ARTUR BĂLĂUCĂ

ARITMETICĂ

Teme pentru centre de excelență

+

220
MODELE DE PROBLEME REZOLVATE
+
1130
DE PROBLEME SEMNIFICATIVE PENTRU OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENȚĂ

Clasa a V-a

Ediţia a X-a

EDITURA TAIDA - 2019
– IAŞI –

Programa olimpiadei de matematică pentru clasa a V-a

Etapa județeană

Numere naturale
Operații cu numere naturale. Factorul comun. Teorema împărțirii cu rest. Reguli de calcul cu puteri. Compararea puterilor. Ultima cifră. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte.

Metode aritmetice de rezolvare a problemelor
Metoda reducerii la unitate. Metoda comparației. Metoda figurativă. Metoda mersului invers. Metoda falsei ipoteze.

Divizibilitatea numerelor naturale
Divizor; multiplu; divizori comuni; multipli comuni. Criterii de divizibilitate cu: 2, 5, 2^n, 5^n, 10^n, 3 și 9; numere prime; numere compuse. Scrierea numerelor naturale ca produs de factori primi.

Etapa națională

Fracții ordinare. Fracții zecimale (conținutul programei școlare)
Elemente de geometrie și unități de măsură (conținutul programei școlare)

<u>Note</u>

1. La toate etapele olimpiadei de matematică (locală, județeană, națională), autorul problemelor din concurs va utiliza conținutul prezentei programe pentru olimpiadă.

2. Temele propuse vor cuprinde atât conținuturile obligatorii pentru toți elevii, cât și conținuturile suplimentare.

3. Folosirea corectă de către elevi, în redactarea soluției, a unor teoreme (fără demonstrație) conduce la acordarea punctajului maxim prevăzut în baremele de corectare.

4. Cunoștințele suplimentare față de programa școlară, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă.

Cuprins

CAPITOLUL I

NUMERE NATURALE

I.1. Operații cu numere naturale.Compararea și ordonarea numerelor naturale

Proprietăţile inegalităţii între numere naturale

➲ **Reţineţi!** Numărul natural a este mai mare sau cel mult egal cu numărul natural b dacă există un număr natural c astfel încât să avem $a = b + c$.

1. $a \leq a$, oricare ar fi a număr natural (**reflexivitatea**);

2. $a \leq b$ şi $b \leq a \Rightarrow a = b$ (**antisimetria**);

3. $a \leq b$ şi $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (**tranzitivitatea**);

4. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ şi $a - d \leq b - d$ (oricare ar fi c şi d numere naturale cu $a \geq d$ şi $b \geq d$);

5. $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ (oricare ar fi c număr natural);

6. $a \leq b \Rightarrow a : c \leq b : c$ (oricare ar fi c număr natural nenul, iar a: c şi b: c sunt numere naturale);

7. Oricare ar fi numerele naturale a şi b are loc una şi numai una din relaţiile: $a > b$ sau $a = b$ sau $a < b$.

Probleme rezolvate:

1. Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 23, 48. Dan și Ana au șters fiecare câte patru numere și au observat că suma numerelor șterse de Dan este de patru ori mai mare decât suma numerelor șterse de Ana.

a) Ce număr a rămas pe tablă?

b) Ce numere a șters fiecare copil?

(Concursul „Florica T. Câmpan“, etapa județeană, Iași, 2012)

Rezolvare:

a) Notăm cu a, b, c, d numerele șterse de Dan și cu e, f, g, h, $e < f < g < h$ cele șterse de Ana și cu p numărul care a rămas pe tablă. Avem: $a + b + c + d = 4 \cdot (e + f + g + h)$ și $5 \cdot (e + f + g + h) + + p = 109$, **(1)**. Prin încercări se obține $p = 9$, soluție unică.

b) Dacă $p = 9$, din **(1)** rezultă $e + f + g + h = 20$. Se observă că $e \geq 3$ conduce la situații imposibile. Dacă $e = 1$, atunci $f + g + h = 19$, de unde $f = 2$, $g = 7$ și $h = 10$ sau $f = 3$, $g = 6$, $h = 10$. $e = 2$, conduce la $f + g + h = 18$, imposibil. Prin urmare, Ana a șters numerele 1, 2, 7, 10, iar Dan numerele 3, 6, 23 și 48 sau Ana a șters numerele 1, 3, 6, 10 iar Dan numerele 2, 7, 23 și 48.

