Bac cool

C. Angelescu, N. Buzduga,
M.C. Cimpoeșu, D. Cosic,
D. Cremenescu, M. Ionescu,
C. Poștaru, G. Stoianovici,
N. Suciu, D. Trifon

Clasa a XI-a

PREGĂTIRE PENTRU

Testul de simulare

A EXAMENULUI DE

Bacalaureat

LA **MATEMATICĂ**

SIGMA

Cuprins

TESTE PREGĂTITOARE PENTRU SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT NAȚIONAL

Programa *M_mate-info*

Testul 1

Subiectul I

5p 1. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.

5p 2. Studiați monotonia funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2014^x+\log_{2014}x$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\frac{1}{|1+x|}=1$.

5p 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5p 5. Demonstrați că vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru niciun număr real a.

5p 6. Arătați că $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=(1+2\cos 2x)\cdot\sin 3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2^n)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p a) Demonstrați că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p b) Determinați numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

5p c) Calculați aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n\in\mathbb{N}$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Calculați matricea B^2.

5p b) Verificați dacă $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

5p c) Arătați că $C^4=6^4\cdot I_2$, unde $C=B^2+A^{-1}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

5p b) Arătați că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\left((x-1)\cdot\operatorname{tg}f(x)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x-1|e^{nx}+a(x+1)^2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p a) Determinați funcția f pentru $x<0$.

5p b) Determinați funcția f pentru $x>0$.

5p c) Determinați numărul real a, astfel încât funcția f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

Testul 2

Subiectul I

5p 1. Se consideră $z\in\mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Calculați $1+z+z^2$.

5p 2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to(2,+\infty)$, $f(x)=x^2+1$. Arătați că funcția f este bijectivă.

5p 3. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+x-6\leqslant 0$.

5p 4. Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 și cu 8?

5p 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\overrightarrow{v_2}=3\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.

5p 6. Triunghiul ABC are laturile $AB=3$, $BC=5$ și $AC=7$. Calculați lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră permutarea $\sigma\in S_6$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&5&3&6&1\end{pmatrix}$.

5p a) Determinați σ^{-1}.

5p b) Arătați că permutările σ și σ^{-1} au același număr de inversiuni.

5p c) Arătați că ecuația $x^4=\sigma$ nu are soluții în S_6.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p a) Calculați A^3.

5p b) Determinați $(A\cdot{}^tA)^{-1}$.

5p c) Rezolvați ecuația $X^2=A$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x^2-1}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^x$.

5p b) Determinați numărul real a, știind că $f(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$.

5p c) Determinați numărul real a, știind că graficul funcției f are exact o asimptotă verticală.

INDICAȚII ȘI REZOLVĂRI

Programa *M_mate-info*

Testul 1

Subiectul I

1. $\frac{10}{\sqrt{2}-1}=10\sqrt{2}+10$ și $24<10\sqrt{2}+10<25$, deci $\left[\frac{10}{\sqrt{2}-1}\right]=24$.

2. $f(x)=2014^x+\log_{2014}x=g(x)+h(x)$,

unde $g,h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ și $g(x)=2014^x$, iar $h(x)=\log_{2014}x$.

Cum g și h sunt strict crescătoare și suma lor este strict crescătoare.

3. Condiție: $|x+1|\neq 0$, adică $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $|x+1|=\begin{cases}x+1, x\in(-1,+\infty)\\-(x+1), x\in(-\infty,-1)\end{cases}$.

Cazul I: $x\in(-1,+\infty)$. Ecuația devine: $x+\frac{1}{x+1}=1$ și are soluția $x=0\in(-1;+\infty)$.

Cazul II: $x\in(-\infty,-1)$. Ecuația devine: $x-\frac{1}{x+1}=1$ și are soluțiile $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$, dar

$\sqrt{2}\notin(-\infty-1)$.

Așadar: $S=\{-\sqrt{2},0\}$.

