.

32. a) Să se determine numerele cu care sunt congruente primii 26 de termeni din şirul lui Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$

b) Să se determine numerele cu care sunt congruente primii 26 de termeni din şirul lui Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall\, n \geq 0$.

c) Considerând pentru fiecare din şirurile date, şirurile formate din numerele cu care sunt congruente modulo 5, să se determine periodicitatea acestor şiruri.

d) Să se deducă toţi termenii din şirul lui Fibonacci care sunt divizibili cu 5.

e) Să se arate că niciun termen din şirul lui Lucas nu se divide cu 5.