2. Se numește număr „împerecheat“ un număr natural scris în baza zece care are patru cifre și este format din două perechi de cifre egale (exemple: 5577, 7755, 5555, 5757 etc.).

a) Găsiți toate numerele „împerecheate“ care au suma 2011.

b) Dacă se așază într-un șir toate numerele „împerecheate“ în ordine crescătoare, aflați primii patru și ultimii patru termeni ai șirului.

c) Câte numere „împerecheate“ există? Justificați răspunsul!

(Concursul „Matematica, de drag“, Bistrița, 2013, Cătălin Budeanu)

Rezolvare:

a) 1001 + 1010 = 2011.

b) 1001, 1010, 1100, 1111, ..., 9966, 9977, 9988, 9999.

c) Numerele sunt formate cu cifrele a și b, unde a și b sunt numere nenule distincte. Avem 6 numere împerecheate formate cu cifrele a și b: $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$, $\overline{abba}$, $\overline{bbaa}$, $\overline{baba}$, $\overline{baab}$. Dacă $a = 1$ și b ia valorile 2, 3, ..., 9 avem $8 \cdot 6 = 48$ numere împerecheate. Dacă $a = 2$ și b ia valorile 3, 4, ..., 9 avem $7 \cdot 6 = 42$ numere împerecheate. Dacă $a = 3$ și b ia valorile 4, 5, ..., 9 avem $6 \cdot 6 = 36$ numere împerecheate. Dacă $a = 4$ și b ia valorile 5, 6, 7, 8, 9 avem $6 \cdot 5 = 30$ numere împerecheate. Dacă $a = 5$ și b ia valorile 6, 7, 8, 9 avem $6 \cdot 4 = 24$ numere împerecheate.

24. Să se afle cel mai mare număr natural de două cifre în baza zece ştiind că suma dintre pătratul şi cubul lui este un pătrat perfect.

25. a) Determinaţi numerele de trei cifre în baza 10 care sunt simultan pătrate şi cuburi perfecte. **b)** Aceeaşi problemă pentru numere de patru cifre în baza 10.

26. Să se determine perechile de numere naturale care au suma pătratelor egală cu 74.

27. Arătaţi că dacă $n = 2k + 3$, k număr natural, atunci numărul $a = 2^n + 4^k$ este pătrat perfect.

28. Găsiţi cifrele a, b, c, d în baza zece, dacă numerele $a, \overline{ad}, \overline{cd}$ şi $\overline{abcd}$ sunt pătrate perfecte.

29. Să se determine numerele naturale pătrate perfecte de forma $\overline{abcd}$, ştiind că $b > d$, unde numerele $\overline{ab}$ şi $\overline{cd}$ sunt consecutive, iar $\overline{cd}$ este pătrat perfect.

30. Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abbc}$, ştiind că $\overline{abbc} = \overline{bc}^2$, unde cifrele a, b, c sunt consecutive, cu $a < c < b$.

(Concursul „Ştefan Dârțu“, Vatra Dornei, 2014)

31. Se dă numărul $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{100}$. **a)** Demonstraţi că (A + 1) nu este pătrat perfect. **b)** Aflaţi ultima cifră a numărului (A + 1). **c)** Scrieţi pe (A + 1) ca o putere a lui 2. ***(Etapa locală, Botoşani, 1991)***

32. Să se demonstreze că numărul $2001^0 + 2001^1 + 2001^2 + \ldots + 2001^{2001}$ nu este pătrat perfect. ***(Anca Timofte)***

33. Numărul $n = 7000^1 + 7000^2 + 7000^3 + ... + 7000^{2002}$ este pătrat perfect?

(Artur Bălăucă)

34. Suma cifrelor unui număr natural în baza zece este egală cu 1995. Poate fi acest număr pătrat perfect?

35. Să se arate că numărul $N = 111^1 + 222^2 + 333^3 + 444^4 + 555^5 - 12345$ nu este pătrat perfect.

36. Să se arate că numerele $n = 1^{1987} + 2^{1987} + ... + 1997^{1987} + 3$ şi $m = 1991^1 + 1992^3 + 1993^5 + 1994^7 + 1995^9 + 1996^{11} + 1997^{13} + 1998^{15} + 1999^{17} + 3$ nu sunt pătrate perfecte.

37. Să se arate că numerele de forma $5n + 2$; $5n + 3$; $5n + 7$ şi $5n + 8$, unde n este număr natural, nu pot fi pătrate perfecte.