4. Există 900 de numere de trei cifre. Produsul a trei cifre este impar doar dacă toate cifrele sunt impare, adică sunt din următoarea mulțime: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Așadar pot fi $5^3=125$ numere de trei cifre cu proprietatea cerută.

Deci $P=\frac{125}{900}=\frac{5}{36}$.

5. $\vec{u}\perp\vec{v}$, dacă $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=3(a+1)+a^2=a^2+3a+3$.

Fie $a^2+3a+3=0$. Cum $\Delta=-3<0$, rezultă că nu există a real pentru care cei doi vectori să fie perpendiculari.

6. $\sin x+\sin 5x=2\sin 3x\cos 2x$.

Rezultă $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=\sin 3x(2\cos 2x+1)$.

Subiectul al II-lea

1. a) Avem $O(0, 0), A(1, 2), A_2(2, 4)$. Condiția de coliniaritate $\begin{vmatrix}0&0&1\\1&2&1\\2&4&1\end{vmatrix}=0$ este verificată.

b) Avem $A_0(0,1)$, iar din coliniaritatea punctelor O, A_1, A_2 obținem că $O, A_1, A_2 \in d$, unde $d: 2x-y=0$.
Cum $A_0 \notin d$, rezultă că numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2 este 4.

c) $A_{A_nA_{n+1}A_{n+2}} = \frac{1}{2}\cdot|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} n & 2^n & 1 \\ n+1 & 2^{n+1} & 1 \\ n+2 & 2^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+1 & 2 & 1 \\ n+2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2^n$.

Deci $A_{A_nA_{n+1}A_{n+2}} = 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$.

b) $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^{-1} \cdot A$.

c) $C = B^2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$, deci $C^4 = (6 \cdot I_2)^4 = 6^4 \cdot I_2$.

Subiectul al III-lea

1. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, deci dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left((x-1)\cdot \operatorname{tg} f(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left((x-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1} = 1$.

2. a) Pentru $x<0$ avem $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{nx} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = +\infty$.

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-nx}(|x-1|e^{2nx} + a(x+1)^2)}{e^{-nx}(e^{2nx}+1)} = a(x+1)^2.$$

b) Pentru $x>0$ avem $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{nx} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$.

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{nx}(|x-1| + a(x+1)^2\cdot e^{-2nx})}{e^{nx}(1+e^{-2nx})} = |x-1|.$$

c) Pentru $x=0$ avem $f(0) = \frac{a+1}{2}$. Deci $f(x) = \begin{cases} a(x+1)^2, & x<0 \\ \frac{a+1}{2}, & x=0 \\ |x-1|, & x>0 \end{cases}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = a$;

Subiecte date de către minister pentru simularea examenul de bacalaureat național

M_mate-info

Testul – 2014

Subiectul I

5p 1. Calculați $z+\overline{z}$, știind că $z = 3 + 4i$ și $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex z.

5p 2. Determinați numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x = 2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - (m^2 - 1)x + 3$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x - 1) = 2\log_2 x$.

5p 4. Determinați câte numere naturale $\overline{abcd}$, cu a, b și c nenule, au suma cifrelor egală cu 5.

5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctul D astfel încât $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.
Determinați numărul real p pentru care $\overrightarrow{AD}=p(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AC = 6$ și $\cos B=\frac{4}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 2 \\ x^2+1 & y^2+1 & 5 \end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p a) Calculați $D(1,-1)$.

5p b) Arătați că $D(x, y) = (x - 2)(y - 2)(y - x)$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați numerele reale x pentru care $D(2^x, 4^x) = 0$.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Calculați $A(1) - A(-2)$.

5p b) Demonstrați că $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n, $n \neq 1$.

5p c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{n+1}{n^2}$.

5p a) Arătați că $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ pentru orice număr natural nenul n.

5p b)Demonstrați că $(a_n)_{n\geq 1}$ șirul este mărginit.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}(na_n)^{\sqrt{n^2+2}}$.