

Bacool

C. Angelescu, N. Buzduga,
M.C. Cimpoșu, D. Cosic,
D. Cremenescu, M. Ionescu,
C. Poștaru, G. Stoianovici,
N. Suci, D. Trifon

Clasa a XI-a

PREGĂTIRE PENTRU

Testul de simulare

A EXAMENULUI DE

Bacalaureat

LA MATEMATICĂ



SIGMA

Cuprins

Conținuturile pentru simularea probei la matematică a examenului de bacalaureat național pentru elevii claselor a XI-a	3
---	---

Exerciții și probleme recapitulative

1. Mulțimea numerelor reale (\mathbb{R})	4
2. Ecuații, inecuații. Sisteme de ecuații	4
3. Funcții	5
4. Elemente de trigonometrie. Elemente de geometrie plană	6
5. Progresii	7
6. Mulțimea numerelor complexe (\mathbb{C})*	7
7. Mulțimi de numere. Probleme de numărare	8
8. Matematici financiare. Probabilități	8
9. Elemente de geometrie și calcul vectorial	9
10. Elemente de algebră liniară	10
11. Limite de funcții	12
12. Funcții continue.....	13

Indicații și rezolvări

1. Mulțimea numerelor reale (\mathbb{R})	15
2. Ecuații, inecuații. Sisteme de ecuații	15
3. Funcții	17
4. Elemente de trigonometrie. Elemente de geometrie plană	18
5. Progresii	19
6. Mulțimea numerelor complexe (\mathbb{C})*	20
7. Mulțimi de numere. Probleme de numărare	20
8. Matematici financiare. Probabilități	21
9. Elemente de geometrie și calcul vectorial	22
10. Elemente de algebră liniară	24
11. Limite de funcții	27
12. Funcții continue.....	29

Teste pregătitoare pentru simularea examenului de bacalaureat național

Programa $M_{\text{mate-info}}$

Testul 1	30
Testul 2	31
Testul 3	32

Programa $M_{\text{st-nat}}$

Testul 4	33
Testul 5	34
Testul 6	35

Programa $M_{\text{tehnologic}}$

Testul 7	36
Testul 8	37
Testul 9	39
Testul 10	40

Indicații și rezolvări

Testul 1	42
Testul 2	44
Testul 3	46
Testul 4	48
Testul 5	50
Testul 6	52
Testul 7	53
Testul 8	55
Testul 9	57
Testul 10	59

Subiecte date de către minister pentru simularea examenului de bacalaureat național*M_mate-info*

Testul – 2014	62
Testul – 2015	63
Testul – 2016	64

M_șt-nat

Testul – 2014	65
Testul – 2015	66
Testul – 2016	67

M_tehnologic

Testul – 2014	68
Testul – 2015	69
Testul – 2016	70

Indicații și rezolvări*M_mate-info*

Testul – 2014	72
Testul – 2015	73
Testul – 2016	75

M_șt-nat

Testul – 2014	77
Testul – 2015	78
Testul – 2016	79

M_tehnologic

Testul – 2014	81
Testul – 2015	82
Testul – 2016	83

TESTE PREGĂTITOARE PENTRU SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT NAȚIONAL

Programa $M_{\text{mate-info}}$

Testul 1

Subiectul I

- 5p 1. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.
- 5p 2. Studiați monotonia funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2014^x + \log_{2014} x$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x + \frac{1}{|1+x|} = 1$.
- 5p 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?
- 5p 5. Demonstrați că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = (a+1)\vec{i} + a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru niciun număr real a .
- 5p 6. Arătați că $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (1 + 2 \cos 2x) \cdot \sin 3x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea

- 5p 1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n)$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Demonstrați că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.
- 5p b) Determinați numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2 .
- 5p c) Calculați aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2} , $n \in \mathbb{N}$.
2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați matricea B^2 .
- 5p b) Verificați dacă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Arătați că $C^4 = 6^4 \cdot I_2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2-1}$.
- 5p a) Calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$.
- 5p b) Arătați că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} ((x-1) \cdot \operatorname{tg} f(x))$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-1| e^{nx} + a(x+1)^2 e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p a) Determinați funcția f pentru $x < 0$.
 5p b) Determinați funcția f pentru $x > 0$.
 5p c) Determinați numărul real a , astfel încât funcția f să fie continuă pe \mathbb{R} .

Testul 2

Subiectul I

- 5p 1. Se consideră $z \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Calculați $1+z+z^2$.
 5p 2. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow (2, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$. Arătați că funcția f este bijectivă.
 5p 3. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2 + x - 6 \leq 0$.
 5p 4. Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 și cu 8?
 5p 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{v}_1 = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ sunt coliniari.
 5p 6. Triunghiul ABC are laturile $AB = 3$, $BC = 5$ și $AC = 7$. Calculați lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC .

Subiectul al II-lea

1. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Determinați σ^{-1} .
 5p b) Arătați că permutările σ și σ^{-1} au același număr de inversiuni.
 5p c) Arătați că ecuația $x^4 = \sigma$ nu are soluții în S_6 .
2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p a) Calculați A^3 .
 5p b) Determinați $(A \cdot {}^t A)^{-1}$.
 5p c) Rezolvați ecuația $X^2 = A$, unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 - 1}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^x$.
 5p b) Determinați numărul real a , știind că $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$.
 5p c) Determinați numărul real a , știind că graficul funcției f are exact o asimptotă verticală.