38. Demonstraţi că numărul $N = (a^2 + a) \cdot (a^2 + 5a + 6) \cdot (a + 4) + 2003$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural a. ***(Ioana Mihăilescu)***

39. Demonstraţi că un număr cu cel puţin două cifre, toate identice, nu este pătrat perfect.

CAPITOLUL II

METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR*

II.1. Metoda reducerii la unitate

1. 30 de caiete costă 75 lei. Cât costă 28 de caiete de acelaşi fel ?

Rezolvare:

Aşezăm informaţiile din enunţ astfel:

30 caiete .... 75 lei
28 caiete .... ? lei
1 caiet .... 75lei : 30 = 7500 bani : 30 = 250 bani = 2 lei şi 50 bani
28 caiete .... (2 lei şi 50 bani) x 28 = 70 lei.

Răspuns: 70 lei.

2. În 12 ore, 6 robinete umplu un bazin cu apă.
Pentru ca acelaşi bazin să fie umplut în 8 ore, câte robinete de acelaşi debit trebuie deschise?

Rezolvare:

Aşezăm datele problemei astfel:

12 ore .... 1 bazin .... 6 robinete
8 ore .... 1 bazin .... ? robinete
Reducem la unitate:
1 oră .... 1 bazin .... $12 \cdot 6 = 72$ de robinete
8 ore .... 1 bazin .... $72 : 8 = 9$ robinete.

II.2. Metoda comparaţiei

➲ **Reţineţi:** Abordarea problemelor prin metoda comparaţiei se realizează prin parcurgerea următorilor paşi:

- se ordonează datele problemei din enunţul ei astfel încât mărimile de acelaşi fel să fie aşezate pe aceeaşi coloană;
- se compară cele două sau mai multe situaţii distincte, aducându-le, dacă este cazul, la acelaşi termen de comparaţie;
- se elimină una dintre necunoscutele problemei;
- apoi se determină cealaltă necunoscută a problemei;
- în final, înlocuind valoarea găsită se află şi cealaltă necunoscută din enunţul problemei.

Reprezentăm două tipuri de probleme rezolvate prin metoda comparaţiei.

Aducerea la un termen de comparaţie
Probleme rezolvate

3. O gospodină a cumpărat dintr-un hypermarket 5 kg de roşii şi 7 kg de portocale plătind la casă 43 de lei, iar altă gospodină a cumpărat de la acelaşi hypermarket 5 kg de roşii şi 11 kg de portocale plătind la casă 59 de lei. Cât costă 1 kg de roşii şi cât costă 1 kg de portocale?

Rezolvare:

Aşezăm datele celor două cumpărături astfel:

5 kg roşii .... 7 kg portocale .... 43 lei
5 kg roşii .... 11 kg portocale .... 59 lei
11 kg – 7 kg = 4 kg portocale .... 59 lei – 43 lei = 16 lei
1 kg portocale .... 16 lei : 4 = 4 lei
7 kg portocale .... $4 \text{ lei} \cdot 7 = 28$ lei
5 kg roşii .... 43 lei – 28 lei = 15 lei
1 kg roşii .... 15 lei : 5 = 3 lei.

Prin urmare, preţul roşiilor este de 3 lei, iar a portocalelor de 4 lei.

---

* Articol publicat în Didactica Matematică, Nr. 2/2012 şi Nr. 3/2013. Autor: ***Artur Bălăucă***.

22. Victor, Ionel și Dragoș dispută în vacanță împreună un joc cu bile. În prima partidă Victor pierde la Ionel și Dragoș astfel încât aceștia își dublează numărul de bile ce le-au avut la începutul jocului. În partida a doua Ionel pierde la Victor și Dragoș, aceștia își triplează numărul de bile ce le-au avut după prima partidă. În partida a treia Dragoș pierde la Victor și la Ionel, aceștia își măresc de patru ori numărul de bile ce le-au avut după partida a doua. În partida a patra Victor câștigă la Ionel și Dragoș, aceștia își înjumătățesc numărul de bile ce le-au avut după partida a treia. Știind că după partida a treia cei trei copii aveau fiecare câte 144 de bile, aflați câte bile a avut fiecare copil la începutul și, respectiv, la sfârșitul jocului.

(Concursul „Ștefan Dârțu“, Vatra Dornei, 2018, G.M. 1/2014, Artur Bălăucă)

23. O cantitate de nuci a fost repartizată la trei grupe de copii după cum urmează: pentru prima grupă $\frac{1}{3}$ din cantitate şi încă 20 de nuci; pentru grupa a doua $\frac{1}{4}$ din rest şi încă 35 de nuci, iar pentru a treia grupă $\frac{7}{10}$ din ce a mai rămas şi ultimele 84 de nuci. Ştiind că fiecărui copil, indiferent de grupă, i s-a dat acelaşi număr de nuci, să se afle: **a)** Numărul de nuci care revine fiecărei grupe; **b)** Numărul cel mai mare de nuci care pot fi primite de un copil şi, în acest caz, să se determine numărul de copii din fiecare grupă.

24. Pe o masă erau trei grămezi de nuci, în total 120 de nuci. Din prima grămadă se iau $\frac{1}{4}$ din nucile existente şi se pun în a doua grămadă; din aceasta se iau apoi $\frac{1}{3}$ din nucile existente şi se trec în grămada a treia; din aceasta se iau $\frac{1}{3}$ din cantitatea de nuci existente acum şi se trec în prima grămadă. Numărul de nuci din prima grămadă existent acum este media aritmetică a numărului de nuci din celelalte două grămezi. Aflaţi câte nuci erau la început în fiecare grămadă dacă în final numărul de nuci din grămada a treia este cu 20 mai mare decât numărul de nuci din a doua grămadă. ***(Etapa judeţeană, Botoşani, 1990)***

25. Cinci moştenitori îşi împart suma moştenită astfel: primul ia o cincime din sumă, al doilea o cincime din rest şi încă a lei, al treilea o cincime din noul rest şi încă $2a$ lei şi aşa mai departe astfel încât suma să fie complet distribuită. Cât primeşte fiecare şi care a fost suma iniţială? ***(Etapa judeţeană, Botoşani, 1994)***

26. Avem două cutii cu creioane. Punem din prima cutie într-a doua atât cât conţinea aceasta. Apoi punem din cutia a doua în prima atât cât conţine prima. După aceste operaţii, punem din prima cutie în a doua atât cât conţinea a doua. În final, în fiecare cutie sunt câte 48 de creioane. Câte creioane au fost iniţial în fiecare cutie? ***(Aida-Elena Bălăucă)***

27. Avem două vase cu apă V_1 şi V_2. Turnăm din V_1 în V_2 atât cât conţine V_2; apoi turnăm din V_2 în V_1 atât cât a rămas în V_1 ş.a.m.d. După cinci astfel de operaţii în cele două vase rămân câte 128 litri de apă. Cât era la început în fiecare vas?

(Aida-Elena Bălăucă)

CAPITOLUL III

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

III.1. Divizor; multiplu; divizori comuni; multipli comuni. Criterii de divizibilitate cu: 2, 5, 2^n, 5^n, 10^n, 3 și 9. Alte criterii de divizibilitate (extinderi)

➲ ***Rețineți!*** Numărul natural b divide numărul natural a dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Notații: b / a sau $a \vdots b$ ("b divide a" sau "a se divide cu b").

➲ *Observație.* Nu există pentru orice pereche de numere naturale a și b un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$ şi urmează că relaţia b / a nu este peste tot definită în $\mathbb{N}$.

➲ **Proprietățile relației de divizibilitate**

1. a / a oricare ar fi a număr natural (reflexivitatea);

2. a / b şi $b / a \Rightarrow a = b$ (antisimetria);

Demonstrație:

Observație: Dacă $a = 0$, din $0 / b$ rezultă $b = 0$ și dacă $b = 0$, din $0 / a$ rezultă $a = 0$ (conform proprietății **5**).

Cazul *a* și *b* numere naturale nenule.

Conform definiției din a / b rezultă că există m număr natural astfel încât $b = am$, **(1)** iar din b / a rezultă că există n număr natural astfel încât $a = bn$, **(2)**.

Din **(1)** și **(2)** se obține prin înmulțire relația $a \cdot b = b \cdot a \cdot m \cdot n$, **(3)**.

Cum $ab \neq 0$, din **(3)** rezultă $mn = 1$, de unde $m = n = 1$. Prin urmare, din **(1)** sau din **(2)** rezultă $a = b$.

3. $a / 1 \Rightarrow a = 1$;

4. $a / 0$, oricare ar fi a număr natural;

5. $0 / a \Rightarrow a = 0$;

6. $a / b \Rightarrow a / b \cdot c$, oricare ar fi c număr natural;

7. a / b_1 şi $a / b_2 \Rightarrow a / b_1 + b_2$ şi $a / b_1 - b_2$ $(b_1 \geq b_2)$;

Demonstrație:

Din a / b_1 și a / b_2 rezultă că există numerele naturale m și n astfel încât $b_1 = a \cdot m$ și $b_2 = a \cdot n$. Prin adunare și, respectiv, scădere parte cu parte a celor două egalități, obținem $b_1 + b_2 = a(m + n)$ și $b_1 - b_2 = a(m - n)$, de unde conform definiției rezultă $a / b_1 + b_2$ și $a / b_1 - b_2$.