INDICAȚII ȘI REZOLVĂRI

Programa $M_{\text{mate-info}}$

Testul 1

Subiectul I

1. $\frac{10}{\sqrt{2}-1} = 10\sqrt{2} + 10$ și $24 < 10\sqrt{2} + 10 < 25$, deci $\left\lceil \frac{10}{\sqrt{2}-1} \right\rceil = 24$.

2. $f(x) = 2014^x + \log_{2014} x = g(x) + h(x)$,

unde $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ și $g(x) = 2014^x$, iar $h(x) = \log_{2014} x$.

Cum g și h sunt strict crescătoare și suma lor este strict crescătoare.

3. Condiție: $|x+1| \neq 0$, adică $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; $|x+1| = \begin{cases} x+1, x \in (-1, +\infty) \\ -(x+1), x \in (-\infty, -1) \end{cases}$

Cazul I: $x \in (-1, +\infty)$. Ecuația devine: $x + \frac{1}{x+1} = 1$ și are soluția $x = 0 \in (-1, +\infty)$.

Cazul II: $x \in (-\infty, -1)$. Ecuația devine: $x - \frac{1}{x+1} = 1$ și are soluțiile $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$, dar

$$\sqrt{2} \notin (-\infty, -1).$$

Așadar: $S = \{-\sqrt{2}, 0\}$.

4. Există 900 de numere de trei cifre. Produsul a trei cifre este impar doar dacă toate cifrele sunt impare, adică sunt din următoarea mulțime: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Așadar pot fi $5^3 = 125$ numere de trei cifre cu proprietatea cerută.

Deci $P = \frac{125}{900} = \frac{5}{36}$.

5. $\vec{u} \perp \vec{v}$, dacă $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(a+1) + a^2 = a^2 + 3a + 3$.

Fie $a^2 + 3a + 3 = 0$. Cum $\Delta = -3 < 0$, rezultă că nu există a real pentru care cei doi vectori să fie perpendiculari.

6. $\sin x + \sin 5x = 2 \sin 3x \cos 2x$.

Rezultă $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x = \sin 3x(2 \cos 2x + 1)$.

Subiectul al II-lea

1. a) Avem $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $A_2(2, 4)$. Condiția de coliniaritate $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ este

verificată.

b) Avem $A_0(0, 1)$, iar din coliniaritatea punctelor O, A_1, A_2 obținem că $O, A_1, A_2 \in d$, unde $d: 2x - y = 0$.

Cum $A_0 \notin d$, rezultă că numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2 este 4.

$$c) A_{A_n A_{n+1} A_{n+2}} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} n & 2^n & 1 \\ n+1 & 2^{n+1} & 1 \\ n+2 & 2^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+1 & 2 & 1 \\ n+2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2^n.$$

Deci $A_{A_n A_{n+1} A_{n+2}} = 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$2. a) B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

$$b) A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^{-1} \cdot A.$$

$$c) C = B^2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2, \text{ deci } C^4 = (6 \cdot I_2)^4 = 6^4 \cdot I_2.$$

Subiectul al III-lea

$$1. a) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \arctg \frac{1}{x^2 - 1} = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, deci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} ((x-1) \cdot \operatorname{tg} f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left((x-1) \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

2. a) Pentru $x < 0$ avem $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{nx} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = +\infty$.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-nx} (|x-1| e^{2nx} + a(x+1)^2)}{e^{-nx} (e^{2nx} + 1)} = a(x+1)^2.$$

b) Pentru $x > 0$ avem $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{nx} = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx} (|x-1| + a(x+1)^2 \cdot e^{-2nx})}{e^{nx} (1 + e^{-2nx})} = |x-1|.$$

c) Pentru $x = 0$ avem $f(0) = \frac{a+1}{2}$. Deci $f(x) = \begin{cases} a(x+1)^2, & x < 0 \\ \frac{a+1}{2}, & x = 0 \\ |x-1|, & x > 0 \end{cases}; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = a;$

Subiecte date de către minister pentru simularea examenul de bacalaureat național

M_mate-info

Testul – 2014

Subiectul I

- 5p** 1. Calculați $z + \bar{z}$, știind că $z = 3 + 4i$ și \bar{z} este conjugatul numărului complex z .
- 5p** 2. Determinați numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x = 2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - (m^2 - 1)x + 3$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x - 1) = 2\log_2 x$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale \overline{abcd} , cu a, b și c nenule, au suma cifrelor egală cu 5.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC și punctul D astfel încât $\overline{DB} + \overline{DC} = \vec{0}$. Determinați numărul real p pentru care $\overline{AD} = p(\overline{AB} + \overline{AC})$.
- 5p** 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AC = 6$ și $\cos B = \frac{4}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 2 \\ x^2 + 1 & y^2 + 1 & 5 \end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p** a) Calculați $D(1, -1)$.
- 5p** b) Arătați că $D(x, y) = (x - 2)(y - 2)(y - x)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $D(2^x, 4^x) = 0$.
2. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Calculați $A(1) - A(-2)$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural $n, n \neq 1$.
- 5p** c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \frac{n+1}{n^2}$.
- 5p** a) Arătați că $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pentru orice număr natural nenul n .
- 5p** b) Demonstrați că $(a_n)_{n \geq 1}$ șirul este mărginit.
- 5p** c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (na_n)^{\sqrt{n^2+2}}$.