Generalizare: $a / b_1, a / b_2, \ldots, a / b_n \Rightarrow a / b_1 + b_2 + \ldots + b_n$;

8. a / b şi $a \nmid c \Rightarrow a \nmid b + c$;

9. a / b_1 şi $a / b_2 \Rightarrow a / b_1c_1 + b_2c_2$, oricare ar fi c_1, c_2 numere naturale;

Generalizare: a / b_1; a / b_2; …; $a / b_n \Rightarrow a / b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n$, oricare ar fi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ numere naturale;

10. $a / b \Rightarrow ac / bc$, oricare ar fi c număr natural;

11. ac / bc și $c \neq 0 \Rightarrow a / b$;

12. a_1 / b_1 şi $a_2 / b_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 / b_1 \cdot b_2$;

Generalizare: a_1 / b_1; a_2 / b_2; …; $a_n / b_n \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n / b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

➲ ***Criterii de divizibilitate***

1. *Criteriul de divizibilitate cu 3 și cu 9*. Un număr natural este divizibil cu 3 sau cu 9, dacă şi numai dacă suma cifrelor acelui număr este divizibilă cu 3 şi, respectiv, cu 9.

112. a) Câte numere naturale n verifică dubla inegalitate:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 1999 < n < 2 + 4 + 6 + ... + 2000?$$

b) Să se arate că numărul $8^n + 2^n$ se divide cu 10 pentru orice număr natural impar n.

(Concursul Centrelor de excelenţă din Moldova, 2005)

113. Determinaţi numărul natural n, unde $n=\overline{49x4y}$, ştiind că $9/\overline{xy}+1$ şi $28/n$.

114. Numerele naturale nenule x şi y verifică relaţia $7 \cdot x + 5 \cdot y = 385$. Aflaţi: **a)** cea mai mică valoare a lui y; **b)** cea mai mare valoare a sumei $x + y$; **c)** restul împărţirii prin 39 a numărului $85 \cdot x + 44 \cdot y$. ***(Etapa judeţeană, Iaşi, 2007)***

115. Aflaţi numărul natural x, dacă suma cifrelor este egală cu y, suma cifrelor lui y este egală cu z şi $x + y + z = 66$. ***(Etapa locală, Mehedinţi, 2010, Dan Nedeianu)***

116. Arătaţi că oricum am alege două numere din şirul: 1, 3, 5, …, 2011 suma sau diferenţa acestora este multiplu de 4. ***(Etapa locală, Tulcea, 2010, Lucian Petrescu)***

117. Considerăm toţi multiplii lui 5 în baza zece, începând cu 0, în ordine crescătoare. Al câtelea număr este cel mai mic dintre aceştia, având suma cifrelor egală cu 45? ***(Concursul „Dimitrie Pompeiu”, Botoşani, 2000)***

118. Aflaţi numerele naturale nenule a şi b ştiind că, împărţind numărul a la numărul b obţinem câtul 5 şi restul 7, iar dacă împărţim pe $9a$ la b obţinem restul 3.

(Concursul „Pitagora”, Rm. Vâlcea, 2010, Ion Zamfir)

119. Un număr natural de două cifre diferite (scris în baza 10) este divizibil cu fiecare dintre cifrele sale. Demonstraţi că numărul este divizibil cu suma cifrelor sale sau cu produsul cifrelor sale. ***(Etapa judeţeană, Iaşi, 2011)***

120. Să se arate că suma $S=\overline{a1b}+\overline{ab4}+\overline{aba}$ este divizibilă cu 7, unde termenii sumei sunt numere naturale scrise în baza zece.

121. Câte numere de 9 cifre în baza zece se divid cu 1996 şi au ultimele 4 cifre 1, 9, 9, 6 în această ordine? ***(Etapa naţională, Republica Moldova, 1995)***

122. Suma a cinci numere naturale consecutive este un număr natural de forma $\overline{2aaa5}$ divizibil cu 25. Aflaţi, cifra a şi, apoi cele 5 numere. ***(Artur Bălăucă)***

123. Aflaţi numerele naturale x şi y care verifică egalitatea: $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$.

100. Formăm numerele: $x_1 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9$; $x_2 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14$; $x_3 = 3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 19$; ...; ...; $x_n = n(n + 1)\cdot(3n + 1)\cdot(5n + 4)$, unde n este număr natural nenul.
Determinaţi n număr natural nenul, astfel încât:
$\frac{4\cdot 9}{x_1}+\frac{7\cdot 14}{x_2}+\frac{10\cdot 19}{x_3}+\ldots+\frac{(3n+1)(5n+4)}{x_n}=\frac{2003}{2004}$. ***(Etapa judeţeană, Botoşani, 2005)***

101. Se consideră şirul de fracţii $\frac{9}{14}, \frac{10}{21}, \frac{11}{28}, \frac{12}{35}\ldots$ **a)** Ordonaţi crescător primele trei fracţii; **b)** Notăm cu x_1 prima fracţie, cu x_2 a doua fracţie, cu x_3 a treia fracţie etc. Găsiţi x_{2007} (a 2007-a fracţie din şir). **c)** Arătaţi că $x_n > \frac{1}{7}$, pentru orice număr n natural nenul. ***(Etapa judeţeană, Iaşi, 2007)***

102. Fie numerele naturale nenule a, b, c, d astfel încât $n = \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+$ $+\frac{d}{d+a} = 1\frac{11}{12}$. Aflaţi numărul m dacă $m = \frac{a}{a+d}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}+\frac{d}{d+c}$.
(Concursul „Dimitrie Pompeiu“, Botoşani, Artur Bălăucă, Cezar Chirilă, 2007)

103. Demonstraţi că numărul $a = 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2008}$ nu este număr natural.

104. Comparaţi numerele x şi y ştiind că: x, y sunt numere naturale nenule şi
$\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}+\ldots+\frac{x+2007}{y+2007}=2008$. ***(Etapa judeţeană, Botoşani, 2007)***

105. Determinați cifrele a, b în baza zece știind că fracția $\frac{1}{\overline{12ab}}$ se scrie ca o fracție zecimală finită. ***(Concursul „Vâlcovici“, Brăila, 2015, Artur Bălăucă)***

106. Pentru obținerea unui bilet de călătorie pe calea ferată, un călător oferă o bancnotă de 100 lei și observă că odată cu biletul primește și rest, care reprezintă $\frac{1}{4}$ din costul biletului și încă 5 lei. Știind că restul îl primește în monede de 3 lei și 5 lei, aflați numărul de monede din fiecare fel. ***(Gazeta Matematică)***

107. Într-o școală sunt 245 de elevi. La un spectacol dedicat „Centenarului Unirii“ participă numai elevii din acea școală. O treime dintre elevi sunt fete din care jumătate sunt din clasa a V-a, iar $\frac{2}{7}$ din numărul băieților din școală sunt, de asemenea, din clasa a V-a.
a) Câți elevi au participat la spectacol, dacă la acesta au participat cel puțin 190 de elevi?
b) Câți elevi din școală sunt în clasa a V-a? ***(Artur Bălăucă)***

CAPITOLUL V

ELEMENTE DE GEOMETRIE ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ

V.1. Puncte. Drepte. Semidrepte. Segmente de dreaptă. Poziţiile relative ale unui punct faţă de o dreaptă. Puncte coliniare. Pozițiile relative a două drepte. Segmente congruente. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de un punct.

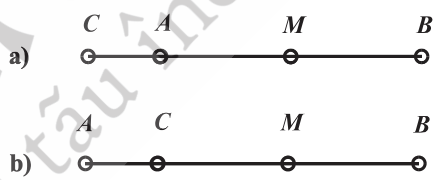
Probleme rezolvate

1. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, iar $C \in AB - \{A, B\}$ atunci: $CM = \dfrac{CA+CB}{2}$, dacă $C \in AB - [AB]$ şi $CM = \dfrac{|CA-CB|}{2}$, dacă $C \in (AB)$. Cercetaţi şi cazul $C \in \{A, B\}$.

Rezolvare:

I. $A \in (CB)$. $CM = CB - MB = CB - \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CB+CB-AB}{2} = \dfrac{CA+CB}{2}$. **(fig. a))**

II. $B \in (CA)$. Analog cu cazul **I.**



III. 1. $C \in (AM)$. $CM = MA - CA = \dfrac{AB}{2} - AC =$

$= \dfrac{AB-CA-CA}{2} = \dfrac{CB-CA}{2}$. **(fig. b))**

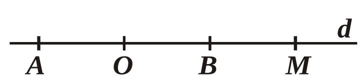
2. $C = M$. Evident, $CM = \dfrac{CB-CA}{2}$.

3. $C \in (MB)$. $CM = MB - CB = \dfrac{AB}{2} - CB = \dfrac{AB-CB-CB}{2} = \dfrac{CA-CB}{2}$. Dacă $C = A$, atunci $CM = AM =$

$= \dfrac{CB-CA}{2} = \dfrac{CB+CA}{2}$. Dacă $C = B$, atunci $CM = BM = \dfrac{CA-CB}{2} = \dfrac{CA+CB}{2}$.

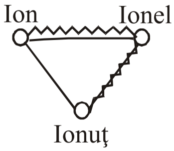
Atenţie! După cum veți constata această proprietate a mijlocului unui segment va avea o aplicabilitate foarte profitabilă în rezolvarea unor probleme prin simplitatea soluțiilor.

2. Se consideră punctele A, O, B, M coliniare, în această ordine. Arătați că, dacă $MO = \dfrac{MA+MB}{2}$, atunci punctul O este mijlocul segmentului (AB).

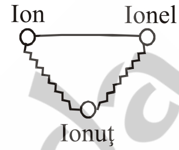


Rezolvare:

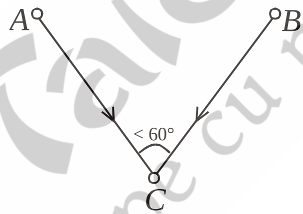
Având în vedere ordinea punctelor pe dreapra d (**figura de mai sus**) avem: $MO = OB + BM$, $MA = MB + OB + OA$. Din relația dată rezultă: $OB + MB = \dfrac{MB+OA+OB+MB}{2}$, de unde $2OB + 2MB =$ $= MB + OA + OB + MB$ sau $OB = OA$ și cum $O \in (AB)$ conform definiției mijlocului unui segment rezultă că punctul O este mijlocul segmentului (AB).



Dacă Ionuţ minte, vom avea diagrama:
Observăm că Ion şi Ionel vor fi prieteni şi necunoscuţi, simultan.
Deci şi Ionuţ spune adevărul. Deci „*mincinosul*“ este Ionel, iar diagrama va fi.
Ion şi Ionel sunt prieteni, iar Ionuţ nu-i cunoaşte pe ceilalţi doi. Evident, o asemenea rezolvare este corectă şi completă. Însă ea necesită un anumit timp pentru analizarea tuturor cazurilor şi redactarea lor. Problemele de combinatorică au însă o rezolvare „*ascunsă*“ în enunţul problemei, o idee pe care rezolvitorul dacă o găseşte termină problema. În cazul nostru, ne vom focaliza atenţia asupra afirmaţiilor a doi băieţi: Ion şi Ionuţ. Ambii afirmă că Ion şi Ionel sunt prieteni. Deci dacă unul din ei minte şi celălalt va minţi şi cum din cei trei băieţi doar unul minte, acesta va fi Ionel.



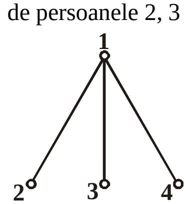
2. Într-o reţea de aeroporturi, avioanele zboară de pe un aeroport numai spre cel mai apropiat aeroport de acesta. Pot ateriza simultan şapte sau mai multe avioane pe un aeroport?



Rezolvare:
Răspunsul este negativ, iar argumentul este de natură geometrică.
Presupunând că există şapte sau mai multe avioane care aterizează simultan pe un aeroport, obţinem că există două aeroporturi A şi B de pe care pleacă simultan două avioane spre un aeroport astfel încât m($\sphericalangle ACB$) < 60°. Dar în triunghiul ABC, m($\sphericalangle ACB$) < 60°$\Rightarrow$ $AB < AC$ sau $AB < BC$ ceea ce contrazice modul de zbor al avioanelor ($AB < AC$ implică că avionul din A va zbura spre aeroportul B şi nu C).

3. Într-o cameră se află 6 persoane. La un moment dat, din iniţiativa gazdei, cele 6 persoane vor face schimb de numere de telefon. Să se arate că în orice moment, sau există 3 persoane care au schimbat numerele de telefon între ele, sau 3 persoane astfel încât nici una nu cunoaşte numărul de telefon al celorlalte două.

Rezolvare:
Pentru redactarea unor probleme de combinatorică se poate face apel la metode de simplificare a enunţului, transformându-l într-o sinteză de informaţii matematice. Astfel, vom considera persoanele ca fiind 6 puncte. Dacă două persoane vor schimba numărul de telefon, le vom uni cu o linie roşie. Dacă nu au făcut schimbul, le vom uni cu o linie neagră. Concluzia problemei revine astfel la a demonstra că, după ce am unit fiecare cu fiecare din cel 6 puncte cu una din cele două linii (roşie sau neagră), va exista un triunghi monocolor.
Vom considera una din cele 6 persoane. Ea este „*unită*“ cu celelalte prin 5 linii. Indiferent de colorarea lor, vor exista 3 linii (cel puţin) cu aceeaşi culoare.
Fără a restrânge generalitatea vom considera culoarea roşie ce uneşte persoana 1 de persoanele 2, 3 şi 4.



Dacă segmentul 2 - 3 este roşu, atunci triunghiul 1, 2, 3 este monocolor.
Deci considerăm cazul în care 2 şi 3 sunt unite printr-un segment negru.
Dacă 3 – 4 este roşu 1, 3, 4 este monocolor, dacă 2 – 4 este roşu, 1, 2, 4 este monocolor.
Dacă nici unul din segmentele 2 – 3, 3 – 4, 2 – 4 nu este roşu, atunci toate vor fi negre şi triunghiul 2, 3, 4 va fi monocolor.
Deci va exista totdeauna un triunghi monocolor cu vârfurile în cele 6 puncte.

cercului se elimină 67 de numere, cele de forma $15k + 1$, ultimul număr tăiat fiind 991. La a doua parcurgere a cercului se taie tot 67 de numere, de forma $15k + 6$, ultimul număr tăiat fiind 996. La a treia parcurgere a cercului se taie 66 de numere, de forma $15k + 11$. După a treia parcurgere a cercului se ajunge la 1 şi se reia raţionamentul de mai sus, nefiind posibilă tăierea altor numere. În total s-au tăiat $67 + 67 + 66 = 200$ de numere. **144. a)** Pentru a ajunge la 2^{10} avem un număr impar de mutări, de la 2^{10} la 2^{17} şi înapoi număr par de mutări, deci în total număr impar de elevi. **b)** 25 de elevi. **145. a)** $S = 42$;

b)

11	18	13
16	14	12
15	10	17

146.

	vara	toamna	iarna	primăvara
muzică simfonică	Nu	Nu	Da	Nu
muzică disco	Nu	Nu	Nu	Da
muzică rock	Da	Nu	Nu	Nu
muzică populară	Nu	Da	Nu	Nu
filme de acţiune	Da	Nu	Nu	Nu
comedii	Nu	Da	Nu	Nu
filme istorice	Nu	Nu	Da	Nu
desene animate	Nu	Nu	Nu	Da

– vara ascultă muzică rock şi urmăreşte filme de acţiune.
– toamna ascultă muzică populară şi urmăreşte comedii.
– iarna ascultă muzică simfonică şi urmăreşte filme istorice.
– primăvara ascultă muzică disco şi urmăreşte desene animate.

147. a) $S_{max} = 100$; **b)** De exemplu. Vezi figura de mai jos.

0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0

148. a) Suma numerelor de pe uşile situate faţă în faţă este de fiecare dată $4n + 1$. Deci $15 + 50 = 4n + 1$, de unde $4n = 64$. Deci pe coridor se află 64 de uşi. **b)** Pe poziţia k în acest caz se află faţă în faţă uşile cu numerele $2k - 1$ şi $2k$, deci pe poziţia 42 se află uşa cu numărul 83. **149. a)** 1 îndoire – 2 suprafeţe; 2 îndoiri – 4 suprafeţe; 3 îndoiri – 8 suprafeţe; 4 îndoiri – 16 suprafeţe; 5 îndoiri – 32 suprafeţe; 6 îndoiri – 64 suprafeţe; 7 îndoiri – 128 suprafeţe; **b)** Pentru a obţine cel puţin 25 de suprafeţe egale trebuie să se facă cel puţin 5 îndoiri, obţinând 32 de suprafeţe egale. Pentru ca suprafeţele să fie egale şi distincte trebuie făcute minim 4 tăieturi. **150.** Primul drum: Mihăiţă + 2 căţei = 32 kg. Al doilea drum: Ana + 2 căţei + 12 iepuraşi = 31 kg. **151. a)** Linia k are $2k - 1$ elemente, deci linia a 10-a are $10 \cdot 2 - 1 = 19$ elemente şi are primul element al 82-lea număr natural impar, adică $1 + 3 + 5 + \ldots + 17 + 1 = (8 + 1)^2 + 1 = 82$. Primul element de pe linia 10 este $81 \cdot 2 + 1 = 163$